

АНАЛИЗ ФЛУКТУАЦИОННОЙ ОШИБКИ И ДИНАМИКИ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ

Бочков В.К., Дорошкевич В.В., Захаренков В.Е., Оськин В.А., Султанов Б.В., Фунтиков В.А.

Пензенский научно-исследовательский электротехнический институт
440601, Пенза, ул. Советская, 9, НИОИЗ.

Рассмотрим поведение цифровых систем фазовой синхронизации первого и второго порядка (соответственно ЦСФС1 и ЦСФС2) при наличии в задающем колебании фиксированной частотной расстройки f_r с одновременным наложением на него аддитивного канального шума. В основу построения анализируемых ЦСФС положим применяемые в модемах [1,2] алгоритмы цифровой фильтрации, которые задаются следующими разностными уравнениями:

ЦСФС1–

$$\varphi[k]=\varphi[k-1]+\alpha\cdot\Delta\varphi[k-1], \quad (1)$$

ЦСФС2–

$$\varphi[k]=2\cdot\varphi[k-1]-\varphi[k-2]+k_1\cdot\Delta\varphi[k-1]+k_2\cdot\Delta\varphi[k-2], \quad (2)$$

где $\varphi[k]$ – значение фазы подстраиваемого колебания на k -ом шаге коррекции;

$\Delta\varphi[k]$ – значение сигнала на выходе фазового дискриминатора (ФД) в k -тый момент времени;

α, k_1, k_2 – постоянные коэффициенты, определяющие характеристики ЦСФС.

Дискриминационную характеристику ФД будем полагать синусоидальной. При этом можно показать, что

$$\Delta\varphi[k]=\sin \psi[k]+n_c[k], \quad (3)$$

где

$$\psi[k]=\Phi[k]-\varphi[k], \quad (4)$$

$\Phi[k]$ – отсчеты фазы задающего колебания, определяемые в рассматриваемой ситуации как

$$\Phi[k]=\omega_{0r} \cdot k; \quad \omega_{0r} = 2 \cdot \pi \cdot f_r / f_d \quad (5)$$

f_d – частота дискретизации;

$n_c(k)$ – отсчеты дискретного центрированного белого гауссовского шума с корреляционной функцией вида

$$V=D\cdot x_0[k], \quad (6)$$

D – дисперсия шума;

$$x_0[k]=\begin{cases} 1, & k=0 \\ 0, & k\neq 0 \end{cases} \text{ – последовательность “единичный отсчет”}.$$

Уравнения (1), (2), (3) и (4) позволяют изобразить обобщенную структурную схему рассматриваемых ЦСФС в виде, показанном на рис.1.

Будем рассматривать режим слежения, полагая отношение “сигнал – шум” в канале достаточно высоким (>6 дБ). Это позволяет линеаризовать систему, изображенную на рис.1, так как при $\psi(k)\ll 1$

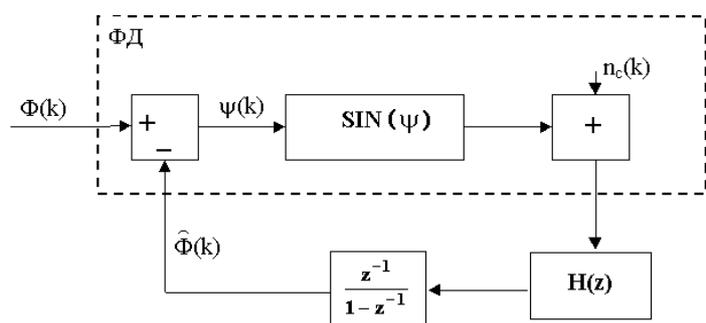


Рис.1

$\sin(\psi)\approx\psi$, и поэтому звено с нелинейностью $\sin \psi$ “шунтируется” пунктирной линией. При этом в силу принципа суперпозиции оказывается корректным раздельный анализ реакции системы на воздействия $\Phi(k)$ и $n_c(k)$.

Значения фигурирующих в уравнениях (1) и (2) параметров α, k_1 и k_2 противоречивым образом влияют на характеристики систем: с их ростом увеличивается флукуационная ошибка, однако одновременно сокращается длительность переходных процессов.

Попытаемся получить количественные соотношения, описывающие оба этих фактора.

Флукуационную ошибку системы будем оценивать с помощью дисперсии $D_{\text{вых}}$ выходного шума $n_{\text{вых}}(k)$. При этом анализ ЦСФС2 проведем относительно двух возможных вариантов ее применения:

- 1) слежение за фазой задающего колебания,
- 2) измерение ухода частоты f_r задающего колебания.

В первом случае в качестве выходной величины будем рассматривать $\varphi(k)$, а во втором – разность $\varphi[k]-\varphi[k-1]$, которая в установившемся режиме ввиду отсутствия в ЦСФС2 статической ошибки слежения пропорциональна относительной частотной расстройке f_r/f_d :

$$\varphi[k] - \varphi[k-1] = \Phi[k] - \Phi[k-1] = 2\pi \cdot f_r / f_d . \quad (7)$$

Для оценки дисперсии выходного шума необходимо определить передаточную функцию линейризованной системы, преобразующей случайную последовательность $n_c[k]$ в отсчеты шума $n_{\text{вых}}(k)$, непосредственно наложенные на выходную величину. С учетом выражений (1), (2) и (7), нетрудно показать, что

$$H_{1\text{ш}}(z) = \alpha / [z - (1 - \alpha)]; \quad (8)$$

$$H_{21\text{ш}}(z) = (k_1 \cdot z + k_2) / [z^2 - (2 - k_1) \cdot z + k_2 + 1]; \quad (9)$$

$$H_{22\text{ш}}(z) = [(k_1 \cdot z + k_2) \cdot (z - 1)] / \{z \cdot [z^2 - (2 - k_1) \cdot z + k_2 + 1]\}, \quad (10)$$

где $H_{1\text{ш}}(z)$, $H_{21\text{ш}}(z)$, $H_{22\text{ш}}(z)$ – названные выше передаточные функции, соответствующие ЦСФС1, а также первому и второму вариантам применения ЦСФС2, представляющие собой z-преобразования от “шумовых” импульсных реакций $h_{\text{ш}}(k)$ ($i=1, 21, 22$) этих систем.

Линеаризация системы позволяет определить отсчеты ее выходного шума как

$$n_{\text{вых}}[k] = \sum_{q=0}^{\infty} h_{\text{ш}}[q] \cdot n_c[k - q].$$

По определению дисперсия

$$D_{1\text{вых}} = \overline{n_{\text{вых}}^2[k]} = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} h_{\text{ш}}[q] \cdot h_{\text{ш}}[m] \cdot \overline{n_c[k - q] \cdot n_c[k - m]} \quad (11)$$

С учетом выражения (6) имеем

$$\overline{n_c[k - q] \cdot n_c[k - m]} = D \cdot x_0[q - m]. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (11) получаем

$$D_{1\text{вых}} = D \cdot \sum_{q=0}^{\infty} h_{\text{ш}}^2[q] \quad (13)$$

Сумма в (13) может быть вычислена на основе равенства Парсеваля [3], в соответствии с которым

$$\sum_{q=0}^{\infty} h_{\text{ш}}^2[q] = \frac{1}{2\pi \cdot j} \oint_C H_{\text{ш}}(z) \cdot H_{\text{ш}}(z^{-1}) \cdot z^{-1} dz, \quad (14)$$

где контур интегрирования выбирается в пересечении областей сходимости $H_{\text{ш}}(z)$ и $H_{\text{ш}}(z^{-1})$.

В частности, для ЦСФС1 на основании (8) и (14) можно записать

$$\sum_{q=0}^{\infty} h_{1\text{ш}}^2[q] = [1 / (2 \cdot \pi \cdot j)] \cdot \oint_C \{ \alpha / [z - (1 - \alpha)] \} \cdot \{ \alpha / [z^{-1} - (1 - \alpha)] \} \cdot z^{-1} dz. \quad (15)$$

Подынтегральное выражение в равенстве (16) имеет 2 полюса: $z_1=1-\alpha$ и $z_2 = 1/(1-\alpha)$. Контур интегрирования в этом выражении должен быть в области сходимости $H_{1\text{ш}}(z)$ и, следовательно, будет окружать полюс $z_1=1-\alpha$. Чтобы определить, будет ли этот контур окружать полюс в точке $z_2 = 1/(1-\alpha)$, учтем, что z-преобразование $H_{1\text{ш}}(z)$ сходится только при $|z| > |1-\alpha|$. Следовательно, соответствующее выражение для $H_{1\text{ш}}(z^{-1})$ справедливо только при $|1/z| > |1-\alpha|$. Таким образом, если $|1/z| > |1-\alpha|$, то $|1/(1-\alpha)| > |z|$. Следовательно, этот полюс находится вне контура интегрирования по z. Поэтому при вычислении контурного интеграла в (15) с помощью теоремы о вычетах [3], нужно учитывать лишь полюс $z_1=1-\alpha$.

Проделав все необходимые преобразования для рассмотренного, а также, рассуждая аналогично, для случаев, соответствующих выражениям (10) и (11), получаем следующие результаты:

$$D_{1\text{вых}} = D \cdot \alpha / (2 - \alpha); \quad (16)$$

$$D_{21\text{вых}} = D \cdot (k_1 \cdot k_2 - 2 \cdot k_1 - 2 \cdot k_2 - k_2^2) / [k_2 \cdot (k_2 - k_1 + 4)]; \quad (17)$$

$$D_{22\text{вых}} = D \cdot [k_1 \cdot k_2 \cdot (k_1 - k_2) - (k_1 + k_2)^2] / [k_2 \cdot (k_2 - k_1 + 4)]. \quad (18)$$

Отметим, что множители после D, фигурирующие в правых частях равенств (16), (17) и (18), представляют собой выражения, определяющие шумовую полосу [4] рассмотренных систем.

Для оценки длительностей переходных процессов в “малом” (такая оценка хотя и не дает представления об абсолютной реальной продолжительности времени вхождения в синхронизм, но позволяет относительно точно судить о соотношении этих динамических характеристик рассматриваемых классов систем) необходимо записать разностные уравнения линеаризованных моделей изучаемых ЦСФС,

описывающие эволюцию фазовой ошибки $\psi[k]$. Это нетрудно сделать, заменив в выражениях (1) и (2) величины $\Delta\phi[k]$ и $\phi[k]$ вытекающими из (3) и (7) их эквивалентами (в силу принципа суперпозиции фигурирующий в (3) шум $n_c[k]$ в данном анализе не учитываем, т.е. полагаем равным 0):

$$\Delta\phi = \psi; \quad \phi[k] = \Phi[k] - \psi[k]. \quad (19)$$

При этом после несложных преобразований получаем:

для ЦСФС1 –

$$\psi[k] - (1-\alpha) \cdot \psi[k-1] = \Phi[k] - \Phi[k-1]; \quad (20)$$

для ЦСФС2 –

$$\psi[k] - (2-k_1) \cdot \psi[k-1] + (1+k_2) \cdot \psi[k-2] = \Phi[k] - 2 \cdot \Phi[k-1] + \Phi[k-2]. \quad (21)$$

При условии, что закон изменения $\Phi[k]$ задается выражением (5), решение уравнения (20) имеет вид

$$\Psi[k] = (\omega_{or} / \alpha) \cdot [1 - (1-\alpha)^k]. \quad (22)$$

Равенство (22) отражает известный факт наличия в установившемся режиме (при $k \rightarrow \infty$ и $(1-\alpha)^k \rightarrow 0$) постоянной статической ошибки слежения $\Delta = \omega_{or} / \alpha$.

При этом количество тактов дискретизации k_ϵ , определяющее время, в течение которого $\psi(k)$ достигает установившегося значения с относительной погрешностью ϵ определяется как

$$k_\epsilon = \ln(\epsilon) / \ln(1-\alpha). \quad (23)$$

Далее рассмотрим ЦСФС, работающую в режиме слежения за фазой задающего колебания.

Решение уравнения (22) при условии (5) выглядит так

$$\Psi[k] = \omega_{or} \cdot (p_1^k - p_2^k) / (p_1 - p_2) \quad (24)$$

где

$$p_{1,2} = 0,5 \cdot \left[2 - k_1 \pm \sqrt{(2 - k_1)^2 - 4 \cdot (1 + k_2)} \right] - \quad (25)$$

полюсы соответствующей уравнению (21) передаточной функции (9).

Совместный анализ устойчивости и качества переходного процесса показывает, что наибольшее практическое значение имеет случай комплексных полюсов. При этом выражение (25) можно записать в виде

$$p_{1,2} = 0,5 \cdot \left[2 - k_1 \pm j\sqrt{4 \cdot k_1 + 4 \cdot k_2 - k_1^2} \right] = |p| \cdot e^{\pm j\xi}, \quad (26)$$

где

$$|p| = \sqrt{1 + k_2}; \quad \xi = \arctg\left[\frac{\sqrt{4 \cdot k_1 + 4 \cdot k_2 - k_1^2}}{(2 - k_1)}\right].$$

Подставляя значения p_1 и p_2 , определяемые (26) в соотношение (24) и проделывая несложные преобразования получаем

$$\Psi[k] = \left[(2 \cdot \omega_{or}) / (\sqrt{4 \cdot k_1 + 4 \cdot k_2 - k_1^2}) \right] \cdot (\sqrt{1 + k_2})^k \cdot \text{Sin}(k \cdot \xi). \quad (27)$$

Очевидно, что длительность рассматриваемого колебательного переходного процесса практически определяется временем затухания его огибающей $c \cdot (\sqrt{1 + k_2})^k$,

где

$$c = (2 \cdot \omega_{or}) / (\sqrt{4 \cdot k_1 + 4 \cdot k_2 - k_1^2}). \quad (28)$$

Из формулы (27) нетрудно получить выражение для числа тактов k_δ , обеспечивающих сходимость к установившемуся значению с заданной абсолютной погрешностью δ

$$k_\delta = \left[\ln(\delta) - \ln(c) \right] / \ln(\sqrt{1 + k_2}). \quad (29)$$

Для анализа динамики ЦСФС2, работающей в режиме измерения ухода частоты задающего колебания, на основании результата (27) с помощью второго из равенств (19) с учетом (5) и (28) можно записать:

$$\phi[k] - \phi[k-1] = \omega_{or} + c \cdot (\sqrt{1 + k_2})^{k-1} \cdot U \cdot \text{Sin}(k \cdot \xi + \alpha), \quad (30)$$

где

$$U = \sqrt{2 + k_2 - 2 \cdot \sqrt{1 + k_2} \cdot \text{Cos}\xi}; \quad \alpha = \arctg\left\{ \frac{\text{Sin}(\xi)}{\sqrt{1 + k_2} - \text{Cos}(\xi)} \right\}.$$

Равенство (30) показывает, что длительность колебательного переходного процесса практически определяется временем затухания огибающей $c \cdot U \cdot (\sqrt{1 + k_2})^{k-1}$. Задаваясь некоторой абсолютной погрешностью δ , характеризующей степень затухания, на основании (30) это время, выраженное в количестве тактов дискретизации k_ϵ , можно определить как

$$k_{\delta} = \left\{ \left[\ln(\delta) - \ln(c \cdot U) \right] / \ln(\sqrt{1+k^2}) \right\} + 1 \quad (31)$$

Таким образом, в работе получены количественные соотношения, определяющие флуктуационную ошибку (выражения (16), (17), (18)) и длительность переходного процесса (равенства (23), (29), (31)) рассмотренных систем синхронизации. Эти результаты могут быть использованы для анализа и оптимизации параметров подобных устройств.

Литература

1. Астапкович В.Ф. и др. Цифровой модем – 9600 для каналов ТЧ // Электросвязь. 1984. №3.
2. Quatieri T.F., O’Laery G.C. Far – echo cancellation in the presence of frequency offset // IEEE Trans. On Commun., vol.37, №6, June, 1989.
3. Оппенгейм А.В., Шафер Р.В. Цифровая обработка сигналов. М.: Связь, 1979.- 416 с.
4. Витерби Э.Д. Принципы когерентной связи. М.: Советское радио, 1970. – 392 с.



FLUCTUATION ERROR And DYNAMICS of DIGITAL PHASE-LOCKED LOOPS

Bochkov V.K., Doroshkevich V.V., Zaharenkov V. E., Oskin V.A., Sultanov B.V., Funtikov V.A.

The Penza research electrotechnical institute
440601, Penza, Sovetskay st., 9.

Let's consider behavior of the first- and second-order digital phase locked loops (accordingly DPLL1 and DPLL2) at presence in input oscillation of a fixed frequency detuning f_r with simultaneous imposing on it of an additive channel noise. In the basis of construction parsed DPLL let's assume used in modems algorithms of a digital filtration, which one are set by following difference equations:

DPLL1–

$$\varphi[k] = \varphi[k-1] + \alpha \cdot \Delta\varphi[k-1], \quad (1)$$

DPLL2–

$$\varphi[k] = 2 \cdot \varphi[k-1] - \varphi[k-2] + k_1 \cdot \Delta\varphi[k-1] + k_2 \cdot \Delta\varphi[k-2], \quad (2)$$

where $\varphi[k]$ – phase of set up oscillation on a k-ohm clock tick of digitization;

$\Delta\varphi[k]$ – output signal of a phase discriminator (PD) in a k-ohm clock tick;

α, k_1, k_2 – constant coefficients, defining performances DPLL.

Discrimination performance PD we shall suppose sine-wave. Thus it is possible to show, that

$$\Delta\varphi[k] = \sin \psi[k] + n_c[k], \quad (3)$$

where

$$\psi[k] = \Phi[k] - \varphi[k], \quad (4)$$

$\Phi[k]$ – phase of assigning oscillation, defined in a considered situation as

$$\Phi[k] = \omega_{0r} \cdot k; \quad \omega_{0r} = 2 \cdot \pi \cdot f_r / f_d \quad (5)$$

f_d – sampling rate; $n_c(k)$ – sampling of the discrete centered white Gaussian noise with a variance D.

Let's consider a tracking mode, supposing the ration « a signal - noise » in the channel high enough. It allows to linearize an analyzable system, as at $\psi(k) \ll 1 \sin(\psi) \approx \psi$. Thus by virtue of a principle of superposition there is a correct separate analysis of system response on actions $\Phi(k)$ and $n_c[k]$.

The values figuring in the equations (1) and (2) parameters α, k_1 and k_2 by a contradictory image influence performances of systems: with their increase the fluctuation error is magnified, duration of transients however is simultaneously reduced. We attempt to receive quantitative relations circumscribing these both factors.

Fluctuation error of a system we shall evaluate with the help of a variance $D_{\text{ВЫХ}}$ of output noise $n_{\text{ВЫХ}}(k)$. Thus the analysis ЦСФС2 we shall conduct concerning two optional versions of its application:

- 1) keeping track of by a phase of entering oscillation,
- 2) measurement of an oscillator drift f_r of entering oscillation.

In the first case as output magnitude we shall consider $j(k)$, and in second - difference $j[k] - j[k-1]$, which one in steady conditions in view of lack in DPLL2 of a static following error is proportional of a relative frequency detuning f_r / f_d :

$$\varphi[k] - \varphi[k-1] = \Phi[k] - \Phi[k-1] = 2\pi \cdot f_r / f_d \quad (6)$$

For an estimation of a variance of output noise it is necessary to define a transfer function of a linearized system conversing random series $n_c[k]$ in samplings noise $n_{\text{БЫХ}}(k)$, immediately overlapped on output magnitude. In view of expressions (1), (2) and (6), it is possible to show, that

$$H_{1\text{ш}}(z) = \alpha/[z - (1 - \alpha)]; \quad (7)$$

$$H_{21\text{ш}}(z) = (k_1 \cdot z + k_2)/[z^2 - (2 - k_1) \cdot z + k_2 + 1]; \quad (8)$$

$$H_{22\text{ш}}(z) = [(k_1 \cdot z + k_2) \cdot (z - 1)]/\{z \cdot [z^2 - (2 - k_1) \cdot z + k_2 + 1]\}, \quad (9)$$

where $H_{1\text{ш}}(z)$, $H_{21\text{ш}}(z)$, $H_{22\text{ш}}(z)$ - called above transfer functions appropriate DPLL1, and also first and second variants of application DPLL2, representing z-conversions from «noise» impulse responses $h_{i\text{ш}}(k)$ ($i=1, 21, 22$) these systems.

In considered conditions the variance of output noise can be defined as

$$D_{i\text{БЫХ}} = D \cdot \sum_{q=0}^{\infty} h_{i\text{ш}}^2 [q]. \quad (10)$$

The sum in (10) can be computed on the basis of the Parseval's equality.

Having done indispensable conversions, on the basis of expression (10) with taking into account (7), (8) and (9) is obtained following outcomes:

$$D_{1\text{БЫХ}} = D \cdot \alpha/(2 - \alpha); \quad (11)$$

$$D_{21\text{БЫХ}} = D \cdot (k_1 \cdot k_2 - 2 \cdot k_1 - 2 \cdot k_2 - k_2^2)/[k_2 \cdot (k_2 - k_1 + 4)]; \quad (12)$$

$$D_{22\text{БЫХ}} = D \cdot [k_1 \cdot k_2 \cdot (k_1 - k_2) - (k_1 + k_2)^2]/[k_2 \cdot (k_2 - k_1 + 4)]. \quad (13)$$

We shall mark, that the factors after D, figuring in right members of equalities (11), (12) and (13), represent expressions, a defining noise band of the reviewed systems.

For an estimation of a transients's duration in "small" (such estimation though does not give representation about an absolute substantial duration of time of a coming into step, but allows rather precisely to judge a relation of these dynamic characteristics of considered classes of systems) it is necessary to receive difference equations of linearized models studied DPLL, which are circumscribing behaviour of phase errors $\psi[k]$. With taking into account (1), (2), (3), (4) these equations become (by virtue of a principle of superposition figuring in (3) noise $n_c[k]$ in the given analysis we leave out, i.e. we suppose equal 0):

for DPLL1 –

$$\psi[k] - (1 - \alpha) \cdot \psi[k-1] = \Phi[k] - \Phi[k-1]; \quad (14)$$

for DPLL2 –

$$\psi[k] - (2 - k_1) \cdot \psi[k-1] + (1 + k_2) \cdot \psi[k-2] = \Phi[k] - 2 \cdot \Phi[k-1] + \Phi[k-2]. \quad (15)$$

Discovering and researching analytical solutions of linear difference equations (14), (15) with a taking in attention (5), being set relative ε or absolute δ by errors of reaching of a steady-state value, we obtain following expressions for an amount of clock ticks of digitization, defining transient period:

for DPLL1 –

$$k_{\varepsilon} = \ln(\varepsilon)/\ln(1 - \alpha), \quad (16)$$

for DPLL2 in a tracking mode behind a phase of entering oscillation

$$k_{\delta} = [\ln(\delta) - \ln(c)]/\ln(\sqrt{1 + k_2}); \quad c = (2 \cdot \omega_{0r})/(\sqrt{4 \cdot k_1 + 4 \cdot k_2 - k_1^2}). \quad (17)$$

for DPLL2 in a condition measurement of an oscillator drift fr of entering oscillation

$$k_{\delta} = \left\{ [\ln(\delta) - \ln(c \cdot U)]/\ln(\sqrt{1 + k_2}) \right\} + 1, \quad (18)$$

where

$$U = \sqrt{2 + k_2 - 2 \cdot \sqrt{1 + k_2} \cdot \text{Cos} \xi}; \quad \hat{\alpha} = \arctg\left[\frac{\sqrt{4 \cdot k_1 + 4 \cdot k_2 - k_1^2}}{(2 - k_1)}\right].$$

Thus, in the report the quantitative relations, defining fluctuation error (expression (11), (12), (13)) and transient time (equality (16), (17), (18)) reviewed digital phase locked loops are obtained. These outcomes can be applied for the analysis and optimization of parameters of similar devices.