

# КОЛЕБАНИЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ РЕКУРСИВНЫХ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРАХ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПРИ ПОСТОЯННОМ ВНЕШНЕМ ВОЗДЕЙСТВИИ\*

Брюханов Ю.А.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова  
150000, Россия, Ярославль, ул. Советская 14. Тел.: (0852) 305-319. E-mail: bruhanov@uniyar.ac.ru

**Реферат.** Исследованы колебания в рекурсивных цепях второго порядка с двумя видами нелинейности сумматора: с насыщением и с переполнением. Определена область линейного режима. Показано, что цепь с нелинейностью с насыщением не искажает внешнее воздействие. Для нелинейности с переполнением установлена связь между периодом возникающих паразитных колебаний, параметрами цепи и величиной воздействия.

Цифровые цепи второго порядка могут использоваться в современных системах передачи информации для последетекторной обработки сигналов. На базе рекурсивных цепей создаются фильтры нижних и верхних частот [1]. При этом внешнее воздействие зачастую имеет вид прямоугольного импульса. Информацию о реакции цепи на такое воздействие можно получить из динамических режимов при постоянной внешней силе. Анализ режимов в нелинейных рекурсивных цепях первого порядка выполнен в [2]. Исследуем ранее не рассматриваемую динамику цепи второго порядка с учетом реально существующей нелинейности характеристики сумматора, полагая, что эффекты квантования отсутствуют.

Колебания в рассматриваемой цепи описываются разностным уравнением

$$x(n+2) = f[ax(n+1) + bx(n) + A], \quad (1)$$

где функция  $f$  описывает характеристику сумматора,  $a$  и  $b$  - параметры цепи,  $A$  - величина внешнего воздействия.

## Линейный режим

Если функция  $f$  линейна, то решение уравнения (1) в установившемся режиме имеет вид  $x(n) = A/(1-a-b)$ .

Полагая  $|x| < 1$  (что характерно для использования арифметики с фиксированной запятой и чисел, выравненных слева [3]), из (1) получим условия линейного режима

$$-1 < A/(1-a-b) < 1. \quad (2)$$

Функция  $A = \alpha(a, b)$  описывает трехмерную область линейного режима.

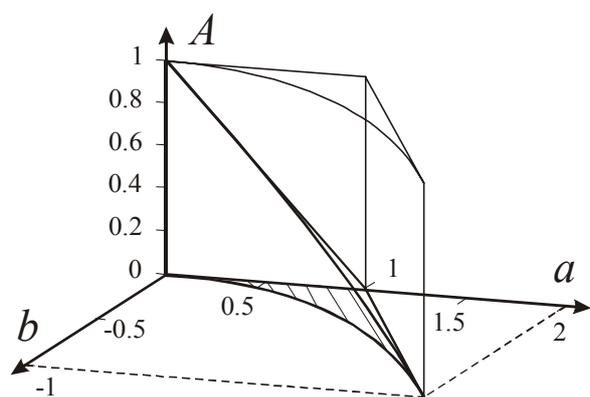


Рис. 1

Важно, что амплитудно-частотная характеристика фильтра верхних частот на частоте  $\omega = 0$  имеет минимальное значение, поэтому в таком фильтре при  $|A| < 1$  всегда существует линейный режим. Что касается объекта дальнейших исследований - фильтра нижних частот, то область линейного режима для него показана на рис.1. В связи с симметрией характеристики сумматора здесь и ниже полагаем  $A > 0$ . Штриховыми линиями всюду обозначается нижняя поверхность соответствующей области.

## Сумматор с насыщением

Для исследования процессов воспользуемся методикой, разработанной в [4]. Она предполагает разбиение фазовой плоскости на три области:  $D_{-1}$ ,  $D_0$  и  $D_1$ , соответствующие областям характеристики сумматора. Это позволяет определить условие устойчивого режима (колебаний с периодом  $T=1$ )  $A \geq (1-a-b)$ , что согласуется с условием (2).

## Сумматор с переполнением

При использовании арифметики с фиксированной запятой, выравненных слева чисел, представлении отрицательных чисел в дополнительном коде характеристика сумматора выражается зависимостью  $f(\varphi) = (\varphi + 1) \bmod 2 - 1$ .

Учитывая три соседние области характеристики сумматора (при этом  $\varphi \in [-3; 3)$ ), как и ранее, плоскость состояний разобьем на три области.

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-02-17939).

Экспериментально установлено, что при выборе параметров  $a$ ,  $b$  и  $A$  вне области линейного режима в цепи возникают паразитные периодические колебания. Период  $T$  паразитных колебаний и правило движения (под правилом движения понимается последовательность областей  $D_u$  фазовой плоскости, посещаемых изображающей точкой) зависят от вышеуказанных параметров и не зависят от начальных условий. Установим связь между величинами  $T$ ,  $a$ ,  $b$  и  $A$ .

Возникающий периодический процесс описывается линейным разностным уравнением

$$y(n+2) = ay(n+1) + by(n) + A + u(n) \quad (3)$$

с начальными условиями  $y(0)$ ,  $y(1)$ , где  $y(1)$  зависит от того, из какой области стартует изображающая точка, если это область  $D_{-2}$ , то  $y(1) = ay(0) + bx(0) + A - 2$ . При этом функция  $u(n)$  удовлетворяет уравнению  $u(n+T) = u(n)$ .

Решение уравнения (1) в установившемся режиме имеет вид

$$y(n) = A/(1-a-b) + \sum_{m=0}^{T-1} z_m^{T-1} \sum_{k=0}^{T-1} u(k) z_m^{n-k} \prod_{i=0, i \neq m}^{T-1} (z_m - z_i),$$

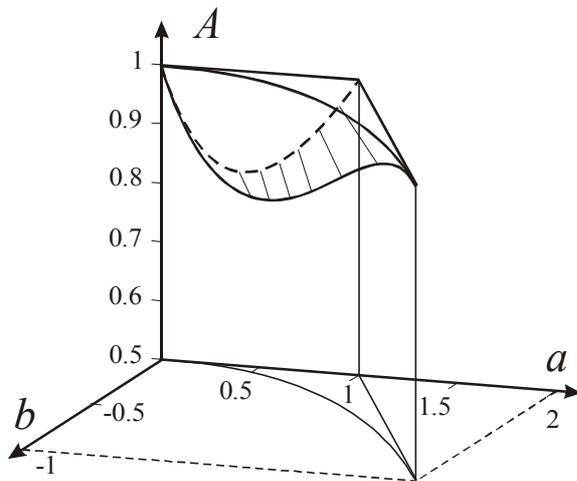
где  $z_i = \exp(j2\pi i / T)$ .

Не менее важным и сложным является нахождение нижней и верхней поверхностей  $A = \alpha(a, b)$ , соответствующих определенному периоду  $T$ . На рис.2 изображены области  $A = \alpha(a, b)$  для  $T \in [2; 5]$ . Правила движения и выражения для  $y(n)$  при тех же значениях  $T$  сведены в табл. 1.

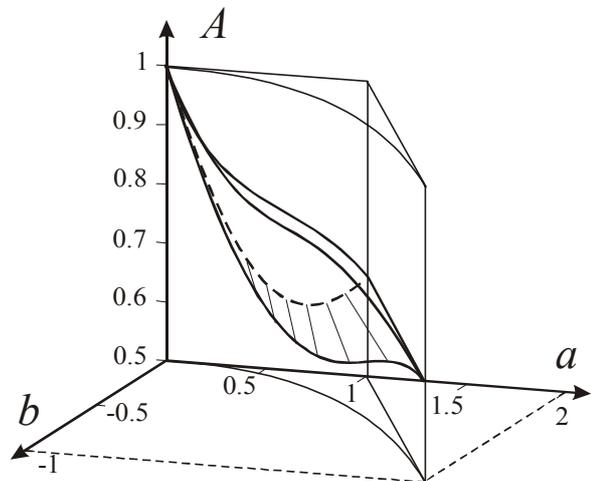
**Заключение**

Исследованы колебания в рекурсивных цифровых фильтрах второго порядка с нелинейностью насыщения и с переполнением при постоянном внешнем воздействии. Определены области существования линейного и нелинейного режимов. Показано, что цепь с нелинейностью насыщения не искажает входное воздействие, а в цепи с переполнением возникают паразитные периодические колебания. Установлена связь между периодом колебаний, параметрами цепи и величиной внешнего воздействия.

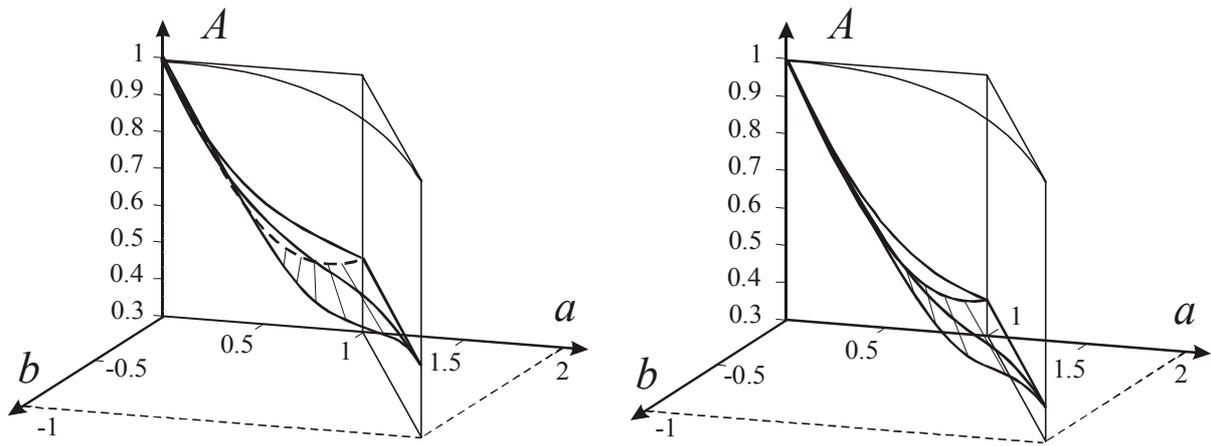
Результаты могут использоваться при разработке систем передачи информации с цифровой обработкой сигналов.



T=2



T=3



T=4

T=5

Рис. 2

Таблица 1

Период T	Правило движения	Изменение координаты $y(n)$
2	$\rightarrow D_{-2} \rightarrow$ $\rightarrow D_0 \rightarrow$	$(A-1)/(1-a-b) + (-1)^{-n}/(1+a-b)$
3	$\rightarrow D_{-2} \rightarrow$ $\rightarrow D_0 \rightarrow$ $\rightarrow D_0 \rightarrow$	$(3A-2)/[3(1-a-b)] - 4 \sin[\omega n - \alpha(\omega)]/(\sqrt{3}  B(\omega) ),$ $\alpha(\omega) = \arg B(\omega),$ $B(\omega) = 1 + ja\sqrt{3} - b \exp(j\omega) + b - \exp(-j\omega)$
4	$\rightarrow D_{-2} \rightarrow$ $\rightarrow D_0 \rightarrow$ $\rightarrow D_0 \rightarrow$ $\rightarrow D_0 \rightarrow$	$(2A-1)/[2(1-a-b)] -  C ^{-1} \sin[\pi n/2 - \beta] +$ $+ (-1)^n / [2(1+a-b)],$ $C = 1 + ja + b,$ $\beta = \arg C$
5	$\rightarrow D_{-2} \rightarrow$ $\rightarrow D_0 \rightarrow$ $\rightarrow D_0 \rightarrow$ $\rightarrow D_0 \rightarrow$ $\rightarrow D_0 \rightarrow$	$A/(1-a-b) - \sum_{m=0}^4 2z_m^n / [(z_m^2 - az_m - b) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq m}}^4 (z_m - z_i)],$ $z_m = \exp(j2\pi m/5)$

Библиография

1. Брюханов Ю.А. Частотные свойства рекурсивных цифровых цепей второго порядка // Радиотехника и электроника. 1997. Т.42, №7. С.836.
2. Брюханов Ю.А. Колебания в нелинейных рекурсивных цифровых фильтрах первого порядка при постоянном внешнем воздействии // 2-я Международ. конф. «Цифровая обработка сигналов и ее применения»: Докл. М.: 1999. Т.3. С.671.
3. Каппелини В., Константинович А.Дж., Эмилиани П. Цифровые фильтры и их применение. М.: Энергоатомиздат, 1983.
4. Брюханов Ю.А. Периодические колебания в цифровом рекурсивном фильтре с нелинейностью насыщения // 1-я Международ. конф. «Цифровая обработка сигналов и ее применения»: Докл. М.: 1998. Т.2. С.108.



OSCILLATIONS IN SECOND ORDER NONLINEAR RECURSIVE DIGITAL FILTERS UNDER CONSTANT EXTERIOR INFLUENCE\*

Bryuhanov Yu.A.

Yaroslavl State University

150000, Russia, Yaroslavl, Sovetskaja st., 14. Phone: (0852) 32-11-94 E-mail: bruhanov@uniyar.ac.ru

**Abstract.** Oscillations in second order recursive circuits with two kinds of adder nonlinearity are investigated: saturation and overflow. The area of the linear regime is defined. It is shown that the circuit with the saturation nonlinearity does not distort an exterior influence. For the overflow nonlinearity a relation between the period of originating parasitic oscillations, parameters of the circuit and the magnitude of the influence is established.

The digital second order circuits can be used in modern systems of information transmission for post-detector signal processing. On the base of recursive circuits the low and high pass filters are created [1]. Thus the exterior influence frequently has a kind of a rectangle impulse. The information about the response of the circuit on such influence can be received from dynamic regimes under a constant exterior force. The analysis of regimes in nonlinear recursive first order circuits is carried out in [2]. We research the dynamics, not considered earlier, of the second order circuit with the account of really existing adder nonlinearity, supposing that the quantization effects are absent.

The oscillations in the circuit under consideration are described by the difference equation

$$x(n+2) = f[ax(n+1) + bx(n) + A] \quad (1)$$

where the function  $f$  describes the adder characteristic,  $a$  and  $b$  are parameters of the circuit, and  $A$  is the magnitude of an exterior influence.

Linear regime

If the function  $f$  is linear the solution of the equation (1) in the stable regime is this

$$x(n) = A/(1 - a - b).$$

Assuming that  $|x| < 1$  (which is characteristic of fixed point arithmetic and fractional numbers [3]), from (1) we obtain the conditions for the linear regime

$$-1 < A/(1 - a - b) < 1. \quad (2)$$

The function  $A = \alpha(a, b)$  describes a three-dimensional area of the linear regime.

It is important that the amplitude-frequency characteristic of a high-pass filter has a minimum value at the frequency  $\omega = 0$ , therefore in such filter by  $|A| < 1$  there always exists a linear regime. Because of the symmetry of the adder characteristic here and below we assume  $A > 0$ . The dashed lines denote the bottom surface of the appropriate area.

Adder with saturation

For the research we shall take advantage of a technique developed in [4]. It assumes a partition of the phase plane on three areas:  $D_{-1}$ ,  $D_0$  and  $D_1$  corresponding to the areas of the adder characteristic. It allows us to define a condition for the stable regime (oscillations with the period  $T = 1$ )  $A \geq (1 - a - b)$ , which conforms to the condition (2).

Adder with overflow

When the fixed-point arithmetic (the representation of negative numbers in two's complement code) is used the adder characteristic is expressed by the dependence

$$f(\varphi) = (\varphi + 1) \bmod 2 - 1.$$

Taking into account three adjacent areas of the adder characteristic (where  $\varphi \in [-3; 3)$ ), we divide the state plane into three areas.

It is experimentally established that when the parameters  $a$ ,  $b$  and  $A$  lie outside the linear regime area in the circuit there are parasitic periodic oscillations. The period  $T$  of these oscillations and the motion rule (under the motion rule a sequence of areas  $D_u$  on the phase plane visited by the state value is understood) depend upon the above-stated parameters and do not depend upon the initial conditions. Let us establish the relation between the values  $T$ ,  $a$ ,  $b$  and  $A$ .

The originating periodic process is described by the linear difference equation

$$y(n+2) = ay(n+1) + by(n) + A + u(n) \quad (3)$$

\* The work has been carried out with financial support of Russian Foundation of Fundamental Research (grant № 99-02-17939).

with the initial conditions  $y(0)$ ,  $y(1)$  whereby  $y(1)$  depends on where the state value starts from if it is the area  $D_{-2}$ ,  $y(1) = ay(0) + bx(0) + A - 2$ . Thus the function  $u(n)$  satisfies to the equation  $u(n+T) = u(n)$ .

The solution of the equation (1) in the stable regime is this

$$y(n) = A/(1-a-b) + \sum_{m=0}^{T-1} z_m^{T-1} \sum_{k=0}^{T-1} u(k) z_m^{n-k} / [(z_m^2 - az_m - b) \prod_{i=0, i \neq m}^{T-1} (z_m - z_i)]$$

where  $z_i = \exp(j2\pi i/T)$ .

Not less important and complicated is the determination of the lower and upper surfaces  $A = \alpha(a, b)$  corresponding to a definite period  $T$ . In the paper the graphs of the areas  $A = \alpha(a, b)$  as well as the table of the motion rules and expressions for  $y(n)$  are represented by  $T \in [2; 5]$ .

Bibliography

1. Брюханов Ю.А. Частотные свойства рекурсивных цифровых цепей второго порядка // Радиотехника и электроника. 1997. Т.42, №7. С.836.
2. Bryuhanov Yu.A. Oscillations in nonlinear first order recursive digital filters due to constant input signal // Proc. of 2nd Int. Conf. "Digital Signal Processing and Its Applications" (DSPA'99), Moscow, 1999. V.2, p. 675.
3. V. Cappellini, A.G. Constantinides and P. Emiliani. Digital filters and their applications. Academic Press, London, 1978.
4. Yu.A. Bryuhanov. Periodic Oscillations in Digital Filter with Saturation Nonlinearity // Proc. of 1st Int. Conf. "Digital Signal Processing and Its Applications" (DSPA'98), Moscow, 1998. V. II-E, p.75.