

Вятский государственный технический университет, кафедра радиоэлектронных средств
610000, г. Киров, ул. Московская, 36,
тел. (833-2)-693295, факс (833-2)-626578, e-mail: trubin@vgtu.riac.ru

Реферат. Рассмотрена конфигурация возможных положений комплексно сопряженных полюсов рекурсивных цифровых фильтров второго порядка в z -плоскости. Получены соотношения для представления полюсов в виде функции параметров конфигурации.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Квантование коэффициентов цифровых фильтров (ЦФ) обуславливает возможность расположения их нулей и полюсов только на строго фиксированных позициях z -плоскости [1 – 3]. В работах автора [4, 5] отмечено, что задача дискретной оптимизации ЦФ на множестве нулей и полюсов имеет меньшую размерность, чем на множестве коэффициентов. Поэтому в процессе структурного синтеза ЦФ целесообразно определить значения нулей и полюсов на дискретизированной z -плоскости, а уже затем произвести расчет коэффициентов ЦФ.

Целью данной работы является изучение топографии дискретизированной z -плоскости, т. е. получение соотношений, позволяющих определить положение нулей и полюсов при заданной разрядности коэффициентов. Анализ в работе ограничен только изучением положения комплексно сопряженных и двухкратных вещественных полюсов ЦФ второго порядка, работающих в арифметике с фиксированной точкой.

2. ТОПОГРАФИЯ z-ПЛОСКОСТИ

Передаточная функция ЦФ второго порядка имеет следующий вид

$$H(z) = (a_0 z^2 + a_1 z + a_2) / (z^2 - b_1 z - b_2), \quad (1)$$

где a_0, a_1, a_2, b_1 и b_2 - вещественные коэффициенты. Полюсы ЦФ равны

$$z_p = 0.5b_1 \pm \sqrt{0.25b_1^2 + b_2}. \quad (2)$$

При реализации ЦФ по прямой или канонической структуре коэффициенты передаточной функции являются коэффициентами структуры ЦФ. Если c – коэффициент ЦФ, то $c = k_c \delta_{m_c}$, где c - коэффициент ЦФ;

k_c, m_c - целые числа; $\delta_{m_c} = 2^{-m_c}$ - шаг квантования коэффициента c . С учетом введенных обозначений

можно записать

$$z_p = 0.5k_{b_1} \delta_{m_{b_1}} \pm \sqrt{0.25k_{b_1}^2 \delta_{m_{b_1}}^2 + k_{b_2} \delta_{m_{b_1}}}. \quad (3)$$

На рис. 1 показано положение полюсов ЦФ второго порядка в z -плоскости для $m = m_{b_1} = m_{b_2} = 3$ (здесь и ниже показывается только первый квадрант z -плоскости). На этом рисунке отчетливо видно, что все полюсы расположены на системах концентрических окружностей с центрами, находящимися на оси $\text{Re } z$. Рассмотрим эти системы окружностей более подробно.

Квантование коэффициентов приводит к дискретизации z -плоскости. Это утверждение следует понимать в том смысле, что возможные положения полюсов в z -плоскости образуют некоторую дискретную структуру.

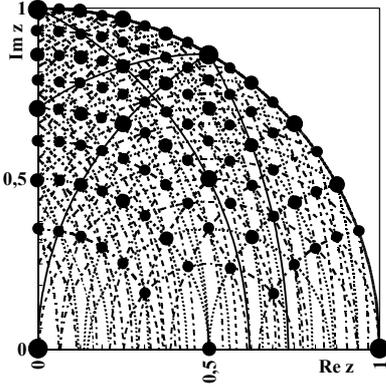


Рис. 1. Положение полюсов ЦФ второго порядка в z-плоскости

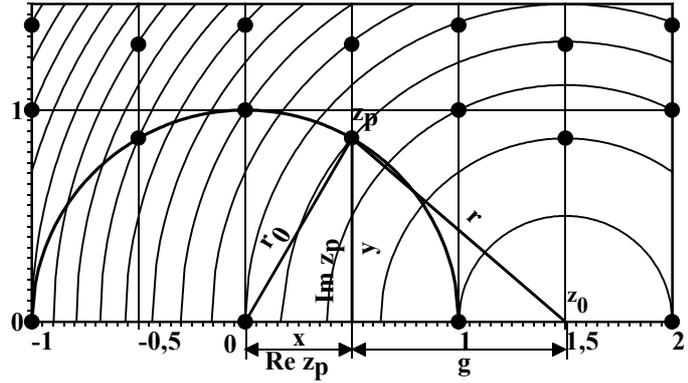


Рис. 2. Введение в z-плоскости новой системы координат

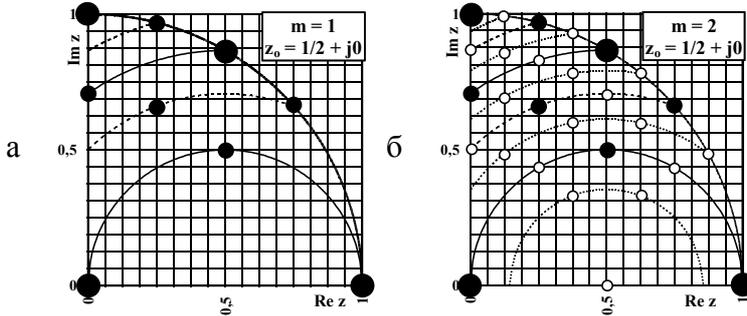


Рис. 3. Дискретизация z-плоскости

На рис. 3, а представлена топография z-плоскости при $m = m_{b_1} = m_{b_2} = 1$, центр окружностей равен $z_0 = 0.5$. Увеличение разрядности на единицу приводит к следующим последствиям. “Новые” полюсы (круги без заливки на рис. 3, б) располагаются, во-первых, на “старых” окружностях (сплошные линии для $m=0$ и штриховые для $m=1$) по одному между “старыми” полюсами, и, во-вторых, на “новых” окружностях (пунктирные линии), появляющихся по одной между “старыми” окружностями.

Допустим, что z_0 - точка z - плоскости, являющаяся центром соответствующей системы окружностей. В этом случае можно записать

$$\begin{aligned} (\operatorname{Re} z_p - z_0) + j \operatorname{Im} z_p &= (0.5b_1 - z_0) + j\sqrt{-(0.25b_1^2 + b_2)}, \\ (\operatorname{Re} z_p - z_0) - j \operatorname{Im} z_p &= (0.5b_1 - z_0) - j\sqrt{-(0.25b_1^2 + b_2)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Перемножая уравнения (4), получим при $z_p = z$ уравнения окружностей

$$(\operatorname{Re} z - z_0)^2 + \operatorname{Im}^2 z = z_0^2 - b_1 z_0 - b_2. \quad (5)$$

С учетом квантования коэффициентов ЦФ уравнения окружностей приобретают вид

$$(\operatorname{Re} z - z_0)^2 + \operatorname{Im}^2 z = z_0^2 - k_{b_1} \delta_{m_{b_1}} z_0 - k_{b_2} \delta_{m_{b_2}}. \quad (6)$$

Для локализации полюсов в дискретизированной z-плоскости откажемся от декартовой системы координат и введем новую, в которой координаты полюса будут задаваться парой (x, r^2) , где $x = \operatorname{Re} z_p$, r^2 - квадрат радиуса окружности с центром в точке z_0 , проходящей через данный полюс. После выполнения элементарных расчетов и геометрических построений, иллюстрирующихся рис. 2, получим

$$z_p = x \pm j\sqrt{r^2 - g^2} \text{ и } x = 0.5b_1, r^2 = z_0^2 - b_1 z_0 - b_2. \quad (7)$$

С учетом квантования коэффициентов

$$x = k_{b_1} \delta_{m_{b_1}+1}, \quad r^2 = z_0^2 - k_{b_1} \delta_{m_{b_1}} z_0 - k_{b_2} \delta_{m_{b_2}}. \quad (8)$$

Для рационального $z_0 = n/d$ (n, d – целые числа) при $m = m_{b_1} = m_{b_2}$

$$r^2 = n^2/d^2 - (k_{b_1}n + k_{b_2}d)/2^m d. \quad (9)$$

Соотношение (9) желательно преобразовать таким образом, чтобы r^2 было функцией только одного параметра l_r – номера окружности. Это легко достичь при взаимно простых n и d . В этом случае любое целое число l_r можно представить в виде $l_r = -k_{b_1}n - k_{b_2}d$. Это выражение представляет собой линейное диофантово уравнение [6]. Поэтому квадрат радиуса окружностей можно выразить в виде

$$r^2 = n^2/d^2 + l_r/(2^m d), \quad (10)$$

где $l_r = -\text{trunc}(2^m n^2/d), \dots, 0, 1, \dots$; $\text{trunc}(x)$ – целая часть числа x . Полюсы находятся на пересечении этих окружностей с прямыми, параллельными оси ординат, определяемыми параметром $k_{b_1} = dl_x - l_r \text{ mod } d$, при $l_x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Далее определим, каким образом система окружностей, на которых располагаются комплексно-сопряженные полюсы ЦФ, отображается на плоскость коэффициентов (b_1, b_2) . Из соотношений (7) получим

$$b_2 = -z_0 b_1 + (z_0^2 - r^2). \quad (12)$$

Таким образом, системе концентрических окружностей z -плоскости соответствует в плоскости коэффициентов система эквидистантных прямых линий, наклон которых определяется центром окружностей. Это обстоятельство иллюстрируется рис. 4 для $z_0=0.25$.

На рис. 4 б треугольник ограничивает область устойчивости ЦФ, комплексно-сопряженным полюсам ЦФ соответствует область $b_2 \leq -0.25b_1^2$.

Теперь выразим полюсы ЦФ в виде функций переменных l_x, l_r . Учитывая (3), (8) - (10), получим при пересечении прямых и окружностей, определяемых l_x и l_r соответственно

$$z_p = \frac{dl_x - l_r \text{ mod } d}{2^{m+1}} \pm j \sqrt{\frac{ndl_x - nl_r \text{ mod } d + l_r}{d2^m} - \frac{(dl_x - l_r \text{ mod } d)^2}{2^{2m+2}}} \quad (12)$$

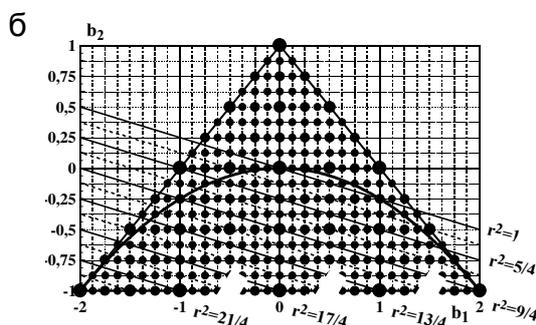
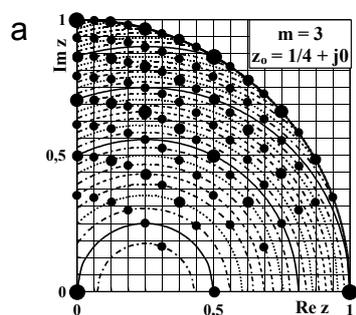


Рис. 4. Отображение системы окружностей на плоскость коэффициентов

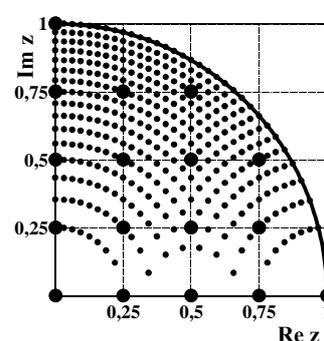


Рис. 5. Полюсы канонической и связанной структур

3. ТОПОГРАФИЯ z- ПЛОСКОСТИ ДЛЯ СВЯЗАННЫХ СТРУКТУР

В ряде работ [2, 3], отмечается, что некоторые структуры ЦФ характеризуются конфигурациями полюсов, отличающимися от конфигурации для канонической и прямой формы. Например полюсы связанной структуры ЦФ второго порядка расположены в узлах квадратной решетки (большие точки на рис. 5 для $m = 2$). В действительности никакая из структур не может иметь положений полюсов, отличных от возможных положений для канонической структуры. Полином знаменателя передаточной функции рассмотренной связанной структуры имеет вид $D(z)=z^2-(c_1+c_3)z+(c_1c_3+c_2c_4)$. При одинаковой разрядности дробной части коэффициентов c_i , равной m , топография z -плоскости была бы такой же, как и для канонической формы при $m_{b_1} = m$ и $m_{b_2} = 2m$ (произведение коэффициентов в выражении для b_2 приводит к удвоению длины

разрядной сетки). Эта конфигурация показана для канонической структуры с $m_{b_1} = 2$ и $m_{b_2} = 4$ на рис. 5 (малые точки). Однако коэффициенты $D(z)$ “связаны” уравнениями $c_1 = c_3$; $c_2 = c_4$. По-видимому название структуры обусловлено именно этим фактом. Эти ограничения приводят к тому, что некоторые полюсы

исключаются из возможной конфигурации. Это хорошо видно на рис. 5. Таким же образом образуются “новые” конфигурации и для других структур с ограничениями на коэффициенты [3], которые также целесообразно называть связанными.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показано, что комплексно сопряженные полюсы рекурсивных ЦФ второго порядка в z -плоскости расположены на пересечении системы эквидистантных прямых линий, параллельных оси ординат и системы концентрических окружностей с центром, лежащим на оси абсцисс. Получены параметры этих прямых и окружностей. Результаты работы позволяют представить полюсы ЦФ в виде функции номеров окружностей и прямых линий. Показано, что введение ограничений на значения коэффициентов ЦФ приводит к исключению из множества возможных значений полюсов некоторых значений.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Gevers M., Li G. Parametrizations in control, estimation and filtering problems: Accuracy aspects. - Berlin, New York: Springer Verlag, 1993. – 375 p. (Communications and Control Engineering Series).
2. Oppenheim A. V., Weinstein C. J. Effects of finite register length in digital filtering and the Fast Fourier Transform. - Proceedings of IEEE, 1972, vol. 60, № 8, p. 957 - 976.
3. Ланнэ А. А., Шевкопляс Г. Б. Шумы и точность реализации характеристик цифровых фильтров. - Зарубежная радиоэлектроника, 1974, № 4, с. 18 - 47.
4. Лесников В. А., Наумович Т. В. Генерация и нумерация структур при структурном синтезе рекурсивных цифровых фильтров. – Сб. трудов 6-й Международной научно-технической конференции “Радиолокация, навигация, связь” – Воронеж, 25 – 27 апреля 2000 г. – т. 3. – с. 1858 – 1868.
5. Лесников В. А., Наумович Т. В. Дискретизация z -плоскости при синтезе рекурсивных цифровых фильтров. - Вестник Вятского научн. центра Верхне-Волжского отделения Акад. технолог. наук Российской Федерации. Серия: Проблемы обработки информации. Выпуск 1/98. Сб. научных трудов. - Киров, 1998. - с.92 - 98.
6. Айерлэнд К., Роузен М. Классическое введение в современную теорию чисел. М.: Мир, 1987. – 416 с.



DISCRETIZATION of a z -PLANE OWING TO QUANTIZING COEFFICIENTS of RECURSIVE DIGITAL FILTERS

Lesnikov V.A.

Vyatka State Technical University
36 Moscow str., Kirov 610000, Russia

Phone (+7-833-2) -693295, Fax (+7-833-2) -626578, E-mail: trubin@vgtu.riac.ru

Abstract. The configuration of possible positions of conjugate poles of recursive digital filters of the second order in a z -plane is reviewed. The equations for representation of poles as a function of parameters of the configuration are obtained.

The quantizing of coefficients of digital filters causes a capability of arrangement of their zeros and poles only on strict fixed positions of a z -plane [1 - 3]. In publications of the report author [4, 5] is marked, that the problem of discrete optimization of digital filters on set of zeros and poles has smaller dimension, than on set of coefficients. Therefore during structural synthesizing of digital filters it is expedient to determine values of zeros and poles on a discretized z -plane, and already then to make digital filter coefficients calculation.

The purpose of the given report is the analysis of topography of a discretized z -plane. In other words, our task is deduction of equations that make possible to determine a position of poles with a fixed coefficient wordlength. The analysis in report is limited only to analysis of a position of conjugate and double real poles of the second order digital filters working in a fixed point arithmetics.

The transfer function ЦФ of the second order has a following view

$$H(z) = (a_0 z^2 + a_1 z + a_2) / (z^2 - b_1 z - b_2), \quad (1)$$

a_0, a_1, a_2, b_1 and b_2 are real coefficients. If c is the coefficient of digital filter, then one may be represented as $c = k_c \delta_{m_c}$. In this equation $\delta_{m_c} = 2^{-m_c}$ is quantization step size, k_c – is integer, m_c – is length of a fractional part of coefficient. In view of gated in identifications the poles can be calculated under the formula

$$z_p = 0.5k_{b_1} \delta_{m_{b_1}} \pm \sqrt{0.25k_{b_1}^2 \delta_{m_{b_1}}^2 + k_{b_2} \delta_{m_{b_1}}}. \quad (2)$$

For localization of poles in a discretized z-plane we shall refuse Cartesian coordinate system and we shall enter new coordinate system, in which one coordinate of a pole will be determined by a pair (x, r^2) , where $x = \text{Re } z_p$, r^2 - square of a radius of a circle with center in a point z_0 , on which one is arranged the given pole.

Again gated in coordinates can be expressed as follows

$$x = k_{b_1} \delta_{m_{b_1}+1}, \quad r^2 = z_0^2 - k_{b_1} \delta_{m_{b_1}} z_0 - k_{b_2} \delta_{m_{b_2}}. \quad (3)$$

The poles place in a z-plane on intersection of straight lines parallel ordinate axis and concentric circles with center z_0 . Let's allow, that z_0 - a rational number. That is $z_0 = n/d$, where n and d - integers. In this case poles can be presented as a function of number of a straight line and number of a circle, intersected with it:

$$z_p = \frac{dl_x - l_r \text{ mod } d}{2^{m+1}} \pm j \sqrt{\frac{ndl_x - nl_r \text{ mod } d + l_r}{d2^m} - \frac{(dl_x - l_r \text{ mod } d)^2}{2^{2m+2}}}. \quad (4)$$

l_x is number of a straight line. $l_x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. l_r is number of a circle. $l_r = -\text{trunc}(2^m n^2/d), \dots, 0, 1, \dots$. $\text{trunc}(x)$ is a integer part of x .

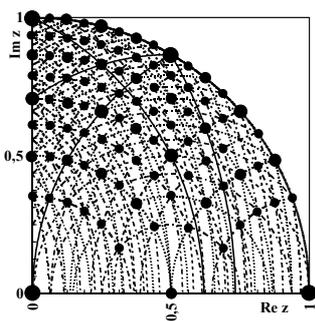


Fig. 1. A position of the second order digital filters poles in a z-plane

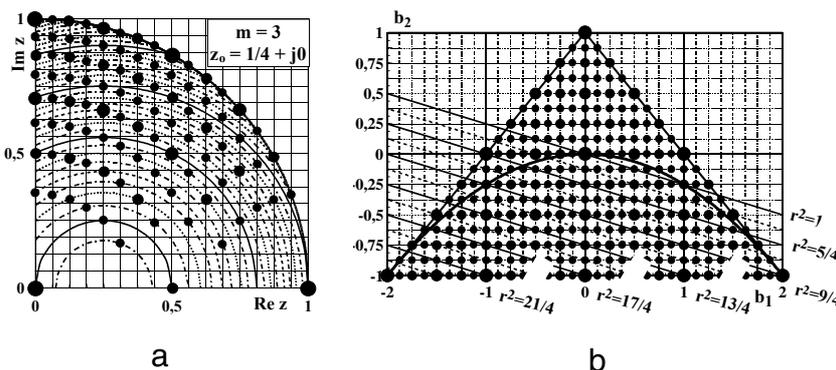


Fig. 2. Mapping of a system of circles on a plane of coefficients

In a fig. 2 is rotined, how the poles from a z-plane are mapped on a plane of factors of a digital filter. The concentric circles from a z-plane are imaged in a plane of factors as a system of equidistant parallel straight lines, the equations which one look like the following

$$b_2 = -z_0 b_1 + (z_0^2 - r^2). \quad (12)$$

In report is rotined, that conjugate poles of the second order IIR digital filter in a z-plane are arranged on intersection of a system of equidistant straight lines parallel ordinate axis and system of concentric circles with center lying on an abscissa axis. The parameters of these straight lines and circles are obtained. The outcomes of report allow to present poles of digital filter as a function of numbers of circles and straight lines.

REFERENCES

1. Gevers M., Li G. Parametrizations in control, estimation and filtering problems: Accuracy aspects. - Berlin, New York: Springer Verlag, 1993. - 375 p. (Communications and Control Engineering Series).
2. Oppenheim A. V., Weinstein C. J. Effects of finite register length in digital filtering and the Fast Fourier Transform. - Proceedings of IEEE, 1972, vol. 60, № 8, p. 957 - 976.
3. Ланнэ А. А., Шевкопляс Г. Б. Шумы и точность реализации характеристик цифровых фильтров. - Зарубежная радиоэлектроника, 1974, № 4, с. 18 - 47.
4. Лесников В. А., Наумович Т. В. Генерация и нумерация структур при структурном синтезе рекурсивных цифровых фильтров. - Сб. трудов 6-й Международной научно-технической конференции "Радиолокация, навигация, связь" - Воронеж, 25 - 27 апреля 2000 г. - т. 3. - с. 1858 - 1868.
5. Лесников В. А., Наумович Т. В. Дискретизация z-плоскости при синтезе рекурсивных цифровых фильтров. - Вестник Вятского научн. центра Верхне-Волжского отделения Акад. технолог. наук Российской Федерации. Серия: Проблемы обработки информации. Выпуск 1/98. Сб. научных трудов. - Киров, 1998. - с.92 - 98.