

АНАЛИЗ ДВУХ МЕТОДОВ ОЦЕНИВАНИЯ КРИВИЗНЫ ДИСКРЕТНОЙ ПЛОСКОЙ ЗАШУМЛЕННОЙ КРИВОЙ

Бачило С.А., Лепский А.Е., Рыбаков О.С.

Научно-конструкторское бюро вычислительных систем
Таганрогского государственного радиотехнического университета
347900, г. Таганрог, ГСП - 25 А, ул. Шевченко, 2, НКБ ВС
тел., fax(8634) 310-925; E-mail:root@nkbvs.ttn.ru; Телетайп: УРАН

Реферат. В работе рассматриваются два метода оценивания кривизны зашумленной дискретной кривой. Первый метод, названный методом геометрического сглаживания, основан на вычислении мер пересечения области, ограниченной рассматриваемым контуром, с некоторыми геометрическими примитивами – кругом, квадратом и т.д. Второй способ, названный аппроксимативным, основан на вычислении оценок производных путем аналитической аппроксимации дискретной кривой. В статье приведены результаты оценки погрешностей этих методов и выбора оптимальных значений их параметров.

1. Введение. Распознавание формы плоских двумерных изображений объектов осуществляется, как правило, путем сравнения внешнего контура исходного изображения с контурами эталонных объектов. При этом на контуре стараются выделить наиболее информативные, так называемые контрольные, точки. В качестве таких точек обычно используют точки с высоким значением функции кривизны.

Если непрерывная кривая задана уравнением в явной форме $y = y(x)$, то кривизна вычисляется по формуле $k = |y'' / (1 + y'^2)^{3/2}|$. Реально имеется только дискретная кривая, получаемая обработкой зашумленного цифрового изображения. Такая дискретная кривая в общем случае может содержать разрывы и отдельно стоящие, "выбитые" точки. Как дифференциальная характеристика, кривизна является очень неустойчивой к дискретизации и зашумлению изображения. Поэтому, для обеспечения приемлемой помехоустойчивости поиска контрольных точек функцию кривизны оценивают косвенно.

В данной работе рассматриваются два способа оценивания кривизны, пригодные для обработки зашумленных изображений. Первый способ, названный методом геометрического сглаживания, был предложен в работе [1]. Второй способ, названный аппроксимативным, описывается ниже. Оценки кривизны, получаемые с помощью этих методов, обозначены k_m^g и k_m^a соответственно.

Без ограничения общности можно считать, что кривая проходит через начало координат и кривизна оценивается в начале координат. Под m – оценкой функции кривизны кривой будем понимать функцию k_m , зависящую от параметра $m > 0$, которая удовлетворяет условиям $\lim_{m \rightarrow +0} k_m = k$. Как правило, параметр $m > 0$ определяет степень гладкости функции кривизны. Оценки K_m кривизны k_m исследуются на основе анализа их смещения $s_m = k - M[K_m]$ и среднеквадратичного отклонения $\sigma[K_m]$.

В [2] исследовалась задача оценивания значения m_0 , при котором достигается минимум функции $\max\{s_m, \sigma^2[K_m]\}$ для метода геометрического сглаживания. В данной работе для обоих рассматриваемых методов проводится статистическое исследование зависимости дисперсии $D_m = s_m^2 + \sigma^2[K_m]$ суммарной ошибки, а также аналитическое оценивание значения m_0 , в котором достигается минимум функции $R_m^{(1)} = |s_m| + \sigma[K_m]$ для метода геометрического сглаживания.

2. Метод геометрического сглаживания [1,2]. Пусть оценивается кривизна плоской без самопересечений кривой γ , проходящей через начало координат и Q_m – m – окрестность начала координат ($m \in N$) в некоторой метрике ρ . Вычислим m – вес кривой γ по формуле $v_m = |S_m - \bar{S}_m| / \max(S_m, \bar{S}_m)$, где S_m и \bar{S}_m – площади фигур, ограниченных границей окрестности Q_m и кривой γ . В [2] показано: а) в метрике $\rho_\infty(s, k) = \max\{|s|, |k|\}$ имеет место асимптотическая формула $k = 3v_m/m + O(m)$, $m \rightarrow 0$; б) в евклидовой метрике имеет место асимптотическая формула $k = 3\pi v_m / (4m) + O(m)$, $m \rightarrow 0$. Поэтому m – оценка функции кривизны в методе геометрического сглаживания вычисляется по формуле $k_m^g = 3v_m/m$, а вес v_m рассчитывается в метрике $Q_m = [-m, m] \times [-m, m]$.

Рассмотрим задачу оценивания оптимального значения параметра m_0 , в котором достигается минимум функции $R_m^{(1)} = |s_m| + \sigma[K_m]$. Заметим, что использование этого критерия оптимальности позволяет получить интервальную оценку для m_0 не зависящую от k . Будем считать, что точка кривой γ , в которой

оценивается кривизна, имеет m – вес, ограниченный нижним пороговым значением $h \in (0,1)$, то есть $v_m > h$. Предположим, что кривая γ подвергнута целочисленному некоррелированному одномерному зашумлению, описанному в [2], то есть отклонение случайной ординаты Y_k от своего среднего значения $\mathbf{M}[Y_k] = y_k$ на j единиц осуществляется с вероятностями p_j ($j = -l, \dots, l$), причем $p_{-j} = p_j$ ($j = 1, \dots, l$). Применяя методику [2] можно показать, что оптимальное значения m_0 будет лежать в интервале

$$\sigma_0^{2/3} / \sqrt[3]{16} < m_0 < \sigma_0^{2/3} / J(h)h^{5/3},$$

где $J(h) = 0.076h^2 + 0.107h + 0.292$, $\sigma_0^2 := 2\sum_{k=1}^l k^2 p_k$ – дисперсия зашумления кривой в точке.

3. Аппроксимативный метод. В этом методе исходная дискретная кривая в m – окрестности начала координат аппроксимируется аналитически задаваемой непрерывной кривой, параметры которой могут быть оценены, например, методом наименьших квадратов. В качестве аппроксимирующих кривых удобно использовать, в частности, окружность $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ с параметрами a, b, r или полином второго порядка вида $y = c_0 + c_1x + 0.5c_2x^2$.

Использование для аппроксимации указанного полинома второго порядка эквивалентно применению процедуры сглаживания [3] в окрестности начала координат оцифрованных значений кривой y_k ($k = -m, \dots, m$) с помощью многочлена второго порядка $c_0 + c_1k + 0.5c_2k^2 \approx y_k$ для регуляризации процедуры численного дифференцирования. Коэффициенты c_1, c_2 при этом являются оценками значений первой и второй производной оцифрованной кривой в начале координат. Тогда аппроксимативную m – оценку кривизны можно вычислить по формуле $k_m^a = |c_2 / (1 + c_1^2)^{3/2}|$. Зная оценку кривизны можно также найти оценки координат центра аппроксимирующей окружности радиуса $r_m = 1/k_m^a$ по формулам $a^* = \mp c_1 r_m / \sqrt{1 + c_1^2}$, $b^* = \pm r_m / \sqrt{1 + c_1^2}$.

4. Сравнение двух методов. Свойства оценок кривизны изучались посредством их статистического моделирования. В качестве исходной дискретной кривой использовалась дуга окружности $y_k = \sqrt{R^2 - k^2} - R$ ($k = -m, \dots, m$) радиуса R . Эта кривая подвергалась одномерному зашумлению, в результате чего получалась случайная функция $Y_k = y_k + \xi_k$ ($k = -m, \dots, m$), где ξ_k – нормальный некоррелированный шум с нулевым средним $\mathbf{M}[\xi_k] = 0$ и дисперсией σ^2 .

Результаты моделирования для $R=10$ и $\sigma=0, \sigma=0,1$ и $\sigma=1$ иллюстрируются рисунками 1 - 3, на которых приведены графики оценок смещения $s_m = k - \mathbf{M}[K_m]$, СКО случайной составляющей оценок $\sigma[K_m]$ и дисперсии $D_m = m \{ (K_m - k)^2 \}$ суммарной ошибки, полученные по ансамблю 600 дискретных зашумленных кривых. В аппроксимативном методе использовался полином второго порядка.

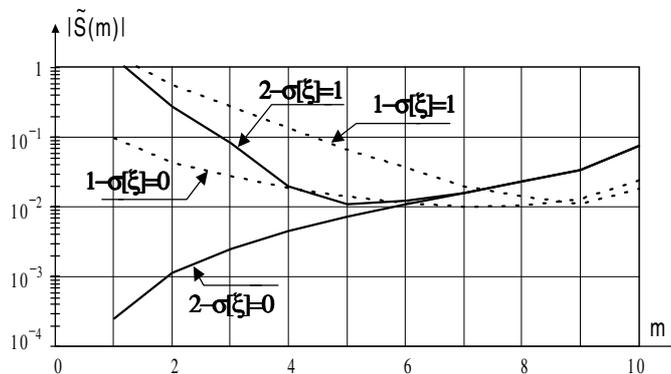


Рис.1 - Смещение оценок: 1 - метод геометрического сглаживания, 2 - аппроксимативный метод.

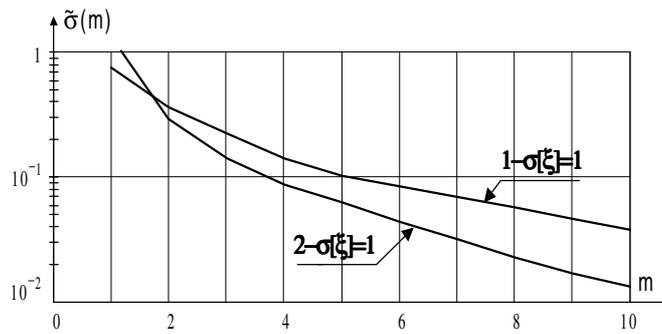


Рис.2 - Случайная ошибка: 1 - метод геометрического сглаживания, 2 - аппроксимативный метод.

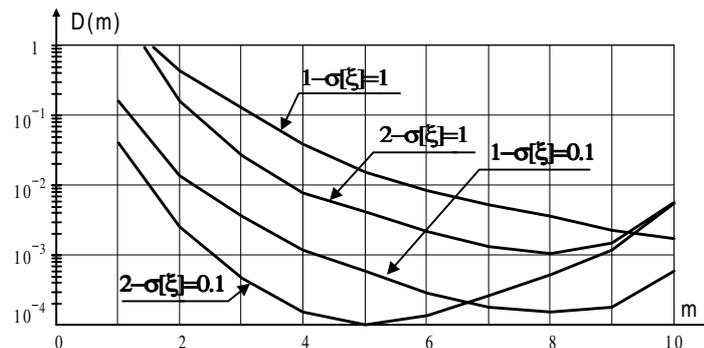


Рис.3 - Дисперсия суммарной ошибки: 1 - алгоритм геометрического сглаживания, 2 - аппроксимативный метод.

Анализ погрешностей оценок кривизны рассматриваемыми методами позволяет сделать следующие выводы:

(а) смещение оценок кривизны при малых $m < R$ зависит от уровня зашумления дискретной кривой; при отсутствии шумов смещение оценки кривизны аппроксимативного метода определяется погрешностью аппроксимации и оказывается значительно меньшим, чем у метода геометрического сглаживания;

(б) при малых значениях m метод геометрического сглаживания имеет большую систематическую, но меньшую случайную ошибки, чем аппроксимативный метод;

(с) при больших значениях $m > R$ метод геометрического сглаживания имеет меньшую систематическую, но большую случайную ошибки, чем аппроксимативный метод; смещение оценок аппроксимативного метода при $m > R$ может быть уменьшено увеличением степени аппроксимирующего полинома;

(д) при оптимальных значениях m (см. рис.3) аппроксимативный метод имеет меньшую дисперсию суммарной ошибки, чем метод геометрического сглаживания, и таким образом имеет преимущество с точки зрения обеспечения помехоустойчивости процедур выделения контрольных точек на зашумленных кривых.

Следует тем не менее отметить, что платой за указанные в п.(д) преимущества аппроксимативного метода является его большая вычислительная сложность и большее время, требуемое для вычислений.

Литература

1. Каркищенко А.Н., Лепский А.Е., Безуглов А.В., Об одном способе векторного и аналитического представления контура изображения/ Изв. ТРТУ. "Материалы Всерос. научно-техн. конф. "Интел. САПР-97", Таганрог: ТРТУ, 1998, №2(8), с.107-111.
2. Бачило С.А., Лепский А.Е., Рыбаков О.С., Оптимальный выбор параметров в задаче оценивания кривизны контура в одной вероятностной модели зашумления изображения/ VI Международная научно-техническая конференция "Радиолокация, навигация, связь", Т.2. Воронеж, 2000, с. 859-863.
3. Турчак Л.И., Основы численных методов, М.: Наука, 1987.

THE ANALYSIS OF TWO METHODS FOR ESTIMATION OF DISCRETE NOISY CURVE'S CURVATURE

Bachilo S.A., Lepskiy A.Y., Rybakov O.S.

Scientific Design Bureau of Computer Systems
 Taganrog State University of Radio Engineering
 SDB CS, Shevchenko str., ГСП - 25 Taganrog, 347900
 tel. (863-44) 6-04-38; fax (863-44) 6-34-32; E-mail: root@nkbvs.tn; teletype: УРАИ

Abstract. In this paper two methods for curvature estimation of a noisy discrete curve are presented. The first method is called the method of geometrical smoothing. It is based on the computation of a domain's crossing measure limited by the considered contour with some geometrical primitives such as circle, square etc. The second method is called approximative. It is based on derivatives' estimations using the curve's approximation by the polynomial of the second order. The paper gives the error estimate results of these methods and the choice of the parameters' optimal values.

1 Introduction. The recognition of the objects' planar two-dimensional shape at the image is realized by comparison of the object's external contour with the prototype's one. The problem appears to extract a small number of control pixels with the highest value of curvature.

If the curve is presented as a function $y = y(x)$, the curvature estimation can be expressed as $k = \left| y'' / (1 + y'^2)^{3/2} \right|$. As a curvature is a differential characteristic, it has low noise stability. Consequently it is estimated indirectly.

In this paper two methods of curvature estimation suitable for noisy curve processing are described. The first one called the method of geometrical smoothing was proposed in the work [1]. The second, approximative method is described below. With the help of these methods we can find the curvature's estimations k_m^g and k_m^a correspondingly.

Without restriction of generality we assume that the curve passes through and the curvature is estimated at the origin of coordinates. Let the function k_m be m -evaluation of the curvature which satisfies the condition $\lim_{m \rightarrow +0} k_m = k$, where $m > 0$. As a rule the parameter $m > 0$ determines the degree of smoothness of the curvature's function. If the contour undergoes the probable noise the curvature's estimation k_m will be the random variable K_m with a bias (systematic error) $s_m = k - \mathbf{M}[K_m]$ and mean-square deviation (random error) $\sigma[K_m]$.

In the given paper the statistical investigation of functional dependence of the mean-square error $D_m = s_m^2 + \sigma^2[K_m]$ for the approximative and geometrical methods is carried out. It also describes the estimated optimal value of m_0 , where the minimum of the function $R_m^{(1)} = |s_m| + \sigma[K_m]$ for the geometrical smoothing method is achieved.

2 The Method of Geometrical Smoothing[1, 2]. Let the curvature of the planer closed curve γ , which passes through the coordinate origin and Q_m (where m - is neighborhood of coordinate origin and $m \in N$) be estimated in metric ρ . The m -curve's weight is formulated as follows: $v_m = |S_m - \bar{S}_m| / \max(S_m, \bar{S}_m)$ where S_m and \bar{S}_m are figures' squares limited by the neighborhood boundary Q_m and by the curve γ . In the work [3] the following conclusions were made: a) in metric $\rho_\infty(s, k) = \max\{|s|, |k|\}$ the asymptotic formula $k = 3v_m/m + O(m)$ where $m \rightarrow 0$ takes place; b) in Euclidean metric the asymptotic formula $k = 3\pi v_m / (4m) + O(m)$ where $m \rightarrow 0$ takes place. Consequently m -evaluation of the curvature in the geometrical smoothing method is $k_m^g = 3v_m/m$, where v_m is calculated in metric $Q_m = [-m, m] \times [-m, m]$.

3 The approximative method. In this method the input discrete curve in coordinate origin m -neighborhood is approximated by the analytical function. The function's parameters can be evaluated by method of least squares. The circle $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ with parameters a, b, r or a polynomial of the second order $y = c_0 + c_1x + 0.5c_2x^2$ can be easily used as an approximative function.

The usage of this polynomial for the approximation is equivalent to the smoothing procedure [3] of digital curve $y_k, k = -m, \dots, m$ in coordinate origin neighborhood to regularize the procedure of numerical differentiation. The estimations of the first and the second derivatives of the digital curve in coordinate origin are the coefficients c_1, c_2 , and the approximative m -evaluation of the curvature is given by $k_m^a = \left| c_2 / (1 + c_1^2)^{3/2} \right|$. Now when we know

the curvature estimation we can find the parameters of the circle's function $r_m = 1/k_m^a$, $a^* = \mp c_1 r_m / \sqrt{1+c_1^2}$, $b^* = \pm r_m / \sqrt{1+c_1^2}$.

4 The comparison of the two methods. The characteristics of curvature estimation are analysed by means of their statistical modelling. As an input discrete curve the semicircle $y_k = \sqrt{R^2 - (k-a)^2} - b$ where $(k = -m, \dots, m)$, radius $R = 10$, and $b = -10, a = 0$ is used. Let this curve be exposed to one-dimensional noise. As a result we get random function $Y_k = y_k + \xi_k$ ($k = -m, \dots, m$), where ξ_k is Gaussian uncorellated noise with $\mathbf{M}[\xi_k] = 0$ and $\sigma[\xi_k] = 1$.

The analysis of the curvature error estimate by means of the proposed methods allows to make the following conclusions:

- (a) The shift of curvature evaluation at low $m < R$ depends on the level of discrete curve's noisiness. With lack of noise the shift of the curvature estimation got by approximative method is defined by error of approximation; and its value is much lower then by method of geometrical smoothing.
- (b) At low m - values the method of geometrical smoothing has a higher shift but a lower random error than the approximative method;
- (c) At high $m > R$ values the method of geometrical smoothing has a lower bias but a higher random error then the approximative method; the bias of estimator got by the approximative method at $m > R$ can be decreased while adding the degree of approximative polynomial;
- (d) At optimal m - values the approximative method has a lower mean-square error than the method of geometrical smoothing and thus, it is more preferable while extracting the control pixels on noisy curves.

References

1. Каркищенко А.Н., Лепский А.Е., Безуглов А.В., Об одном способе векторного и аналитического представления контура изображения/ Изв. ТРТУ. "Материалы Всерос. научно-техн. конф. "Интел. САПР-97", Таганрог: ТРТУ, 1998, №2(8), с.107-111.
2. Бачило С.А., Лепский А.Е., Рыбаков О.С., Оптимальный выбор параметров в задаче оценивания кривизны контура в одной вероятностной модели зашумления изображения/ VI Международная научно-техническая конференция "Радиолокация, навигация, связь", Т.2. Воронеж, 2000, с. 859-863.
3. Турчак Л.И., Основы численных методов, М.: Наука, 1987.