

# ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО СИГНАЛА НА ОСНОВЕ КУМУЛЯНТОВ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Латышев В.В.

Московский государственный авиационный институт (технический университет)  
125871, Москва, ГСП, Волоколамское шоссе, 4, [lvv@mai.ru](mailto:lvv@mai.ru)

**Реферат.** Рассматривается оценка частот и амплитуд составляющих полигармонического сигнала на основе смешанных кумулянтов 4-го порядка. Наблюдаемые данные моделируются в виде выходного сигнала авторегрессионной модели, искаженного гауссовским шумом с неизвестной корреляционной матрицей. Частоты синусоид определяются через полюсы модели из уравнения, связывающего подматрицы кумулянтной матрицы. Для расчета полюсов предложены два алгоритма, сочетающие теорию матричных пучков с сингулярным разложением. Точность оценки частот оказывается близкой к теоретической границе Крамера-Рао.

Рассматривается оценка параметров гармонических сигналов, наблюдаемых в шуме. Эта проблема типична для радиолокационных задач, при обработке акустических сигналов, в геофизике. Большинство известных решений [1-3] опирается на предположение о гауссовском шуме и использует статистики второго порядка. В случае белого шума или известной корреляционной функции это оправдано, однако, если корреляционные свойства шума неизвестны, они должны оцениваться и это сильно усложняет алгоритм [4]. Для получения алгоритма оценивания, инвариантного к корреляционным свойствам шумов, в [5] предлагается использовать кумулянты 4-го порядка. Однако имеющееся там решение может привести к неустойчивому алгоритму, особенно в случае слабого шума. В [6] показано, что хорошей основой для получения устойчивых к воздействиям шумов алгоритмов оценивания является использование теории матричных пучков. В докладе предлагается объединить обе эти идеи.

Пусть сигнал состоит из суммы синусоид с произвольными фиксированными частотами, фазами и амплитудами:

$$s(t) = \sum_{i=1}^r A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i),$$

причем  $0 < \omega_i < \pi$  и  $\omega_i \neq \omega_j$  при  $i \neq j$ .

Наблюдению доступна аддитивная смесь этого сигнала с гауссовским шумом  $x(t)$  с нулевым средним и неизвестными корреляционными свойствами:  $y(t) = s(t) + x(t)$ . Будем полагать, что шум формируется линейным инвариантным во времени фильтром, возбуждаемым в свою очередь белым гауссовским шумом. По конечной дискретной выборке этой смеси необходимо определить частоты и амплитуды синусоид.

Для решения этой задачи используется авторегрессионная модель полезного сигнала:

$$\sum_{i=0}^p a_i s_{k-i} = 0,$$

где  $p=2r$  и  $a_0 = 1$ . Полюсы такой модели комплексно-сопряженными парами располагаются на единичной окружности под углом, однозначно связанным с частотами синусоид. В случае детерминированного сигнала она возбуждается дельта-функцией. Для получения оценок частот, инвариантных к корреляционным свойствам шума, используются так называемые смешанные кумулянты 4-го порядка  $C_4(\tau)$  [5], которые получаются из выборочных оценок моментов 4-го порядка:

$$C_4(\tau) = m_4(\tau) - 3m_2(0)m_2(\tau),$$
$$m_2(\tau) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M y_k y_{k+\tau}, \quad m_4(\tau) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M y_k^3 y_{k+\tau}.$$

Как показано в [5], такое определение применимо в случае, когда наблюдения содержат детерминированные компоненты.

Сформируем матрицу ( $p < L < N$ ):

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_4(1) & C_4(2) & \dots & C_4(N) \\ C_4(2) & C_4(3) & \dots & C_4(N+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_4(L) & C_4(L+1) & \dots & C_4(L+N-1) \end{pmatrix}.$$

Выделим подматрицу  $\mathbf{C}^{(1)}$ , получаемую из первых  $N-1$  столбцов  $\mathbf{C}$ , и  $\mathbf{C}^{(2)}$  - из последних  $N-1$ . В [7], показано, что подматрицы  $\mathbf{C}^{(1)}$ ,  $\mathbf{C}^{(2)}$  при  $M \rightarrow \infty$  и в отсутствии шума можно соответствующим образом факторизовать, чтобы получить матричный пучок вида

$$\mathbf{C}^{(1)} - \lambda \mathbf{C}^{(2)} = \mathbf{B}(\mathbf{Z} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{A},$$

где  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  - матрицы, элементы которых образованы степенями и произведениями отсчетов полезного сигнала,  $\mathbf{Z} - p \times p$  - диагональная матрица, на главной диагонали которой расположены комплексные числа, равные полюсам модели сигнала. Известно [8], что в более общей постановке полюсы модели являются собственными величинами матрицы  $\mathbf{F}$ , удовлетворяющей уравнению

$$\mathbf{F}\mathbf{C}^{(1)} = \mathbf{C}^{(2)}.$$

Тогда  $\mathbf{F}$  (как и  $\mathbf{C}^{(1)}, \mathbf{C}^{(2)}$ ) имеет ранг  $p$  и решение находится как  $p$  ненулевых собственных величин матрицы  $\mathbf{F} = \mathbf{C}^{(2)}\mathbf{C}^{(1)+}$ , где  $\mathbf{C}^{(1)+}$  - обобщенная обратная матрица.

В присутствии шума и при конечной величине  $M$  обе матрицы характеризуются полным рангом  $L$ . При этом, во-первых, появляется проблема отбора собственных величин, оценивающих истинные параметры модели. Во-вторых, пространства, порожденные столбцами и строками матрицы  $\mathbf{C}^{(1)}$ , уже не совпадают с аналогичными пространствами  $\mathbf{C}^{(2)}$ . Это может привести к статистической неустойчивости при вычислении обобщенной обратной матрицы – задача переходит в разряд некорректных.

Во избежание этого необходимо заменить  $\mathbf{C}^{(1)}, \mathbf{C}^{(2)}$  их  $p$ -ранговыми аппроксимациями и согласовать пространства, порожденные строками и столбцами. Используя для согласования пространств и нахождения матрицы  $\mathbf{F}$  метод наименьших квадратов [8], получим следующий алгоритм оценки полюсов модели.

Осуществляется сингулярное разложение матрицы  $\mathbf{C}^{(1)}$

$$\mathbf{C}^{(1)} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^*$$

и находится ее  $p$ -ранговая аппроксимация  $\hat{\mathbf{C}}^{(1)} = \mathbf{U}\hat{\mathbf{\Sigma}}\hat{\mathbf{V}}^*$ , где  $\hat{\mathbf{U}}$  и  $\hat{\mathbf{V}}$  матрицы, содержащие в качестве столбцов левые и правые сингулярные ортонормированные векторы, соответствующие  $p$  наибольшим сингулярным числам, содержащимся в диагональной матрице  $\hat{\mathbf{\Sigma}}$ . Матрица  $\hat{\mathbf{V}}$  получается транспонированием  $\hat{\mathbf{V}}$  и заменой всех элементов комплексно-сопряженными величинами.

Находятся собственные значения матрицы  $\mathbf{F} = \mathbf{U}\hat{\mathbf{C}}^{(2)}\hat{\mathbf{V}}\hat{\mathbf{\Sigma}}^{-1}$ , которые являются полюсами  $z_i$  модели полезного сигнала. Частоты синусоид обычным образом определяются по расположению полюсов через их углы  $\omega_i = \arg(z_i)$ .

Для нахождения амплитуд синусоид составляют и решают систему уравнений

$$\begin{pmatrix} C_4(1) \\ C_4(2) \\ \dots \\ C_4(L) \end{pmatrix} = -\left(\frac{3}{8}\right) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega_1) & \cos(\omega_2) & \dots & \cos(\omega_k) \\ \cos(2\omega_1) & \cos(2\omega_2) & \dots & \cos(2\omega_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos(L\omega_1) & \cos(L\omega_2) & \dots & \cos(L\omega_k) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1^4 \\ A_2^4 \\ \dots \\ A_k^4 \end{pmatrix}.$$

Если число уравнений выбрать больше  $p$ , получается переопределенная система уравнений, решение которой методом наименьших квадратов дает оценки четвертых степеней амплитуд.

Заметим, что использование метода наименьших квадратов при согласовании пространств, порожденных столбцами и строками матриц  $\mathbf{C}^{(1)}, \mathbf{C}^{(2)}$ , фактически означает, что последняя предполагается искаженным вариантом преобразования матрицы  $\mathbf{C}^{(1)}$ . Если же обе матрицы рассматривать как искаженные шумом, для согласования пространств можно использовать полный метод наименьших квадратов [8]. Тогда получается несколько иной алгоритм оценки полюсов модели.

Осуществляется сингулярное разложение матрицы  $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^*$$

и находится ее  $p$ -ранговая аппроксимация  $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{U}\hat{\mathbf{\Sigma}}\hat{\mathbf{V}}^*$ , где  $\hat{\mathbf{U}}$  и  $\hat{\mathbf{V}}$  содержат левые и правые сингулярные ортонормированные векторы, соответствующие  $p$  наибольшим сингулярным числам, сохраненным в диагональной матрице  $\hat{\mathbf{\Sigma}}$ . Теперь  $\hat{\mathbf{U}}$  является базисом общего пространства, порожденного всеми столбцами  $\mathbf{C}^{(1)}$  и  $\mathbf{C}^{(2)}$ .

2. С помощью проектора  $\mathbf{P} = \hat{\mathbf{U}}\hat{\mathbf{U}}^*$  осуществляется проектирование столбцов обеих матриц на это пространство

$$\hat{C}_1^{(1)} = PC^{(1)} = \hat{U} \hat{\Sigma} \hat{V}_1^*$$

$$\hat{C}_1^{(2)} = PC^{(2)} = \hat{U} \hat{\Sigma} \hat{V}_2^*$$

где  $\hat{V}_1^*$ ,  $\hat{V}_2^*$  - представляют собой матрицы, состоящие соответственно из первых и последних N-1 столбцов  $\hat{V}$ .

3. Для  $\hat{F} = \hat{C}^{(2)} \hat{C}^{(1)+}$  находят собственные значения. При этом строки  $\hat{C}^{(2)}$  неявно проектируются на пространство, порожденное строками  $\hat{C}^{(1)}$ . Если учесть представления обеих матриц из предыдущего шага, и тот факт, что от перестановки матричных сомножителей собственные значения не меняются, получаем, что в конечном итоге нужно находить собственные значения матрицы  $\hat{V}_2^* \hat{V}_1$ . Амплитуды синусоид находятся так же, как и в предыдущем алгоритме.

Иллюстрация возможностей кумулянтного анализа продемонстрирована на рис.1, относящемся к оценке частоты в условиях искажений полезного сигнала белым гауссовским шумом.

По вертикали отложена дисперсия ошибки оценки частоты, по горизонтали – отношение сигнал/шум. Для сравнения эффективности использования различных статистик на этом рисунке точками показаны результаты моделирования работы двух алгоритмов, один из которых использует статистики второго порядка, а другой – четвертого. Выбранные алгоритмы объединяет то, что оба основаны на сингулярном разложении матриц, составленных из указанных статистик. В качестве первого выбран один из наиболее эффективных алгоритмов оценки частоты – алгоритм Кэдзоу [3]. Второй – предложенный выше на основе полного метода наименьших квадратов. Сплошная линия характеризует потенциальную границу Крамера-Рао. Видно, что оба сравниваемых алгоритма позволяют приблизиться к потенциальной границе, хотя известно, что статистики второго порядка в условиях моделирования обеспечивают оптимальную оценку. Однако кумулянтный подход лишь слегка проигрывает в точности. Как показал эксперимент, в случае коррелированного шума без дополнительной оценки корреляционной матрицы статистики второго порядка обеспечивают худшие результаты.

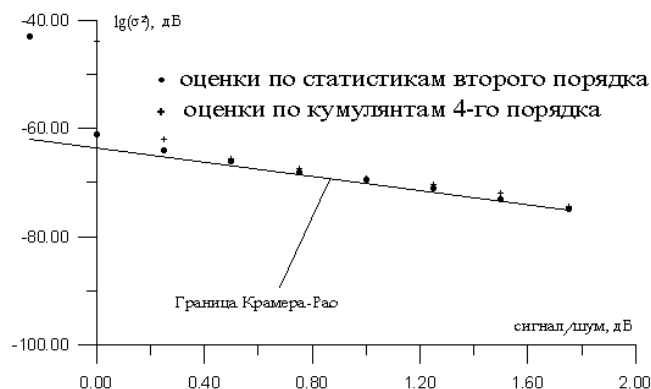


Рис.1. Точность оценки частоты в зависимости от отношения сигнал/шум

В качестве примера применения рассмотренного подхода к оценке параметров полигармонического сигнала на рис.2 показаны результаты обработки тестовых радиолокационных сигналов. В координатах время-частота изображены спектры мощности выходного сигнала доплеровского радиолокатора, в поле зрения которого находится летательный аппарат. По ближней горизонтальной оси отложены номера дискретных частотных отсчетов. Весь диапазон нормированных значений частоты от 0 до  $\pi$  разбит на 32 интервала. Вдоль второй горизонтальной оси отложено дискретное время. Спектральные выбросы обусловлены модуляцией падающего излучения вращающимися и вибрирующими элементами конструкции самолета. Рисунок 2а построен с помощью статистик четвертого порядка, рис 2б – с помощью дискретного преобразования Фурье. Из сравнения видно, что в первом случае наблюдается более высокое разрешение, характерное для параметрических спектральных оценок, и лучшая фильтрация шумов. Можно предположить, что при решении различных прикладных задач, например, распознавания летательных аппаратов по отраженным радиолокационным сигналам, эти преимущества имеют немаловажное значение.

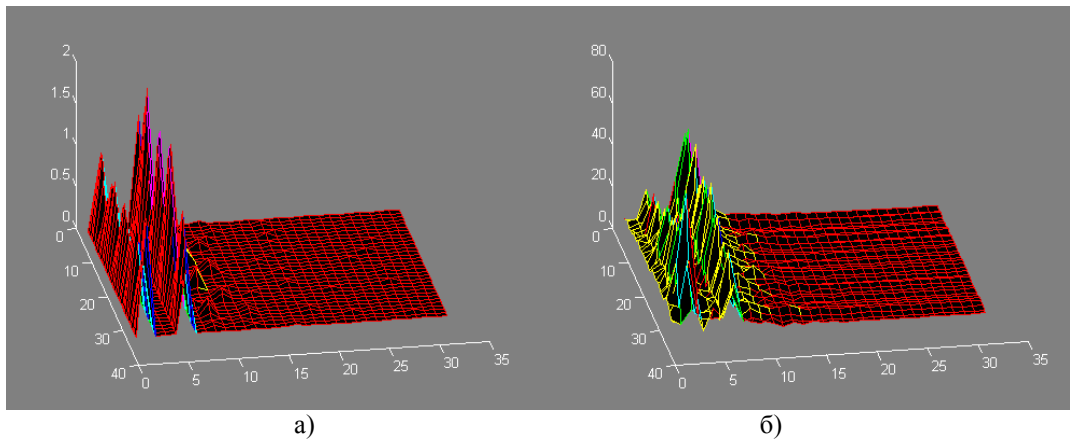


Рис.2. Спектральные портреты тестовых радиолокационных сигналов

Библиография

1. С.Л. Марпл-мл. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990.
2. V.F. Pisarenko. The retrieval of harmonics from a covariance function. Geophys. J. Roy.Astronom. Soc., vol. 33, 1973, pp. 347-366.
3. J.A. Cadzow. Spectral estimation: An overdetermined rational model equation approach. Proceedings of the IEEE, vol. 70, Sept., 1982, pp. 907-939.
4. P.Stoica et al. Maximum likelihood estimation of the parameters of multiple sinusoids from noisy measurements. IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing, vol. 37, Mar. 1989, pp. 378-392.
5. M.M. Anderson, G. B. Giannakis, A. Swami. Harmonic Retrieval Using Higher Order Statistics: A Deterministic Formulation. IEEE Trans. Signal Processing, vol. 43, No. 8, 1995, pp. 1880-1889.
6. Y.Hua, T.K. Sarkar. Matrix pencil method for estimating parameters of exponentially damped/undamped sinusoids in noise. IEEE Transactions on acoustics, speech and signal processing, vol.38, N5, May, 1990, pp. 814-824.
7. В.В. Латышев. Распознавание сигналов на основе статистик высоких порядков в условиях параметрической неопределенности. Диссертация на соискание ученой степени д.т.н. М., МАИ, 1999.
8. A.J. van der Veen, E. F. Deprettere, A. L. Swindlehurst. Subspace-based signal analysis using signal value decomposition. Proceedings of the IEEE, vol. 81, Sept., 1993, pp. 11277-11308.



**HARMONIC RETRIEVAL USING FOURTH-ORDER CUMULANT**

Latysh V.V.

Moscow state aviation institute (technical university)  
125871, Russia Moscow, Volokolamskoe shosse, 4, [lvv@mai.ru](mailto:lvv@mai.ru)

Abstract. Given a single record, we consider the problem of estimating the phase and amplitude of a harmonic signals buried in noise using forth-order mixed cumulants. The observed data are modeled as a self-driving AR-sequence plus additive Gaussian noise of unknown covariance. The number of sinusoids and pole locations are obtained using singular value decomposition and matrix pencil method.

We consider estimating the parameters of a harmonic signal observed in noise. The harmonic retrieval problem is common in signal processing and occurs in fields such as radar, sonar and geophysics.

Most of well known approaches for this problem are based on second-order statistics [1-4]. In order for these methods to be applicable to colored Gaussian noise, the covariance matrix must be known or estimated. To obtain insensitivity to the covariance matrix mixed fourth-order cumulants approach was proposed in [5]. But using an Yule-Walker “type” approach and finding the roots of the polynomials requires all poles to be inside (or outside) the unite circle so that extraneous poles can be separated from desired poles. Unlike the matrix-pencil method is less restrictive about the signal poles and more efficient in computation.

Let the noiseless signal  $s(t)$  is modeled as a sum of  $r$  sinusoids:

$$s(t) = \sum_{i=1}^r A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i),$$

where the amplitudes  $A_i$  and phases  $\varphi_i$  are unknown constants  $0 < \omega_i < \pi$  и  $\omega_i \neq \omega_j$  при  $i \neq j$ .

Due to the presence of noise, one observes a contaminated version of  $s(t)$ :  $y(t) = s(t) + x(t)$ . Here  $x(t)$  is assumed to be zero-mean additive Gaussian noise of unknown covariance. Given a single finite data record, the goal is to estimate the sinusoid frequencies.

For the signal  $s(t)$  there exist some AR coefficients  $a_i$ 's such that this sequence obeys the following relationship

$$\sum_{i=0}^p a_i s_{k-i} = 0,$$

where  $p=2r$  and  $a_0 = 1$ . The frequencies  $\omega_i$  can be obtained from the poles of this model, that occur in complex conjugate pairs.

To obtain frequency estimations that insensitive to the noise covariance matrix we use the forth-order mixed-cumulant of the noisy signal  $C_4(\tau)$ [5]:

$$C_4(\tau) = m_4(\tau) - 3m_2(0)m_2(\tau),$$

where

$$m_2(\tau) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M y_k y_{k+\tau}, \quad m_4(\tau) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M y_k^3 y_{k+\tau}.$$

With  $p < L < N$  the next matrix constructed on cumulants:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_4(1) & C_4(2) & \dots & C_4(N) \\ C_4(2) & C_4(3) & \dots & C_4(N+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_4(L) & C_4(L+1) & \dots & C_4(L+N-1) \end{pmatrix}.$$

Denote  $\mathbf{C}^{(1)}$  a matrix consisting of the first  $N-1$  columns of  $\mathbf{C}$ , and  $\mathbf{C}^{(2)}$  consisting of its last  $N-1$  columns.

On the base of decomposition of  $\mathbf{C}$  in [6] it has been shown that model poles can be obtain as the generalized eigenvalues of the matrix pair  $(\mathbf{C}^{(1)}, \mathbf{C}^{(2)})$  (the matrix pencil problem). As a mathematical instruments we choose to use an singular value decomposition (SVD) because it is known to perform well numerically. The number of sinusoids  $r$  ( $p$ ) can be estimated using a method suggested by Cadzow [3]. Putting this above ideas together, we have the following algorithm in least squares sense [7].

1. Estimate the fourth-order mixed-cumulant slice lags and determine the SVD of  $\mathbf{C}^{(1)}$ :

$$\mathbf{C}^{(1)} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^*$$

The rank- $p$  approximation  $\hat{\mathbf{C}}^{(1)} = \hat{\mathbf{U}}\hat{\mathbf{\Sigma}}\hat{\mathbf{V}}^*$ , where  $\hat{\mathbf{U}}$  and  $\hat{\mathbf{V}}$  contain the  $p$  singular vectors corresponding to the  $p$  largest singular values  $\hat{\Sigma}$  in  $\Sigma$ . The superscript  $*$  denotes complex conjugate transpose.

$$\hat{\mathbf{U}}^* \hat{\mathbf{C}}^{(2)} \hat{\mathbf{V}}^{-1}$$

1. Compute eigenvalues  $\hat{\mathbf{U}}^* \hat{\mathbf{C}}^{(2)} \hat{\mathbf{V}}^{-1}$  as the model poles  $z_i, i=1,2,\dots,p$ . Find the phase angles of the complex eigenvalues  $\omega_i = \arg(z_i)$ .

2. Form an overdetermined sistem of equations and obtain estimates for the amplitudes of sinusoids

$$\begin{pmatrix} C_4(1) \\ C_4(2) \\ \dots \\ C_4(L) \end{pmatrix} = -\left(\frac{3}{8}\right) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega_1) & \cos(\omega_2) & \dots & \cos(\omega_k) \\ \cos(2\omega_1) & \cos(2\omega_2) & \dots & \cos(2\omega_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos(L\omega_1) & \cos(L\omega_2) & \dots & \cos(L\omega_k) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1^4 \\ A_2^4 \\ \dots \\ A_k^4 \end{pmatrix}.$$

Algorithm in total least squares sense [8].

1. Compute the SVD of the full  $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^*$$

and rank- $p$  approximation  $\hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{U}}\hat{\mathbf{\Sigma}}\hat{\mathbf{V}}^*$ .

2. Project  $\mathbf{C}^{(1)}, \mathbf{C}^{(2)}$  onto column space using projector  $\mathbf{P} = \hat{\mathbf{U}}\hat{\mathbf{U}}^*$

$$\hat{C}_1^{(1)} = \hat{P}\hat{C}^{(1)} = \hat{U}\hat{\Sigma}\hat{V}_1^*$$

$$\hat{C}_1^{(2)} = \hat{P}\hat{C}^{(2)} = \hat{U}\hat{\Sigma}\hat{V}_2^*$$

where  $\hat{V}_1^*$ ,  $\hat{V}_2^*$  - consist of the first N-1 and last column matrix  $\hat{V}^*$  correspondingly.

3. Set  $\hat{F} = \hat{C}^{(2)} \hat{C}^{(1)+}$ . Then  $\hat{F} = \hat{V}_2^* \hat{V}_1^*$  and compute eigenvalues of  $\hat{V}_2^* \hat{V}_1^*$ .

4. Obtain amplitudes as in algorithm above.

#### References

1. S.L. Marpl, Jr. Digital spectral analysis with applications. Prentice-Hall, New Jersey, 1987.
2. S.M. Kay, S. T. Marple. Spectrum analysis – A modern perspective. Proceedings of the IEEE, vol. 69, Nov., 1981, pp. 1380-1418.
3. J.A. Cadzow. Spectral estimation: An overdetermined rational model equation approach. Proceedings of the IEEE, vol. 70, Sept., 1982, pp. 907-939.
4. P.Stoica et al. Maximum likelihood estimation of the parameters of multiple sinusoids from noisy measurements. IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing, vol. 37, Mar. 1989, pp. 378-392.
5. M.M. Anderson, G. B. Giannakis, A. Swami. Harmonic Retrieval Using Higher Order Statistics: A Deterministic Formulation. IEEE Trans. Signal Processing, vol. 43, No. 8, 1995, pp. 1880-1889.
6. Y.Hua, T.K. Sarkar. Matrix pencil method for estimating parameters of exponentially damped/undamped sinusoids in noise. IEEE Transactions on acoustics, speech and signal processing, vol.38, N5, May, 1990, pp. 814-824.
7. V.V. Latyshev. Signal recognition using higher order statistics. D. D. Dissertation, Moskow state aviation institute, 1999.
8. A.J. van der Veen, E.F. Deprettere, A.L. Swindlehurst. Subspace-based signal analysis using signal value decomposition. Proceedings of the IEEE, vol. 81, Sept., 1993, pp. 11277-11308.