

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУМЕРНЫХ РЕКУРСИВНЫХ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ДВУХУРОВНЕВЫМ КВАНТОВАНИЕМ*

Волков Д.Б., Приоров А.Л., Елагин А.А.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
150000, Россия, Ярославль, ул. Советская 14. Тел.: (0852) 32-11-94. E-mail: pri@cnit.uniyar.ac.ru

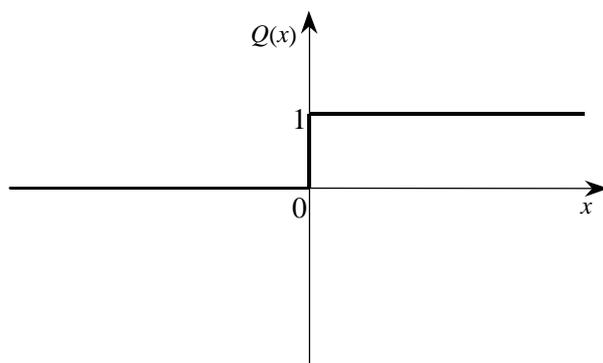
Реферат. Исследован двумерный рекурсивный цифровой фильтр первого порядка с двухуровневым квантованием. Проведен анализ динамики фильтра при вариации двух отличных от нуля начальных условий. Получены разбиения пространства параметров при различном выборе начальных условий. Найдены условия существования различных движений, таких как: диагональные, строчные и столбцовые предельные циклы, двумерный единичный импульс, линейный импульс, двумерный единичный скачок.

1. Введение

Алгоритм работы двумерного рекурсивного цифрового фильтра первого порядка с двухуровневым квантованием можно представить в виде разностного уравнения [1]

$$y(n, m) = Q(ay(n, m-1) + by(n-1, m) + cy(n-1, m-1)),$$

где $y(n, m)$ – сигнал на выходе фильтра, a, b, c – его коэффициенты, n, m – пространственные переменные, $Q(x)$ – нелинейность квантования (рис. 1).



$$Q(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Рис. 1. Вид нелинейности квантования

Считаем, что сигнал на входе системы отсутствует, при этом на выходе системы можно наблюдать большое количество разнообразных движений (диагональные, строчные и столбцовые предельные циклы [2-5], двумерный единичный импульс, линейный импульс, двумерный единичный скачок, сложные движения, имеющие секторный характер).

2. Ход исследования

Начальные условия выбираются шестью различными способами:

$$\text{I. } y(n, -1) = y(-1, m) = \begin{cases} 1, & n = m = 0, \\ 0, & n, m \neq 0, \end{cases} \quad \text{IV. } y(n, -1) = y(-1, m) = \begin{cases} 1, & n = m = -1, 0, \\ 0, & n, m \neq -1, 0, \end{cases}$$

$$\text{II. } y(-1, m) = \begin{cases} 1, & m = -1, 0, \\ 0, & m \neq -1, 0 \quad \forall n, \end{cases} \quad \text{V. } y(n, -1) = y(-1, m) = \begin{cases} 1, & n = m = 1, \\ 0, & n, m \neq 1, \end{cases}$$

$$\text{III. } y(n, -1) = \begin{cases} 1, & n = -1, 0, \\ 0, & n \neq -1, 0 \quad \forall m, \end{cases} \quad \text{VI. } y(n, -1) = y(-1, m) = \begin{cases} 1, & n = m = 2, \\ 0, & n, m \neq 2. \end{cases}$$

Случаи I, IV, V, VI представляют собой симметричное задание начальных условий, а случаи II и III – асимметричное. При каждом выборе начальных условий получено разбиение пространства параметров на зоны, в каждой из которых имеет место определённый вид движения. Рассмотрим первый случай выбора начальных условий (рис.2).

Пространство параметров будем представлять в виде двух плоскостей (a, b) при $c > 0$ и $c \leq 0$. В данном случае оно будет выглядеть следующим образом:

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-02-17939).

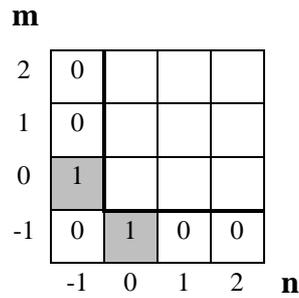


Рис. 2

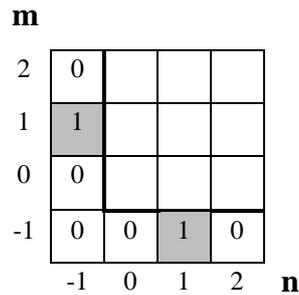


Рис. 3

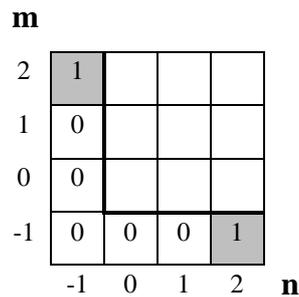


Рис. 4

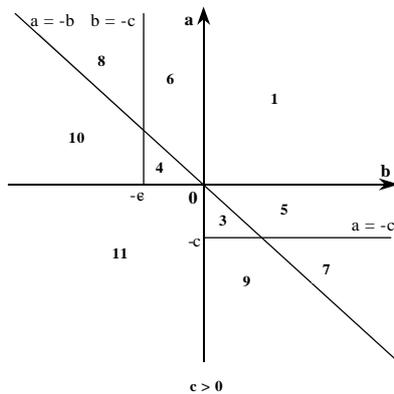


Рис. 5

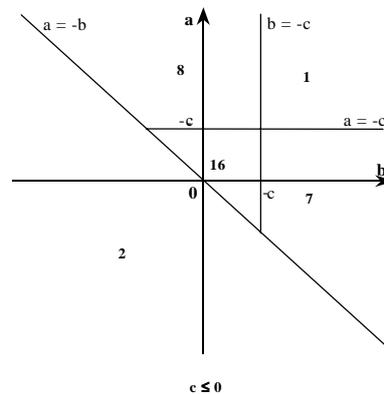


Рис. 6

В зоне 1 будет наблюдаться двумерная единичная ступенька, которую можно получить, если выбрать параметры фильтра так, что $a > 0$, $b > 0$, $a > -b$, $a > -b-c$, $a > -c$, $b > -c$. В зоне 11 - диагональный предельный цикл, а в зоне 2 - отсутствие сигнала. На рисунках 5 и 6 движения зон четвертого квадранта являются зеркальными отражениями движений зон второго квадранта. Такого рода симметрия характерна только для симметричного выбора начальных условий.

Далее, сместим начальные условия на один отсчёт в направлении осей n и m , как это показано на рис. 3. Получим разбиение пространства параметров, показанное на рис. 7 и 8.

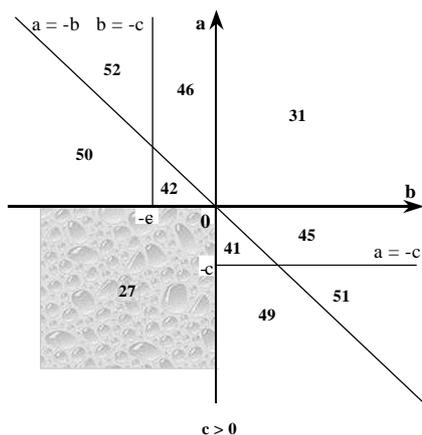


Рис. 7

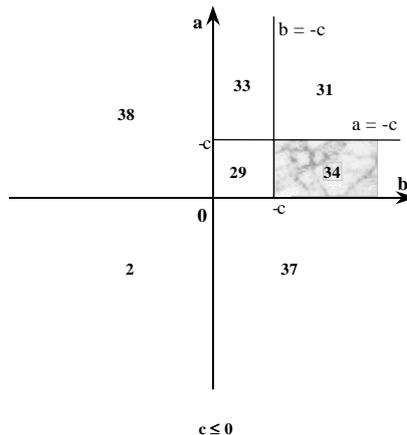


Рис. 8

Плоскость параметров при $c > 0$ осталась прежней, а при $c \leq 0$ изменилась, вместо пяти областей стало семь. Но несмотря на схожесть плоскостей параметров при $c > 0$, движения в границах каждой зоны различные.

Сместим начальные условия ещё на один отсчёт в направлении осей (рис. 4). Получим новое разбиение пространства параметров на зоны (рис. 9 и 10).

Плоскость параметров при $c > 0$ изменилась в сторону объединения зон первого и третьего квадрантов. Плоскость параметров при $c \leq 0$ по сравнению с предыдущим случаем осталась прежней. Движения в границах каждой зоны отличные от тех, что были раньше. Они как бы растянуты на два отсчёта в направлениях n и m по сравнению с первым случаем.

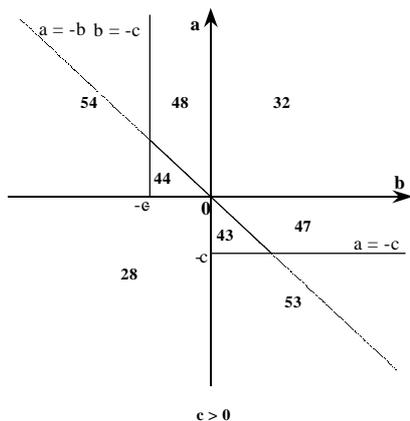


Рис. 9

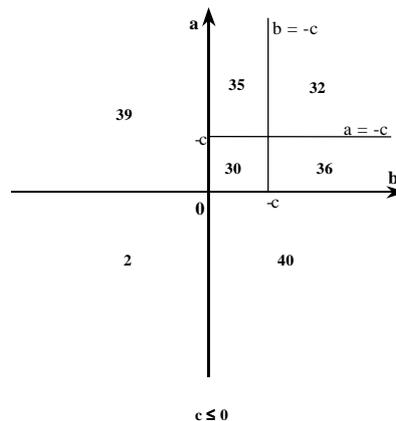


Рис. 10

Если и далее смещать начальные условия, то разбиение пространства параметров меняться не будет. Плоскости параметров при различных c будут такими же, как показано на рисунках 9 и 10. Происходит как бы насыщение зон. Движения, наблюдаемые на выходе системы, будут продолжать растягиваться в направлениях n и m . Это можно продемонстрировать, обратившись к рис. 11, 12 и 13. На рис. 11 (вид сверху) изображён диагональный предельный цикл (ДПЦ), соответствующий зоне 12 рис. 5 и выбору начальных условий I. Рис.12 (вид сверху) демонстрирует ДПЦ, существующий в зоне 27 рис. 7 и выбору начальных условий V. На рисунке 13 показан ДПЦ, который можно наблюдать в зоне 28 рис. 9 при выборе начальных условий VI. Видно, что область единичных значений раздвигается в направлениях n и m . Аналогичные изменения происходят и со всеми остальными сигналами.

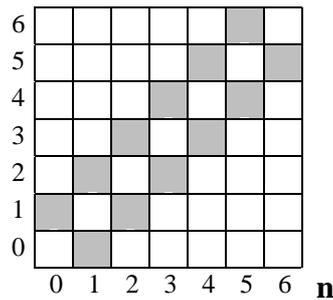


Рис.10

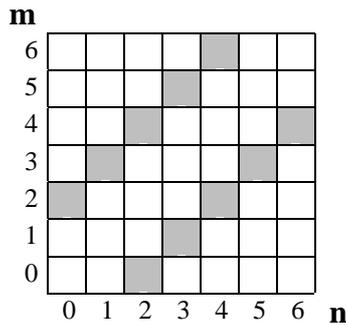


Рис.11

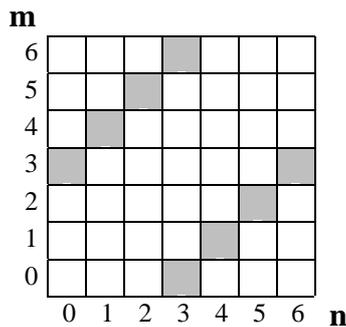


Рис.12

3. Заключение

В результате проведённых исследований получены разбиения пространств параметров на зоны, в каждой из которых может существовать определённый тип движения. Исследован случай двух и трёх, отличных от нуля начальных условий. Найдена зависимость выходного сигнала от смещения начальных условий в направлении осей n и m .

Полученные аналитические условия, накладываемые на параметры фильтра, могут помочь избежать зарождения паразитных колебаний в фильтре или рационально использовать их в тех или иных задачах.

Литература

1. Судаков А.А., Елагин А.А., Приоров А.Л. Эффекты квантования в двумерных цифровых рекурсивных фильтрах первого порядка // докл. 2-ой междунар. конф. и выставки «Цифровая обработка сигналов и ее применения» (DSPA'99), Москва, 1999. Т.3. С.622-627.
2. Приоров А.Л., Судаков А.А., Елагин А.А. Исследование эффектов переполнения в двумерных рекурсивных цифровых фильтрах первого порядка // докл. 2-ой междунар. конф. и выставки «Цифровая обработка сигналов и ее применения» (DSPA'99), Москва, 1999. Т.2. С.608-612.
3. Maria G.A., Fahmi M.M. Limit cycles oscillations in first- order two-dimensional digital filters// IEEE Trans. Ckts. and Syst., 1975. March. v. cas-22. p. 246-251.
4. Chang T. Limit cycles in two-dimensional first-order digital filter// IEEE. Trans. Ckts. and Syst., 1977. Jan. v. cas-24. p. 15-19.
5. El-Agizi N.G., Fahmy M.M. Sufficient conditions for the nonexistence of limit cycles in two-dimensional digital filters // IEEE Trans. Ckts. and Syst., 1979. June. v. cas-26. p.402-406.

RESEARCH OF TWO-DIMENSIONAL FIRST ORDER RECURSIVE DIGITAL FILTERS WITH TWO-LEVEL QUANTIZATION*

Volkov D.B., Priorov A.L., Elagin A.A.

Yaroslavl State University

150000, Russia, Yaroslavl, Sovetskaja, 14. Phone: (0852) 32-11-94. E-mail: pri@cmit.uniyar.ac.ru

Abstract. A two-dimensional first order recursive digital filter with two-level quantization is investigated. Analysis of dynamics of the filter is conducted by the variation of two nonzero initial conditions. The partition of space of parameters is obtained by various initial conditions. The conditions for existence of various motions such as diagonal, row and column limit cycles, two-dimensional unit impulse, linear impulses, two-dimensional unit step.

The two-dimensional first order recursive digital filter with two-level quantization can be represented by the difference equation [1]:

$$y(n, m) = Q(ay(n, m-1) + by(n-1, m) + cy(n-1, m-1)),$$

where $y(n, m)$ is a signal on the filter output; a, b, c are its coefficients; n, m are space variables; and $Q(x)$ is the nonlinearity of quantization. The signal on the filter input is assumed to be zero, and the nonlinearity of quantization is determined as follows:

$$Q(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Six different kinds of initial conditions are considered:

- | | | | |
|------|--|-----|---|
| I. | $y(n, -1) = y(-1, m) = \begin{cases} 1, & n = m = 0, \\ 0, & n = m \neq 0, \end{cases}$ | IV. | $y(n, -1) = y(-1, m) = \begin{cases} 1, & n = m = -1, 0, \\ 0, & n = m \neq -1, 0, \end{cases}$ |
| II. | $y(-1, m) = \begin{cases} 1, & m = -1, 0, \\ 0, & m \neq -1, 0 \quad \forall n, \end{cases}$ | V. | $y(n, -1) = y(-1, m) = \begin{cases} 1, & n = m = 1, \\ 0, & n = m \neq 1, \end{cases}$ |
| III. | $y(n, -1) = \begin{cases} 1, & n = -1, 0, \\ 0, & n \neq -1, 0 \quad \forall m, \end{cases}$ | VI. | $y(n, -1) = y(-1, m) = \begin{cases} 1, & n = m = 2, \\ 0, & n = m \neq 2. \end{cases}$ |

The cases I, IV, V, VI correspond to a symmetrical combination of initial conditions, and the cases II and III – to an asymmetric one. By each choice of initial conditions the partition of the parameter space on zones was obtained. Each zone has its definite kind of motion. The obtained analytical conditions superimposed on the filter parameters can help to avoid parasitic oscillations in the filter or to rationally use them in solving some problems.

Let us consider the first combination of initial conditions (case I). The space of parameters will be represented as two planes (a, b) by $c > 0$ and $c \leq 0$. In the given case it will look as shown on Fig 1 and 2.

In the zone 1a two-dimensional unit step will be observed, which can be received if $a > 0, b > 0, a > -b, a > -b - c, a > -c, b > -c$. In the zone 11 there is a diagonal limit cycle (DLC), and in the zone 2 there is the zero signal. The motions on Fig. 1 and 2 from the zones of the fourth quadrant are mirror reflections of the motions from the zones of the second quadrant. Such symmetry is characteristic only for a symmetrical choice of initial conditions.

Now let us move the initial conditions one pixel further along the axis n and m . The plane of parameters by $c > 0$ remains the same. The plane of parameters by $c \leq 0$ has changed. Instead of five zones there appeared seven. Although the planes of parameters are similar by $c > 0$ the motions inside of each zone differ.

Let us move the initial conditions one more pixel further along the axis n and m . So we obtain a new partition of the space of parameters (Fig. 1,2).

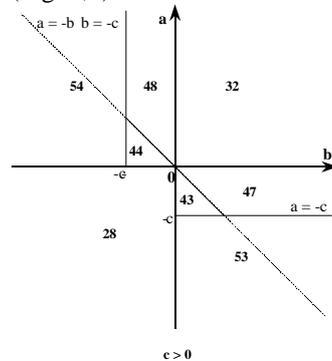


Fig. 1

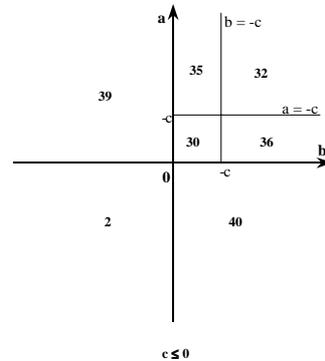
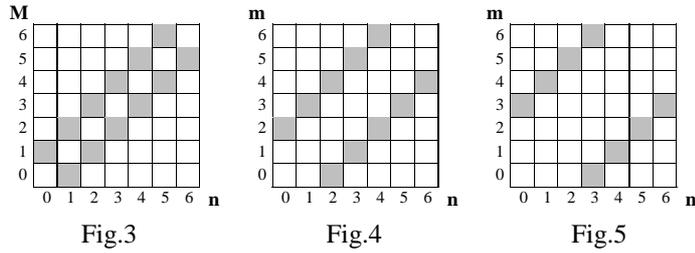


Fig. 2

* The work has been carried out with financial support of Russian Foundation of Fundamental Research (grant № 99-02-17939).

The plane of parameters by $c > 0$ has changed so that the zones of the first and third quadrants have joined. The plane of parameters by $c \leq 0$ has remained the same as compared with the previous case. Motions within the boundaries of each zone differ from the earlier ones. They are as though stretched on two samples in directions n and m as compared with the first case.



If we displace the initial conditions further, the partition of the space of parameters will not change. The planes of parameters will be the same by various c , as shown on Fig. 1 and 2. Motions observed on the system output will continue to be stretched in direction n and m . It can be shown by referring to Fig. 3, 4 and 5. On Fig. 3 a diagonal limit cycle (DLC) existing in the

third quadrant and by the choice of the initial conditions I is represented. Fig. 6 demonstrates a DLC existing in a similar zone by the choice of the initial conditions V. On Fig. 7 a DLC is shown, which can be observed in the zone 28 Fig. 1 by the choice of the initial conditions VI. It is visible that the area of unit values is moved apart in direction n and m . Similar modifications take also place for all the remaining signals.

As a result of the researches carried out the partitions of spaces of parameters on zones are obtained, in each of which there can be a definite type of motion. The case of two and three nonzero initial conditions is investigated. The dependence of the output signal from a displacement of the initial conditions in directions of space variables n and m is found.

As on the system output even by zero input signal it is possible to observe a great many of various signals, it is offered to use the above described system as a generator of two-dimensional signals.

Bibliography

1. Sudakov A.A., Elagin A.A., Priorov A.L. Quantization effects in 2-D first-order digital recursive filters // Proc. of 2nd Int. Conf. "Digital Signal Processing and Its Applications" (DSPA'99), Moscow, 1999. V.3, pp.628-629.
2. A.L. Priorov, A.A. Sudakov, A.A. Elagin Research of overflow effects in 2-D recursive first-order digital filters // Proc. of 2nd Int. Conf. "Digital Signal Processing and Its Applications" (DSPA'99), Moscow, 1999. V.3, pp.613-614.
3. El-Agizi N.G., Fahmy M.M. Sufficient conditions for the nonexistence of limit cycles in two-dimensional digital filters // IEEE Trans. Ckts. and Syst., 1979. June. v. cas-26. p.402-406.