

## АНАЛИЗ СИСТЕМ С НЕЭКВИДИСТАНТНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИЕЙ

Лесников В. А.

Вятский государственный университет, кафедра радиоэлектронных средств  
610000, г. Киров, ул. Московская, 36,  
тел. (833-2)-693295, факс (833-2)-626578, e-mail: [lesnlex@mail.ru](mailto:lesnlex@mail.ru)

**Реферат.** Рассмотрены вопросы анализа во временной области цифровых систем при неэквилидистантной периодической дискретизации. Доказана эквивалентность воздействия входного гармонического сигнала на систему воздействию при эквидистантной дискретизации суммы гармонических колебаний с амплитудами, фазами и частотами, определяемыми частотой рассматриваемого входного сигнала и законом неэквилидистантной дискретизации.

Большое многообразие алгоритмов и систем цифровой обработки сигналов не ограничивается применением дискретизации с равноотстоящими отсчетами. Достаточно широко применяются более сложные законы дискретизации [1-2]. В радиолокации в системах селекции движущихся целей для борьбы со «слепыми» скоростями применяется в частности вобуляция периода повторения зондирующих импульсов «от импульса к импульсу». Цифровая реализация этого вида обработки основана на периодической неэквилидистантной дискретизации. При этом последовательность отсчетов представляет собой периодически повторяющиеся группы из  $M$  отсчетов, каждый из которых смещен относительно своего положения при эквидистантной дискретизации на  $\epsilon_i T$ , где  $T$  – интервал эквидистантной дискретизации,  $\epsilon_i$  – относительное смещение отсчетов выборки,  $i$  – номер отсчета в группе.

К настоящему времени известны различные способы анализа систем с неэквилидистантной дискретизацией такого вида. Все эти способы либо ограничены рассмотрением частных случаев фильтров или законов неэквилидистантной дискретизации, либо сложны для практического применения. В [3] применен метод ключевой декомпозиции, основанный на представлении цифрового фильтра в виде линейной цифровой схемы с периодически изменяющейся структурой. В [4] описаны методы спектрального анализа рассматриваемых систем. В работах [3] и [5] допущены ошибки или неточности. В настоящей работе предлагается достаточно простое и физически наглядное распространение предложенного в [4] метода на анализ цифровых систем с периодической дискретизацией.

Предположим, что на входе аналого-цифрового преобразователя системы с неэквилидистантной дискретизацией действует гармонический сигнал

$$x(t) = \cos(2\pi f t), \quad (1)$$

где  $f$  – частота входного сигнала. Аналого-цифровой преобразователь формирует входную последовательность

$$x_k = \cos[2\pi f (k + \epsilon_{k \bmod M}) T], \quad (2)$$

где  $k \bmod M$  – остаток от деления  $k$  на  $M$ ;  $k = 0, 1, \dots$

На рис.1, а показан результат эквидистантной дискретизации гармонического сигнала с относительной частотой  $fT = 1$ . Естественно, что такой же результат будет получен при эквидистантной дискретизации сигнала с относительной частотой  $fT = 0$ . Для различения этих сигналов можно воспользоваться периодической неэквилидистантной дискретизацией. На рис. 1, б показан результат такой дискретизации при периоде  $M=4$  и параметрах дискретизации  $\epsilon_0 = 0$ ,  $\epsilon_1 = 0.125$ ,  $\epsilon_2 = -0.125$  и  $\epsilon_3 = 0.25$ .

Преобразуем выражение (2) следующим образом

$$x_k = \operatorname{Re}\{\exp[j2\pi f (k + \epsilon_{k \bmod M}) T]\} = \operatorname{Re}\{c_{k \bmod M} \exp[j2\pi f k T]\}, \quad (3)$$

где

$$c_{k \bmod M} = \exp(j2\pi \epsilon_{k \bmod M} f T). \quad (4)$$

Вводя обозначение

$$W = \exp(-j2\pi/M) \quad (5)$$

и используя свойство ортогональности [6]

$$\sum_{i=0}^{M-1} W^{ik} W^{in} = \begin{cases} M, & \text{при } (k+n) \bmod M = 0, \\ 0, & \text{при } (k+n) \bmod M \neq 0, \end{cases} \quad (6)$$

получаем, что

$$c_{k \bmod M} = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} c_{(M-1) \bmod M} \sum_{i=0}^{M-1} W^{ik} W^{in} . \quad (7)$$

Изменив порядок суммирования, получим выражение

$$c_{k \bmod M} = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{M-1} c_{(M-n) \bmod M} W^{ik} W^{in} = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} B_i W^{ik} = b_m , \quad (8)$$

где

$$B_i = \sum_{n=0}^{M-1} c_{(M-n) \bmod M} W^{in} = M r_i \exp(j\varphi_i) , \quad (9)$$

$$\{B_i | i = 0 \dots M-1\} = F^{-1} \{M c_{M-n} | n = 0, \dots M-1\} , \quad (10)$$

$$\{b_m | m = 0 \dots M-1\} = F^{-1} \{B_i | i = 0, \dots M-1\} \quad (11)$$

$n=0, \dots, M-1$ ;  $F^{-1}\{\cdot\}$  – символ обратного дискретного преобразования Фурье;  $r_i, \varphi_i$  – модуль и аргумент  $B_i/M$  соответственно.

Подставив (8) в (3), получим

$$x_k = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{i=0}^{M-1} r_i \exp(j\varphi_i) \exp\left(-j \frac{2\pi i k}{M}\right) \exp(j2\pi f T k) \right\} = \quad (12)$$

$$= \sum_{i=0}^{M-1} r_i \cos \left[ 2\pi \left( f T - \frac{i}{M} \right) k + \varphi_i \right] = \sum_{i=0}^{M-1} u_k^{[i]}$$

Таким образом, в соответствии с (12) при неэквидистантной дискретизации воздействие на цифровой фильтр последовательности  $x_k$  можно заменить воздействием  $M$  последовательностей  $u_k^{[i]}$ , получаемых при эквидистантной дискретизации суммы  $M$  гармонических сигналов, относительная частота  $fT - i/M$ , амплитуда  $r_i$  и начальная фаза  $\varphi_i$  которых определяется относительной частотой  $fT$  исходного сигнала и законом неэквидистантной периодической дискретизации  $\{\epsilon_i | i = 0 \dots M-1\}$ .

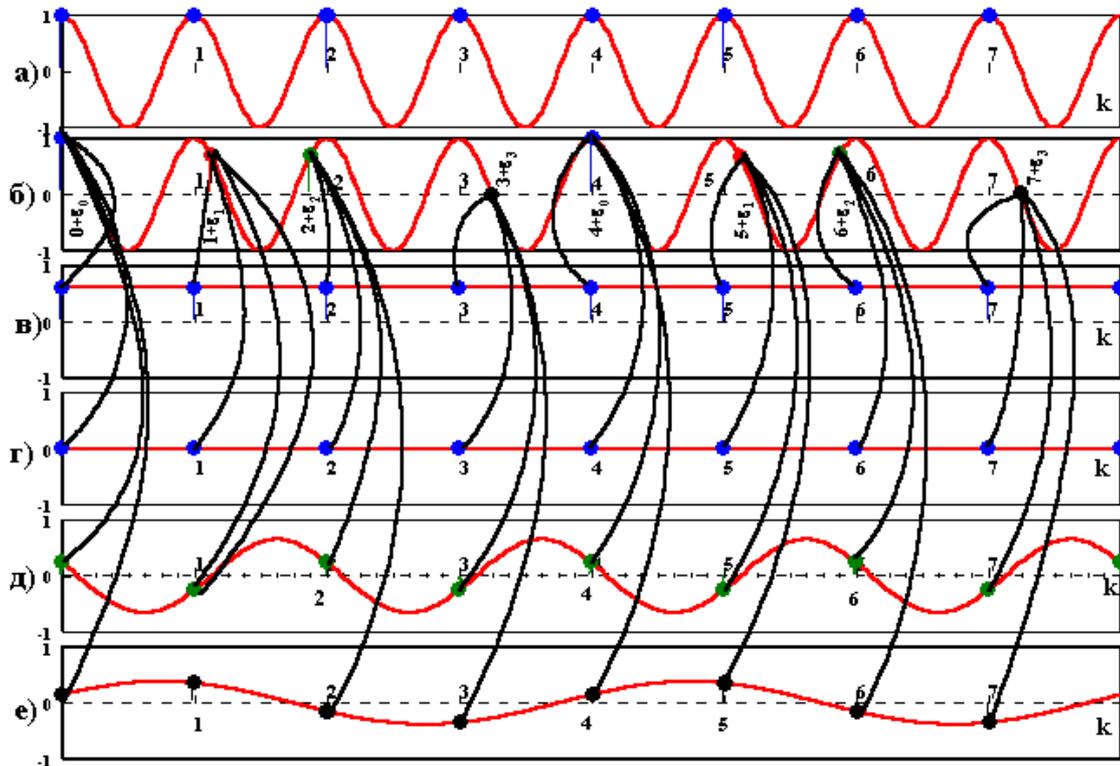


Рис. 1. Эквивалентное преобразование сигнала, подвергнутого периодической неэквидистантной дискретизации

Рис. 1 иллюстрирует возможность замены последовательности  $x_k$  (рис. 1, б) суммой последовательностей, полученных при эквидистантной дискретизации сигналов  $\left\{ u^{[i]}(t) = r_i \cos \left[ 2\pi \left( f - \frac{i}{MT} \right) t + \varphi_i \right] \mid i = 0, \dots, M-1 \right\}$ , где  $r_0=r_2=0.6532814824$ ,  $r_1=0$ ,  $r_3=0.3826834325$ ;  $\varphi_0=0.3927$ ,  $\varphi_1=\pi/2$ ,  $\varphi_2=-\varphi_3=1.178097$  (рис. 1, в – е).

Таким образом, предложенный подход позволяет эффективно использовать для анализа цифровых систем с неэквидистантной дискретизацией методы, разработанные для цифровых систем с постоянной частотой дискретизации.

#### БИБЛИОГРАФИЯ

- 1) Benedetto J.J., Ferreira P.J. S. G. Modern Sampling Theory: Mathematics and Applications. - Birkhauser Boston, Applied and Numerical Harmonic Analysis Series, 2000.
- 2) Sampling Theory in Fourier and Signal Analysis, Advanced Topics/ Ed. J. R. Higgins and R. L. Stens, Oxford University Press, 1999.
- 3) Thomas H.W., Lutte N.P. Z-transform analysis of nonuniformly sampled digital filters. – Proc. IEEE, 1972, v.119, №11, p. 1559-1567.
- 4) Wardrop B. The performance of MTI system when used with p.r.f. stagger. – Marconi Rev., 1974, v.37, №195, p. 217-232.
- 5) Лесников В.А., Разевиг В.Д. Анализ цифровых фильтров с неэквидистантной дискретизацией входного сигнала. – В сб. “Методы и устройства обработки сигналов в радиотехнических системах”. – М.: МИРЭА, 1983, с. 139 – 144.
- 6) Введение в цифровую фильтрацию/ Под ред. Р. Богнера и А. Константинодиса: Пер. с англ./ Под ред. Л.И. Филиппова. – М.; Мир, 1976. – с. 216.



Vyatka State University  
 36 Moscow str., Kirov 610000, Russia  
 Phone (+7-833-2) -693295, Fax (+7-833-2) -626578, E-mail: [lesnlex@mail.ru](mailto:lesnlex@mail.ru)

The discrete systems are studied, in which the sequence of samples represents in batches recurring groups of  $M$  of samples. Each sample in group is displaced from a position at a uniform discretization on value  $\epsilon_i T$ .  $T$  is a period of uniform sampling.  $\epsilon_i$  is a relative displacement of sample.

Let's suspect, that on an input of an analog-to-digital converter of a system with nonuniform discretization the harmonic signal

$$\mathbf{x}(t) = \cos(2\pi f t) \quad (1)$$

acts.  $f$  is a frequency of input signal. The analog-to-digital converter reshapes sequence of samples

$$\mathbf{x}_k = \cos[2\pi f (k + \epsilon_{k \bmod M}) T]. \quad (2)$$

$k \bmod M$  is remainder from division  $k$  on  $M$ .

Is demonstrated, that the samples  $\mathbf{x}_k$  can be presented by the way

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= \operatorname{Re} \left\{ \sum_{i=0}^{M-1} r_i \exp(j\varphi_i) \exp\left(-j \frac{2\pi i k}{M}\right) \exp(j2\pi f T k) \right\} = \\ &= \sum_{i=0}^{M-1} r_i \cos \left[ 2\pi \left( f T - \frac{i}{M} \right) k + \varphi_i \right] = \sum_{i=0}^{M-1} \mathbf{u}_k^{[i]} \end{aligned} \quad (3)$$

$r$  is a module, and  $w$  is argument of a complex function  $\mathbf{B}_i/M$  instituted formula

$$\frac{\mathbf{B}_i}{M} = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} c_{(M-n) \bmod M} W^{in} = r_i \exp(j\varphi_i), \quad (4)$$

$$\{\mathbf{B}_i | i = 0 \dots M-1\} = F^{-1} \{M c_{M-n} | n = 0, \dots M-1\}, \quad (5)$$

$$c_{k \bmod M} = \exp(j2\pi \epsilon_{k \bmod M} f T). \quad (6)$$

$F^{-1}\{\}$  is a symbol of an inverse discrete Fourier transform.

Thus, at a nonuniform discretization it is possible to exchange effect at a system of sequence  $\mathbf{x}_k$ , effect of the sum of  $M$  of sequences  $\mathbf{u}_k^{[i]}$ . These sequences form at an equidistant discretization of  $M$  harmonic signals, the relative frequency  $fT - i/M$ , amplitude  $r_i$  and a initial phase  $\varphi_i$ , which one is determined by relative frequency  $fT$  of an original signal and law of a nonuniform periodic discretization  $\{\epsilon_i | i = 0 \dots M-1\}$ .