

Известные работы [1,2] по применению методов линейной фильтрации для оценки состояний зашумленных случайных процессов не затрагивают класс дискретнозначных случайных последовательностей (цепей Маркова (ЦМ)). Нерешенность этой задачи сдерживается отсутствием общего математического аппарата синтеза уравнений состояния ЦМ, что, в свою очередь, затрудняет применение для них хорошо разработанных методов оптимальной фильтрации в ряде практически важных прикладных задач, таких как: планирование дискретного по состоянию ресурса ретранслятора в сетях спутниковой связи, управление потоком заявок на обслуживание и др.

Основными этапами решения задачи синтеза алгоритма фильтрации состояния ЦМ, наблюдаемой в шуме, являются разработка математической модели ЦМ на языке теории переменных состояния и последующая унификация на этот случай алгоритмов линейной фильтрации. В докладе предложены результаты решения второго этапа задачи, базирующиеся на введенном в работах [3,4,5] уравнении состояния ЦМ.

Следуя работе [3], запишем стохастическое разностное уравнение состояния цепи  $x(k)$  через вектор индикаторов состояний  $\bar{\theta}(k)$  в виде:

$$\bar{\theta}(k+1) = P_{ij}^T(k+1/k)\bar{\theta}(k) + \Delta\bar{\theta}(k+1) \quad (1)$$

где  $\theta_i(k)$  - индикатор  $i$ -го состояния ЦМ, принимающий значение единица для случая  $x(k) = i$  и нуль в остальных случаях;

$P_{ij}^T(k+1/k)$  - матрица переходных вероятностей;

$\Delta\bar{\theta}(k)$  - вектор последовательностей, представляющих ступенчатые мартингалы, компенсирующие дробные значения первого слагаемого в выражении (1).

Наряду с уравнением состояния (1) полная математическая модель случайного процесса обычно содержит уравнение наблюдения за его состоянием следующего вида:

$$\bar{z}(k) = H(k)\bar{x}(k) + \bar{w}(k) = H'(k)\bar{\theta}(k) + \bar{w}(k); \quad (2)$$

$$H'(k) = H(k)C^T,$$

где  $\bar{z}(k)$  - наблюдения за процессом  $\bar{x}(k)$ ;

$H(k)$  - матрица наблюдения, элементы которой определяют способ преобразования измерений в значения процесса  $\bar{x}(k)$ ;

$C^T$  - матрица состояний наблюдаемой векторной ЦМ;

$\bar{w}(k)$  - вектор непрерывнозначных гауссовских последовательностей (шумов наблюдения) со средним, равным нулю и ковариационной матрицей  $M\{\bar{w}(k)\bar{w}(s)\} = R(k)\delta(k-s)$ ;

На основе полученной для УЦМ модели и представления условий оценивания в виде уравнений состояния и наблюдения синтезирован фильтр Калмана, обеспечивающий оценку  $\hat{\theta}(k)$ , оптимальную по критерию минимума среднеквадратической ошибки оценивания (МСКО):

$$\min M \left\{ \left( \bar{x}(k) - \hat{\bar{x}}(k) \right)^2 / z(k) \right\} \quad (3)$$

Можно показать [3,5], что для случая принятой модели состояния и наблюдения (1,2) текущая оценка состояния процесса  $x(k)$  может быть найдена на основе рекуррентного алгоритма Калмана, обеспечивающего непосредственную оценку его стохастических индикаторов:

$$\hat{\theta}(k+1) = P(k+1/k)\hat{\theta}(k) + K(k+1)[\bar{z}(k+1) - H'(k+1)(P(k+1/k)\hat{\theta}(k))], \quad (4)$$

$$\hat{\theta}(0) = \bar{\theta}(0),$$

откуда непосредственно следует и оценка состояния объекта

$$\hat{\bar{x}}(k+1) = C^T \hat{\bar{\theta}}(k+1),$$

где  $K(k+1)$  - матрица коэффициентов усиления фильтра Калмана;

Отметим, что для линейной постановки задачи матрица коэффициентов не зависит от измеряемых сигналов, а поэтому может быть вычислена заранее в соответствии с выражением:

$$K(k+1) = P_2(k+1)H^T(k+1)R^{-1}(k+1), \quad (5)$$

где  $R(k+1)$  - ковариационная матрица шумов наблюдения;

$P_2(k+1)$  - ковариационная матрица (дисперсий) ошибок оценивания.

Несмещенность, состоятельность и эффективность процесса фильтрации на основе полученного алгоритма подтверждают результаты моделирования, с использованием прикладного пакета MatLab. В докладе приведены графики, показывающие зависимость скорости сходимости текущих оценок состояний дискретной последовательности к истинным значениям для различных соотношений сигнал/шум в канале наблюдения. Даны рекомендации по эффективному применению данного алгоритма фильтрации при решении ряда прикладных задач (обнаружения сигнала, оценки числа заявок пользователей на ресурс ретранслятора, оценки технического состояния средств связи и т.д.).

Рассмотренный алгоритм фильтрации состояний дискретных последовательностей, наблюдаемых в шумах, позволяет унифицировать данные алгоритмы фильтрации с алгоритмами оценки сопутствующих непрерывнозначных случайных процессов, а, следовательно, заменить традиционно используемые схемы различения гипотез в задачах оценки состояний зашумленных дискретнозначных случайных последовательностей.

#### Библиографический список

1. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценивания и модуляции. Том 1. Пер. с англ. – М.: Сов. Радио, 1972. – 744 с.
2. Сейдж Э., Мелса Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. Пер. с англ. под ред. Б.Р. Левина, М., Связь, 1976.
3. Segall A. Stochastic Process in Estimation Theory. ESL- P- 588, Electronic System Laboratory, M.I.T, January 1975.
4. Segall A. Optimal control of noise finite-state Markov process //IEEE. Trans. Automat. Contr. 1977. vol.22, № 2, p. 179-186.
5. Терентьев В.М., Паращук И.Б. Теоретические основы управления сетями многоканальной радиосвязи. С.-Пб.: ВАС, 1995, 150с.



**OPTIMAL FILTRATION ALGORITHMS OF DISCRETE PROCESS STATES OF MARKOV WITH NOISY OBSERVATIONS**

Terentyev V., Ilyukhin A.

Known researches on application of a linear filtration methods for an estimation of stochastic processes states do not affect the class of random Markov discrete sequences. Difficulties of this problem are added by absence of the general mathematical methods of states equations synthesis for Markov discrete process (MDP). The main steps of algorithm synthesis for a states filtration of a MDP observed in a noise are design of a mathematical model of a MDP with application of the theory of a variable states and subsequent unification of algorithms of a linear filtration.

In the report the mathematical model of MDP including the states equation and observation equation is shown.

On the basis of obtained for MDP model and representation of conditions of estimation as equations of a states and observation the Kalman filter ensuring an optimal estimation states indicators by criterion of a least mean square of estimation error is synthesized.

The given algorithm of a states filtration of Markov discrete process observed in noise allows to unify the filtration algorithms of discrete and continuous stochastic processes, therefore, to replace the traditionally used algorithms of distinguishing of hypotheses in problems of a states estimation of Markov discrete sequences.