МЕТОД МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОГО АНАЛИЗА В ПРИЛОЖЕНИИ К ОЦЕНИВАНИЮ ПАРАМЕТРОВ ШУМА В КАНАЛАХ ОБМЕНА ИНФОРМАЦИЕЙ

Баранов В.А., Терновой И.Л., Конышев М.Ю.

Академия ФАПСИ, г. Орел
E-mail: kaf32@vips.icn.gov.ru

В настоящее время для анализа каналов разработаны математические модели различных уровней сложности и степени адекватности реальным каналам. Модели, получившие наиболее широкое распространение, - это разновидности гауссова канала.

Под гауссовым каналом понимают математическую модель реального канала, построенную при следующих допущениях:

- основные физические параметры канала являются известными детерминированными величинами;
- полоса пропускания канала ограничена частотой F_k;
- в канале действует аддитивный гауссовский белый шум - аддитивная флюктуационная помеха ограниченной мощности с равномерным частотным спектром и нормальным распределением амплитуд.

Предполагается также, что по каналу передаются сигналы с постоянной средней мощностью, статистические связи между сигналами и шумом отсутствуют, ширина спектра сигнала и помехи ограничена полосой пропускания канала.

Данные допущения в реальных условиях зачастую не выполняются, что приводит к существенным искажениям передаваемых сигналов и в конечном итоге к потере информации. Это связано с традиционным подходом к анализу случайных процессов, базирующемуся на спектрально-корреляционной теории с фундаментальной теоремой Винера-Хинчина. Однако для полного статистического описания случайных процессов необходимо оценить моменты высших порядков с учетом многоточечных корреляций. Резкое возрастание сложности и объема вычислений при ухудшении их точности ставит под сомнение само описание случайных процессов их средними величинами.

Альтернативой статистическому описанию являются оценки фрактальных размерностей различных связанных с процессом геометрических объектов, которые имеют определенный физический смысл и относятся к перспективному направлению исследований в этой области. Фрактальное распределение во времени и пространстве могут иметь плотности распределения различных величин, графики сигналов, множества экстремумов случайных процессов, фазовые траектории динамических систем конечной размерности с хаотическим поведением и т.д [1].

В работе рассмотрен эффективный метод анализа фрактальных и мультифрактальных свойств шума в радиоканале на основе дискретного вейвлет-преобразования сигналов, теории случайных процессов, регрессионного анализа и преобразования Лежандра.

Огибающая сигнала характеризует закон изменения его амплитуды. Фаза сигнала описывается в угловой мере, причем считается, что в интервале между соседними точками перемены знака она изменяется непрерывно на величину, равную π. Интервалы времени, через которые происходит изменение фазы сигнала, представляют собой случайный процесс T_θ. Проведенный анализ показал наличие структурного сходства статистических характеристик данного процесса при измерении отрезков времени изменения фазы при различных масштабах изменения самой фазы θ, т.е. закон изменения фазы обладает самоподобными, или фрактальными, свойствами. Подобные свойства обнаружены в некоторых других явлениях, например, турбулентности и трафике сети передачи данных.

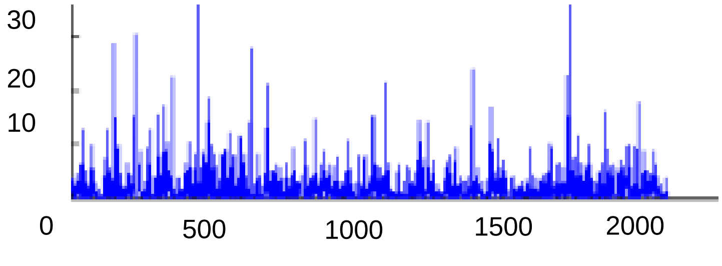

Рис. 1

На рисунке 1 представлен график интервалов смены фазы в зависимости от значения самой фазы, период изменения фазы составляет $\pi/2$.

Из рисунка 1 видно, что исследуемый процесс изменения интервалов времени смены фазы сигнала характеризуется высокой локальной сингулярностью: наличием пиков, гребней, всплесков. Чтобы количественно определить эти локальные вариации в исследуемом процессе при конкретном значении фазы θ_0, обозначим через $Y = (Y(\theta) : 0 \le \theta \le 1)$ процесс, представляющий общее время, в течение которого наблюдался сигнал до моменту, когда значение фазы составило θ (предполагается, что рассматриваются нормированные значения фазы),и для некоторых $n > 0$, представим интервалы времени T_θ, как $Y((k_n + 1)2^{-n})$ - $Y(k_n 2^{-n}); k_n = 0,1,...,2^n - 1$; то есть интервал времени смены фазы, в течение которого фаза изменяется в интервале $[k_n 2^{-n};(k_n + 1)2^{-n})$. Процесс изменения фазы имеет локальный масштабирующий экспонент $\alpha(\theta_0)$ для значения фазы θ_0, если интервал времени изменения фазы ведет себя как $(2^{-n})^{\alpha(\theta_0)}$, при $k_n 2^{-n} \to \theta_0 (n \to \infty)$. В дальнейшем будем называть процесс смены фазы с одним и тем же локальным масштабирующим экспонентом для всех значений фазы θ_0 *монофрактальным* (это включает точно самоподобный процесс, для которого $\alpha(\theta_0) = H$ для всех θ_0), в то время как процесс с непостоянным значением $\alpha(\theta_0)$, называется *мультифрактальным* [2].

Цель мультифрактального анализа состоит в том, чтобы получить информацию о сингулярных экспонентах в заданном сигнале и прийти к компактному описанию полной сингулярной структуры сигналов в геометрических или статистических терминах [3].

Разработанная методика оценки мультифрактальных свойств включает следующие основные этапы:

1. Определение ряда отсчетов интервалов времени смены фазы на одинаковую величину T_θ.
2. Выполнение дискретного вейвлет преобразования Хаара над рядом интервалов времени смены фазы и вычисление нормированных масштабируюших и вейвлет коэффициентов.
3. Расчет $S_n(q)$ для различных масштабов *n* и различных значений *q* в виде матрицы, строки которой соответствуют дискретным значениям *q* в порядке возрастания, а строки различным масштабам.
4. Определение функции разбиения $\tau(q)$, для чего для каждого значения *q* ищется зависимость $2^{-n \cdot \tau(q)} = S_n(q)$. Конкретные значения функции разбиения получаются на основе метода наименьших квадратов путем построения линейного уравнения регрессии $\log_2 S_j(q)$ на *j* (*j=1,…,n*), причем $j = n - \log_2(m)$, где *m* - уровень агрегирования, описанный выше.
5. Вычисление мультфрактального спектра $f(\alpha)$ на основе функции разбиения $\tau(q)$ с использованием преобразования Лежандра.

Литература

1. M. Arbeiter and N. Patzschke, “Self-similar random multifractals," Math. Nachr. 181, pp. 5-42, 1996.
2. A. Feldmann, A. C. Gilbert, and W. Willinger, “Data networks as cascades: Investigating the multifractal nature of Internet WAN traffic," Computer Communication Review 28, No. 4, Proc. ACM/Sigcomm'98, Vancouver, Canada, September 1998, pp. 42-55, 1998.
3. R. H. Riedi and B. B. Mandelbrot, “Exceptions to the multifractal formalism for discontinuous measures," Math. Proc. Cambr. Phil. Soc. 123, pp. 133-157, 1998.

THE METHOD OF MULTIFRACTAL ANALYSIS IN APPLICATION TO ESTIMATION OF NOISE PARAMETERS IN INFORMATION CHANGE CHANNELS

Baranov W., Ternowoj I., Konichev M.

Abstract. Recent studies have demonstrated that measured noise parameter such as time of phase change exhibits locally complex irregularities, consistent with multifractal behavior. Multifractal structures have been found in a wide variety of physical systems from turbulence and rain clouds, to data network traffic. Multifractals provide a mathematical framework for describing local singularities and identifying complex local structure. With time-dependent scaling lows, they are more flexible in describing locally irregular phenomena than monofractals, where the latter are governed by single scaling laws and “look the same across a wide range of scales.” Exactly self-similar processes a special cases of monofractals; their degree of local irregularity is the same across all scales and across all points in time and can be captured by a single parameter, the Hurst parameter.

In this paper, we develop a new approach to analyze fractal and multifractal noise properties in radio channel, based on discrete wavelet transform, stochastic processes theory, regression analysis and Legendre transform.

To investigate this new scaling phenomenon associated with the dynamics of measured parameter over small scales, we consider a class of multiplicative processes, the so-called conservative cascades. Multiplicative cascades generalize the self-similarity of fractional Brownian motion by offering greater flexibility and richer scaling properties.

We have noted two attractive properties of cascades: their increment processes are spiky and have non-Gaussian marginals. Surprisingly, these two properties are strongly related, and much effort has been expended connecting them rigorously under various assumptions. The scaling of moments, which is captured with the simple and efficient partition function acts as bridge. This function can be viewed as a concise way of describing various features of cascades and processes in general.

It is necessary to make some operations to provide multifractal analysis.

At first we used the wavelet coefficients of a signal to study its scale-depend properties. Next we fixed a scale one and computed certain statistics about the wavelet coefficients at that scale. Now we construct a structure function to analyze the multifractal structure (or the local rather than the global-scaling properties) of measure which is based upon the Haar discrete wavelet transform of the measure. In order to numerically estimate partition function we transforms the structure function. After introducing Legendre transform to partition function we can get a multifractal spectra of investigated process.