АДДИТИВНАЯ АЛГЕБРА В ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ

Выхованец В.С.

Приднестровский государственный университет
Тирасполь, Республика Молдова, vyk@tirastel.md

Введение

Дискретные преобразования являются мощным средством исследования сигналов различной физической природы и эффективно используются в различных областях науки и техники [1]. Дискретные ортогональные преобразования задаются соотношениями вида:

$$\begin{cases} f(t) = \sum_{i=0}^{m-1} \theta(t,i) \cdot a(i); \\ a(i) = \sum_{t=0}^{m-1} \vartheta(i,t) \cdot f(t), \end{cases} \qquad \sum_{i=0}^{m-1} \theta(t,i) \cdot \vartheta(i,\tau) = \begin{cases} 1, t = \tau \\ 0, t \neq \tau \end{cases} \qquad (1)$$

где $f(t)$ – отсчеты сигнала в дискретные моменты времени $t = \overline{0, m-1}$; $a(i)$ ($i = \overline{0, m-1}$) – спектр сигнала или коэффициенты разложения по системе спектральных функций (в базисе) $\left\{\theta(t,i), \vartheta(i,t) \middle| \, i,t = \overline{0, m-1}\right\}$; m – число отсчетов во временной (частотной) области. Для взаимно однозначного преобразования сигнала в спектр и обратно базисные функции должны быть ортогональны.

Выражения (1) также могут быть представлены в матричном виде:

$$\begin{cases} F = D \times A; \\ A = Q \times F, \end{cases} \qquad D \times Q = E, \qquad (2)$$

где F (A) - выборка (спектр) сигнала, вектор-столбец длины m; D (Q) - матрица прямого (обратного) преобразования размерности $m \times m$; E - единичная матрица той же размерности.

Помимо условия ортогональности на базис дополнительно налагают ряд ограничений. Среди них – возможность факторизации, распознавание свойств сигнала по его спектру, эффективная вычислимость спектральных функций, и т.д.

Методологической основой цифровой обработки сигнала является, по сути, перенос достаточно сложной обработки сигнала во временной области в область частотную путем преобразований его спектра в некотором базисе, а противоположный подход используется для генерации сигналов с заданными свойствами. Поиск эффективных решений идет, как правило, в направлении создания соответствующих процедур в небольшом классе базисов [2, 3] – Фурье, Хартли, Уолша, Хаара, и т.д., что объясняется как простотой их формирования, так и их достаточной изученностью и наглядностью.

С другой стороны, для каждой процедуры обработки или распознавания нетривиальных свойств сигнала существует свой (оптимальный) базис, где поставленная задача имеет наиболее простое решение. Поиск таких базисов, очевидно, может идти в двух направлениях. При следовании в первом направлении ставится традиционная задача синтеза оптимального базиса в заданной алгебраической системе (в поле действительных или комплексных чисел, на кольце целых чисел или в поле Галуа). Второе направление связано с поиском алгебраических систем, где спектральные функции имеют наиболее эффективную реализацию. Заметим, что этот подход не мешает ставить и решать задачу поиска оптимальных базисов, но в другой арифметике. Этому подходу и посвящена настоящая работа.

Постановка задачи

Поставим задачу расширения спектра базисов ортогонального преобразования и поиска среди них таких, которые имеют эффективную техническую реализацию. Применение в цифровой обработке сигналов микропроцессорных средств позволяет расширить класс эффективно реализуемых функций. После дискретизации и квантования сигнал представляется своими выборочными значениями, задаваемыми с некоторой точностью во времени и по уровню. Это позволяет кодировать вычисляемые значения целыми числами, а саму функцию f рассматривать как дискретную.

Рассмотрим произвольное конечное множество элементов $N_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Зададим на N_k алгебраическую систему $R = \langle N_k, +, \cdot \rangle$ с двумя операциями, которые условно назовем сложением и умножением. При фиксированном $k > 1$ найдем такие операции, которые позволяют разрешить систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=0}^{m-1} a_{ji} \cdot x_i = b_j \ \ (j = \overline{0, m-1}) \qquad (3)$$

относительно x_i, где $a_{ji}, x_i, b_j \in N_k$, или в матричном виде $A \times X = B$.

Методы решения системы уравнений (3) находят широкое применение при цифровой обработке сигналов. В соответствии с (1) в качестве переменных x_i и свободных членов b_j выступают отсчеты сигнала или его спектр, а коэффициенты a_{ji} – значения прямых или обратных спектральных функции. В свою очередь вектор-столбец матрицы A есть характеристический вектор спектральной функции, а вся матрица A – набор спектральных функций, которые используются в дискретном преобразовании.

В работе [4] показано существование пяти дискретных алгебраических системы: алгебры логики, мультипликативной и аддитивной алгебры, конечного поля и кольца целых чисел. Для всех перечисленных алгебр для разрешимости системы (3) на значения коэффициентов a_{ji} (на вид и подбор спектральных функций) налагаются определенные ограничения.

Алгебра логики и мультипликативная алгебра позволяют реализовать узкий класс спектральных базисов, которые условно назовем пиковыми, так как каждая из спектральных функций отлична от нуля только в одной точке (на одном интервале). Эти базисы применяются, в основном, при проектировании дискретных устройств, где важна простота реализации. Аддитивная алгебра, конечное поле и кольцо целых чисел порождают широкий класс базисов, значительно превосходящий и включающий класс пиковых базисов.

Достаточно хорошо изучены спектральные представления в конечных полях и на кольце целых чисел. Исследуем возможность применения для цифровой обработки сигналов аддитивной алгебры.

Аддитивная алгебра

Пусть $R_A = \langle N_k, +, \cdot \rangle$ – алгебра, в которой существуют два элемента $\sigma \in N_k$ и $\iota \in N_k$ ($\iota \neq \sigma$), такие, что $a + \sigma = a$, $\sigma + a = a$ и $\sigma \cdot a = \sigma$, $\iota \cdot a = \iota$ для всех $a \in N_k$. Элемент σ будем называть нулем, а ι – единицей алгебры. Дополнительно потребуем, чтобы операция сложения образовывала коммутативную группу $G_A = \langle N_k, + \rangle$ на множестве N_k с нейтральным (нулевым) элементом σ. Алгебру R_A будем называть аддитивной.

Определение 1. Циклическим порядком элемента $a \in G_A$ называется такое натуральное минимальное число $c_a > 0$, что циклическая сумма $c_a \circ a = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{c_a} = \sigma$, где σ – нейтральный элемент G_A. Положим $0 \circ a = \sigma$ и $(-\lambda) \circ a = \lambda \circ (-a)$, где λ - целое число.

Определение 2. Циклическим порядком группы G_A называется минимальное значение порядков всех ее элементов, кроме нейтрального.

Лемма 1. Уравнение $\lambda \circ a = b$ имеет единственное решение для всех $a, b \in G_A$, если и только если $|\lambda| < c$, где c – циклический порядок группы G_A.

Определение 3. Логической матрицей L_m называется квадратная матрица, состоящая из нулей и единиц аддитивной алгебры. Если заменить нули и единицы аддитивной алгебры на нули и единицы кольца целых чисел соответственно, то получим сопряженную ей матрицу $\hat{L}_m$ той же размерности.

Теорема 2. Произвольная дискретная функция f может быть представлена в виде спектрального разложения (1) в алгебре R_A, если D является логической матрицей L_m, а модуль определителя сопряженной ей матрицы $\hat{L}_m$ меньше циклического порядка группы G_A. Тогда $\Delta \circ A = \overline{D}^T \circ F$, где $\overline{D}$ – алгебраическое дополнение $\hat{L}_m$, Δ – определитель $\hat{L}_m$, а T – операция транспонирования матрицы.

Если G_A циклическая группа, то спектральное разложение ортогонально (т.е. существует матрица Q), когда Δ является делителем числа, кратного ее порядку k. В случае, если $|\Delta| = 1$ то для любой группы G_A имеет место $Q = \Delta \circ \overline{D}^T$.

Заметим, что в аддитивной алгебре в качестве операций сложения можно использовать целочисленное сложение, сложение по модулю k, поразрядную неэквиваленцию, а в качестве умножения – целочисленное умножение, поразрядную конъюнкцию и др. Для обеспечения замкнутости на множестве N_k поразрядных операций, k выбирается кратным степени 2.

Демонстрационный пример

Пусть операции сложения и умножения алгебры R_A заданы в виде матриц S и P, состоящих их элементов $s_{ij} = i + j$ и $p_{ij} = i \cdot j$ соответственно:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \; P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

где * – безразличное значение. Очевидно, что циклический порядок группы G_A равен двум, $\sigma = 0$ и $\iota = 3$. Приведенная в примере операция сложения может быть реализована как поразрядная неэквиваленция при представлении чисел в двоичной системе счисления, а качестве операции умножения использована поразрядная конъюнкция. Обе эти операции имеют достаточно простую и эффективную техническую реализацию.

Выберем систему спектральных функций, заданную в виде матриц

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \; \overline{D}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \; \Delta = 1.$$

Функции спектрального базиса легко могут быть получены сдвигом вправо, то есть путем использования соответствующей операции логического сдвига двоичного числа с числом разрядов, равным m. Обратные спектральные функции являются трехуровневыми и также могут быть получены путем логического сдвига вправо. Из определения операции сложения видно, что $-a = a$. Отсюда следует, что в матрице $\overline{D}$ знаки минус могут быть опущены. В результате получаем двухуровневую систему обратных спектральных функций. Так как $\Delta = 1$, то базис является и ортогональным.

Особенностями приведенного выше спектрального базиса является простота его формирования, независимость от используемых операций сложения и умножения, а также простой физический смысл: первые две трети спектральные функций определяют фазочувствительную компоненту сигнала, а оставшаяся треть – составляющую сигнала, не чувствительную к фазе. Причем, чем больше номер спектральной компоненты, тем более узкие пики имеет нефазочувствительная составляющая, а чем больше ее спектральный коэффициент, тем меньше этот сигнал представим в виде спектра, задаваемого исходной гармоникой.

Тогда для сигнала, заданного характеристическим вектором $F = [1, 3, 0, 2, 1, 0]^T$ имеем $A = \overline{D}^T \circ F = [1, 2, 3, 3, 1, 2]^T$.

Выполнив низкочастотную фильтрацию, получаем спектр фазочувствительной составляющей сигнала $\tilde{A} = [1, 2, 3, 3, 0, 0]^T$, а после обратного преобразования – и сам сигнал $\tilde{F} = [1, 3, 0, 2, 0, 3]^T$.

Заключение

Аддитивная алгебра, как альтернативная алгебраическая система для цифровой обработки сигналов обеспечивает рад преимуществ по сравнению с такими алгебраическими системами как конечное поле, кольцо целых чисел и поле действительных чисел.

В частности, при разложении сигнала в базисах аддитивной алгебры спектральные функции легко реализуемы, так как являются двухуровневыми. Для выполнения процедур дискретного преобразования требуется вычислительное средство небольшого быстродействия и небольшой разрядности, с простой системой команд, так как не требуется реализация команд целочисленного умножения или умножения с плавающей запятой. Помимо всего прочего, при цифровой обработке сигналов в аддитивной алгебре сохраняется всей мощность аппарата дискретного ортогонального преобразования.

Список литературы

1. Пойда В.Н. Спектральный анализ в дискретных ортогональных базисах. – Мн., 1983.
2. Дагман Э.Е., Кухарев Г.А. Быстрые дискретные ортогональные преобразования. - Новосибирск, 1983.
3. Залмазон Л.А. Преобразование Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. - М., 1989.
4. Vykhovanets V.S. Algebraic systems for digital signal processing // Proceedings of Sixth International Conference “Pattern Recognition and Information Processing”. – Minsk, 2001. – Vol. 2, PP. 93-99.

ADDITEVE ALGEBRA FOR DIGITAL SIGNAL PROCESSING

Vykhovanets V.

Transdniestrian State University, Tiraspol, Republic of Moldova
vyk@tirastel.md

Abstract. A digital signal processing based on a representation over additive algebra is discussed. This system can be used for syntheses various spectral representations of digital readouts of a signal. Theorem of spectral decomposition is formulated. The given theorem allows constructing spectral functions for various implementations. Example of the digital signal processing is given.

INTRODUCTION

Image analysis, signal processing, logic design are normally thought of in terms of multiple-valued signals; however it is natural to think of variables with symbolic or integer values. For that a multiple-valued signal f is transformed into the spectral representation by the discrete transformation

$$f(t)=\sum_{i=0}^{m-1}\theta(t,i)\cdot a(i),\quad a(i)=\sum_{t=0}^{m-1}\vartheta(i,t)\cdot f(t),\quad \sum_{i=0}^{m-1}\theta(t,i)\cdot\vartheta(i,\tau)=\begin{cases}1, t=\tau\\ 0, t\neq\tau\end{cases}, \tag{1}$$

where $f(t)$ are digital readouts of a signal in sampling instants $t=\overline{0,m-1}$; $a(i)$ ($i=\overline{0,m-1}$) is a spectrum of the signal; $\theta(t,i)$ and $\vartheta(i,t)$ are a system of orthogonal signals (functions); m is a number of readouts in the temporal and the spectral (frequency) area.

The expressions (1) also can be written as a matrix equation $F=D\times A$ (if there exist Q such that $A=Q\times F$, $Q\times D=E$ we have orthogonal transformation), where F (A) is a m-vector, D (Q, E) is a direct (inverse, unit) $m\times m$-matrix.

There are a few algebraic systems [1], logic algebra, additive and multiplicative algebra, Galois field and ring of integers, which allow finding a_i from (1). Galois field, ring of integers and field of real numbers are well known [2-4], but additive algebra needs to research. In this paper additive algebraic system for digital signal processing is considered.

ADDITIVE ALGEBRA

Definition 1. Let a domain N_k is a finite set of integers $\{0,1,\ldots,k-1\}$.

Definition 2. Let $R_L=\langle N_k,+,\cdot\rangle$ be an additive algebra and there exists $\sigma\in N_k$ and $\iota\in N_k$ ($\iota\neq\sigma$) such that $a+\sigma=a$, $\sigma+a=a$ and $\sigma\cdot a=\sigma$, $\iota\cdot a=\iota$ for all $a\in N_k$. Element σ is called zero and element ι is called unit. In addition let $G_A=\langle N_k,+\rangle$ is a commutative group.

Definition 3. The cyclic order of element $a\in G_A$ is a minimal whole number $c_a>0$, such that cyclic sum $c_a\circ a=\underbrace{a+a+\ldots+a}_{c_a}=\sigma$, where σ is an identity element of G_A. Let $0\circ a=\sigma$ and let $(-\lambda)\circ a=\lambda\circ(-a)$ where λ is an integer.

Definition 4. The cyclic order of group G_A is a minimal order of its elements except σ.

Lemma. Equation $\lambda\circ a=b$ has unique solution for all $a,b\in G_A$ if and only if $|\lambda|<c$, where c is a cyclic order of commutative group G_A.

Definition 5. A logical matrix L_m is a $m\times m$-matrix; each of whose elements is zero or unit. If we replace the elements of L_m with 0 and 1 respectively, we find matrix $\widehat{L}_m$. The matrix $\widehat{L}_m$ is called a conjugate matrix of L_m.

Theorem. Any function f can be represented in the form (1) over R_A if D is a logical matrix L_m and if the modulo of determinant of conjugate matrix $\widehat{L}_m$ less then a cyclic order of group G_A. Then $\Delta\circ A=\overline{D}^T\circ F$ where $\overline{D}$ is an algebraic complement $\widehat{L}_m$, Δ is a determinant of $\widehat{L}_m$.

DEMONSTRATION EXAMPLE

Let a addition and a multiplication are operations defined by matrix $\boldsymbol{S}$ and $\boldsymbol{P}$ such that $\boldsymbol{s_{ij}} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ and $\boldsymbol{p_{ij}} = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j}$ $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} = \overline{0, \boldsymbol{m} - 1})$,

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \ \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

where * is an indifference number. A cyclic order of G_A is equal to 2. Obviously $\sigma = 0$ and $\iota = 3$. Note the addition is the digit-to-digit nonequivalence and the multiplication can be realized as digit-to-digit conjunction, for example. Let a spectral system is defined as the following matrixes:

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \ \overline{\boldsymbol{D}}^{\boldsymbol{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{\Delta} = 1.$$

A direct (inverse) spectral function is a column of matrix $\boldsymbol{D}$ ($\overline{\boldsymbol{D}}^{\boldsymbol{T}}$). These spectral functions can be got with a logical shifting of bit strings. Note the first two thirds of they are phase-sensitive functions, the others are phase-insensitive functions.

Then for a signal $\boldsymbol{F} = [1, 3, 0, 2, 1, 0]^{\boldsymbol{T}}$ we have $\boldsymbol{A} = \overline{\boldsymbol{D}}^{\boldsymbol{T}} \circ \boldsymbol{F} = [1, 2, 3, 3, 1, 2]^{\boldsymbol{T}}$. After low-pass filtering we have $\tilde{\boldsymbol{A}} = [1, 2, 3, 3, 0, 0]^{\boldsymbol{T}}$ and $\tilde{\boldsymbol{F}} = [1, 3, 0, 2, 0, 3]^{\boldsymbol{T}}$, where $\tilde{\boldsymbol{F}}$ is a phase-sensitive constituent of the current signal $\boldsymbol{F}$.

CONCLUSION

The additive algebra as a alternative algebraic system for digital signal processing provides some advantages in comparison with such the algebraic systems as Galois field, ring of integers and field of real numbers.

In particular if we use spectral bases over the additive algebra then spectral functions are easy to realize, as they are bimodal. For execution of discrete transformations we need simple computing facilities with low operation speed and small digit capacity as it is not required to use a multiplication for integers or real numbers.

At last the digital signal processing over additive algebra preserves all helpful properties of the discrete orthogonal transformation.

References

1. V.S. Vykhovanets, Algebraic Systems for Digital Signal Processing, Proceedings of Sixth International Conference “Pattern Recognition and Information Processing”. Minsk, 2001. Vol. 2. PP. 93-99.
2. S.K. Mitra, J.F. Kaiser, Handbook for Digital Signal Processing, John Willey & Sons, 1993.
3. E.C. Ifector and B.W. Jevis, Digital Signal Processing, A Practical Approach, Addison-Wesley Publishing Company, 1993.
4. L.B. Jackson, Digital Filters and signal Processing, Kluwer Academic Press, 1996.