

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЦИФРОВОЙ СИСТЕМЫ ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ ПРИ ОТСУТСТВИИ ШУМА

Султанов Б.В., Щербаков М.А.

Пензенский государственный университет
440026, Пенза, Красная, 40
Тел.(841-2) 52-3708; Факс:(841-2)-56-5122; E-mail:mash@sura.ru

Объектом исследования в данной работе являются цифровая система фазовой синхронизации (ЦСФС) с многоуровневым аналого-цифровым преобразованием и равномерной дискретизацией [1], алгоритм работы которой при отсутствии шума задаётся нелинейным разностным уравнением вида [2]:

$$\begin{aligned} \psi[k] - 2\psi[k-1] + \psi[k-2] + k1 \sin(\psi[k-1]) + k2 \sin(\psi[k-2]) = \\ = \varphi[k] - 2\varphi[k-1] + \varphi[k-2], \end{aligned} \quad (1)$$

где $\varphi[k]$ и $\psi[k]$ – последовательности отсчётов соответственно фазы задающего (входного) сигнала и фазовой ошибки (разности фаз задающего $\varphi[k]$ и подстраиваемого $\psi[k]$ колебаний); $k1$ и $k2$ – постоянные коэффициенты.

Рассмотрим имеющую большое практическое значение ситуацию, когда фаза задающего колебания $\varphi[k]$ изменяется по линейному закону: $\varphi[k] = \omega_{or} k$, где $\omega_{or} = 2\pi f_r / f_d$; f_d - частота дискретизации. Она возникает при наличии постоянного сдвига f_r частоты входного сигнала относительно ее номинального значения f . Нетрудно убедиться, что при линейном законе изменения $\varphi[k]$ правая часть соотношения (1) обращается в ноль. С учетом этого его можно записать следующим образом:

$$\psi[k] - \psi[k-1] = \psi[k-1] - \psi[k-2] - k1 \sin(\psi[k-1]) - k2 \sin(\psi[k-2]). \quad (2)$$

Переходя к конечным разностям $\Delta\psi[k] = \psi[k] - \psi[k-1]$, на основании (2) имеем:

$$\Delta\psi[k] = \Delta\psi[k-1] - k1 \sin(\psi[k-1]) - k2 \sin(\psi[k-2]). \quad (3)$$

Нелинейное разностное уравнения (3) позволяет построить фазовый портрет анализируемой ЦСФС как функцию $\Delta\psi[k] = F(\psi[k-1])$. Практическое построение фазовых траекторий удобно выполнить на основе последовательного вычисления значений $\Delta\psi[k]$ в соответствии с (3), предварительно задавшись начальными условиями $\psi[0]$ и $\psi[1]$, определяющими исходные фазовое ($\psi[0]$) и частотное ($\Delta\psi[1] = \psi[1] - \psi[0]$) рассогласования в системе. При каждом новом значении $\Delta\psi[k]$ ($k > 1$) необходимое для последующих вычислений значение $\psi[k]$ рассчитывается как $\psi[k] = \Delta\psi[k] + \psi[k-1]$.

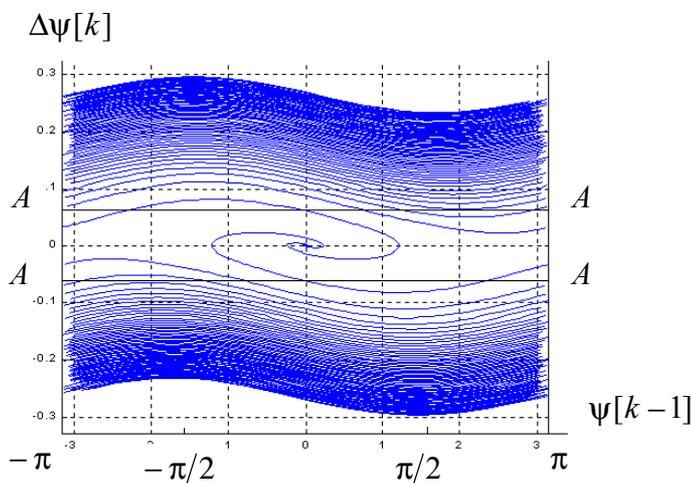


Рис. 1

Построенный таким образом фазовый портрет системы представлен на рис. 1. Отметим, что его вид во многом аналогичен фазовым портретам непрерывных астатических систем синхронизации [3].

С использованием свойства периодичности уравнения (3) по ψ с периодом 2π изображенные на рис.1 фазовые траектории построены в диапазоне изменения величины $\psi[k-1]$ от $-\pi$ до π при $k1 = 0,032$, $k2 = -0,031$. На рисунке представлены фазовые траектории двух процессов. Первый из них характеризует поведение системы при начальных условиях $\psi[0] = -\pi$; $\Delta\psi[1] = \pi/12$ и расположен в

верхней полуплоскости. Второй соответствует начальным условиям $\psi[0]=\pi$; $\Delta\psi[1]=-\pi/12$ и находится в нижней части графика. Изображающая точка пробегает траектории слева направо в первом случае и в обратном направлении во втором. Поскольку в ЦСФС обработка сигналов осуществляется дискретно во времени, реальные фазовые траектории представляют собой набор не примыкающих друг к другу отдельных точек плоскости, через которые на графиках с целью обеспечения целостности их восприятия проведены сплошные линии. При этом конечное и начальное значения (соответствующие, например, $\psi=\pi$ и $\psi=-\pi$ в верхней полуплоскости) предшествующей (находящейся дальше от линии 0) и последующей циклических траекторий представляют собой два смежных отсчета последовательности $\Delta\psi[k]=F(\psi[k-1])$. Так как дискретные значения фазовой ошибки $\psi[k-1]$ практически никогда не совпадают с моментами смены периодов величины $\Delta\psi[k]$, соответствующими осям π и $-\pi$, на рисунках имеют место “неровности” окончания траекторий в правой и левой частях графиков.

При больших значениях величины $|\Delta\psi[k]|$ фазовые траектории на интервале $[-\pi \dots \pi]$ напоминают отрезки синусоиды. При пробегании изображающей точки по каждому такому отрезку от $-\pi$ до π (или от π до $-\pi$ при $\Delta\psi[1]<0$) имеет место небольшое уменьшение (спад) модуля результирующего значения $\Delta\psi$. По мере приближения траектории к линии 0 величина спада возрастает. Это продолжается до тех пор, пока при некотором $\psi \approx s\pi$ (s – некоторое нечетное целое число) значение $|\Delta\psi|$ не окажется в пределах интервала 0A. С этого момента заканчивается циклическое изменение величины $\Delta\psi$. Далее фазовое ψ и частотное $\Delta\psi$ рассогласования будут уменьшаться, стремясь к значениям ($\psi=0$; $\Delta\psi=0$). Как видно из графика, фазовый портрет системы имеет одно устойчивое состояние равновесия (устойчивый фокус) в точке ($\psi=0$; $\Delta\psi=0$). Поскольку, как отмечалось выше, ввиду дискретного характера фазовых траекторий значения фазовой ошибки $\psi[k-1]$ практически никогда не совпадают с точками $\pm\pi$, центры неустойчивого равновесия, соответствующие координатам ($\psi=\pm\pi$; $\Delta\psi=0$) у рассматриваемой системы фактически отсутствуют.

Анализ количественных соотношений, характеризующих динамику рассматриваемой ЦСФС, проводился на основе численного решения нелинейного разностного уравнения (1). При этом было установлено, что данная система так же как и её непрерывный аналог [3] имеет практически неограниченный диапазон захвата по частоте (при фиксированном значении f_d ширина полосы захвата ограничивается лишь условием Котельникова), хотя при больших начальных частотных расстройках длительность переходного процесса резко возрастает. Исследования зависимостей продолжительности переходного процесса, выраженной в числе тактов дискретизации N_{min} , от параметров ЦСФС и начальных условий привели к следующим результатам.

При различных значениях начального фазового рассогласования $\psi[0]$ величина N_{min} существенно изменяется (более чем в 2 раза). При нулевом и малых значениях исходного относительного частотного сдвига $f_{0r} = f_r/f_d$ зависимость $N_{\text{min}}(\psi[0])$ симметрична относительно своего максимума, соответствующего $\psi[0]=\pi$, и имеет минимум в точках $\psi[0]=0$ и $\psi[0]=2\pi$. При увеличении f_{0r} эта симметрия нарушается, и координаты экстремумов смещаются.

Зависимости $N_{\text{min}}(k1)$, полученные при фиксированном $\Delta = k1 + k2$, а также $N_{\text{min}}(\Delta)$ при фиксированном $k1$ и соответствующие различным значениям f_{0r} обладают следующими особенностями. В том случае, когда в качестве начального фазового рассогласования выбирается величина $\psi[0]$, максимизирующая N_{min} (т. е. при $N_{\text{min}} = N_{\text{max}}$), функции $N_{\text{min}}(k1)$ и $N_{\text{min}}(\Delta)$ практически не зависят от исходного значения f_{0r} . В то же время при выборе $\psi[0]=0$ влияние начальной частотной расстройки на вид зависимостей $N_{\text{min}}^{(\psi[0]=0)}(k1)$ и $N_{\text{min}}^{(\psi[0]=0)}(\Delta)$ весьма существенно. Наибольшее расхождение между функциями $N_{\text{max}}(k1)$ и $N_{\text{min}}^{(\psi[0]=0)}(k1)$ (или $N_{\text{max}}(\Delta)$ и $N_{\text{min}}^{(\psi[0]=0)}(\Delta)$) имеет место при малых значениях f_{0r} . Отмеченный факт объясняется тем, что в

данной ситуации $N_{\min}^{(\psi[0]=0)} = \min_{\psi[0]} N_{\min}$, а в остальных – $N_{\min}^{(\psi[0]=0)} > \min_{\psi[0]} N_{\min}$.

Интересно, что, уменьшаясь с ростом величины f_{0r} , при фиксированном её значении соотношение $N_{\min}^{(\psi[0]=0)}/N_{\max}$ остаётся практически постоянным во всём диапазоне изменения значений $k1$ и Δ . В частности, при $f_{0r} = 0,001$ выполняется неравенство

$$N_{\max}/N_{\min}^{(\psi[0]=0)} < 2,3. \quad (4)$$

Последнее обстоятельство позволяет получить аналитическое выражение для оценки сверху длительности переходного процесса в рассматриваемой ЦСФС основываясь на использовании её линеаризованной математической модели (в предположении $\sin(\bullet) \approx (\bullet)$), задаваемой разностным уравнением

$$\psi[k] - (2 - k1)\psi[k-1] + (1 + k2)\psi[k-2] = \varphi[k] - 2\varphi[k-1] + \varphi[k-2]. \quad (5)$$

Правомерность такого подхода подтверждается сопоставлением численных решений уравнений (1) и (5), полученных при начальном условии $\psi[0] = 0$ для практически значимых диапазонов изменения $k1$ (от 0,003 до 0,102) и $k2$ (от -0,002 до -0,102). В относительно широкой области значений $f_{0r} \leq 0,004 \div 0,006$ (при $f_d = 9600$ Гц это соответствует $f_r \leq 38,4 \div 57,6$ Гц) решение линеаризованного уравнения (5) достаточно хорошо (с погрешностью менее 5% при $f_{0r} = 0,006$) аппроксимирует его нелинейный аналог.

Аналитически решая уравнение (6), в конечном итоге приходим к результату:

$$k_{\delta} = \frac{\ln(\delta) + 0,5 \ln(4k1 + 4k2 - k1^2) - \ln(2\omega_{0r}\sqrt{1+k2})}{0,5 \ln(1+k2)}, \quad (6)$$

где k_{δ} – число тактов дискретизации, обеспечивающих сходимость огибающей колебательного переходного процесса $\psi[k]$ к установившемуся значению с абсолютной погрешностью δ . Оценка сверху максимальной длительности переходного процесса при произвольном исходном фазовом сдвиге; $0 < f_{0r} \leq 0,006$ и значениях $k1$ и $k2$, соответствующих указанным выше диапазонам, может быть осуществлена на основе вычисляемых по формуле (6) значений k_{δ} , соответствующих $f_{0r} = 0,001$, с учетом задаваемого неравенством (4) коэффициента как

$$k_{\delta \max} \leq 2,3 k_{\delta}. \quad (7)$$

В ряде практических применений, когда известными заранее являются не значения, а диапазоны изменения влияющих параметров f_{0r} и $\psi(0)$ и необходимо рассчитать граничное значение длительности переходного процесса в ЦСФС, точность оценки (7) является вполне достаточной.

Полученные результаты необходимо учитывать при проектировании и расчёте систем рассмотренного класса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шахтарин Б. И., Губанов Д. А., Волчихин В. И. Моделирование и расчет цифровых систем фазовой синхронизации. – Учеб. пособие. – Пенза: ПГТУ, 1996.
2. Султанов Б. В., Щербаков М. А. Анализ цифровых систем фазовой синхронизации на основе функциональных разложений Вольтерра. – Пенза: ПГУ, 2002.
3. Витерби Э. Д. Принципы когерентной связи. М.: Советское радио, 1973.

DYNAMICS OF DIGITAL PHASE-LOCKED LOOP AT ABSENCE OF NOISE

Sultanov B., Shcherbakov M.

State University of Penza
Krasnaya 40, Penza 440026, Russia, (841-2) 52-37-08, E-mail: mash@sura.ru

Object of research are all-digital phase locked loop (DPLL), described at absence of noise by the nonlinear difference equation of a kind:

$$\begin{aligned} \psi[k] - 2\psi[k-1] + \psi[k-2] + k1 \sin(\psi[k-1]) + k2 \sin(\psi[k-2]) = \\ = \varphi[k] - 2\varphi[k-1] + \varphi[k-2], \end{aligned} \quad (1)$$

where $\varphi[k]$ and $\psi[k]$ accordingly phase of input oscillation and phase error (phases difference of oscillations at input and output DPLL); $k1$ and $k2$ - coefficients.

Let's consider a situation, when the phase of input oscillation changes under the linear law: $\varphi[k] = \omega_{0r} k$, where; $\omega_{0r} = 2\pi f_{0r}$; $f_{0r} = f_r/f_s$; f_s - sampling rate arises at presence of constant frequencies shift f_r at input signal concerning nominal. Thus the right part of the formula (1) addresses in a zero. In view of it, entering designations $\Delta\psi[k] = \psi[k] - \psi[k-1]$, on the basis (1) we have:

$$\Delta\psi[k] = \Delta\psi[k-1] - k1 \sin(\psi[k-1]) - k2 \sin(\psi[k-2]). \quad (2)$$

Nonlinear difference equation (3) allows to construct a phase portrait analyzed DPLL as function $\Delta\psi[k] = F(\psi[k-1])$. Let's note, that its kind in many respects is similar to phase portraits of continuous phase-locked loop of the second order.

Using periodicity of the equation (2) on ψ with the period 2π phase trajectories expediently to build in a range of change $\psi[k-1]$ from $-\pi$ up to π . As the processing of signals in DPLL is carried out discretely in time, the real phase trajectories represent a set of not contiguous to each other separate points of a plane. The phase portrait of system has only one steady condition of balance (steady focus or steady unit, depending on meanings $k1$ and $k2$) in a point $(\psi = 0; \Delta\psi = 0)$. As the phase trajectories have discrete character, the meanings of a phase error $\psi[k-1]$ practically never coincide with points $\pm\pi$. Therefore centers of unstable balance appropriate to coordinates $(\psi = \pm\pi; \Delta\psi = 0)$, at considered system actually are absent.

The quantitative parities describing dynamics considered DPLL, were received at the numerical decision nonlinear difference of the equation (1). Thus was established, that the given system as well as its continuous analogue has practically unlimited range of capture on frequency (at the fixed meaning f_s width of a strip of capture is limited only to the Nyquist condition), though at the large initial meanings f_r the duration of transient is sharply increased. The received dependences of duration of transient on parameters DPLL have shown, that for practically important ranges of change $k1$ (from 0,003 up to 0,103) and $k2$ (from $-0,002$ up to $-0,102$) in rather wide area of meanings $f_{0r} \leq 0,006$ as an estimation from above duration of transient can use expressions

$$k_{\delta \max} \leq 2,3 \frac{\ln(\delta) + 0,5 \ln(4k1 + 4k2 - k1^2) - \ln(2\omega_{0r} \sqrt{1+k2})}{0,5 \ln(1+k2)},$$

where $k_{\delta \max}$ - number of sampling steps, ensuring convergence bending around of oscillatory transient $\psi[k]$ to the established meaning with an absolute error δ .