

# СИНТЕЗ ОРТОГОНАЛЬНЫХ И БИОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОМЕРНЫХ БАНКОВ ФИЛЬТРОВ

Чобану<sup>1</sup> М.К., Большакова О.В.

Московский энергетический институт (технический университет)  
105835, ГСП, Москва Е-250, ул. Красноказарменная, д.17  
Тел.: 7 (095) 362 7463, E-mail: [TMK@vvk2.mpei.ac.ru](mailto:TMK@vvk2.mpei.ac.ru), [OVV@vvk2.mpei.ac.ru](mailto:OVV@vvk2.mpei.ac.ru)

Предложены три основных способа проектирования банков фильтров для многоскоростных систем обработки многомерных сигналов. Первый метод основан на применении полиномов Бернштейна. Второй метод использует структурные и полиномиальные подходы. Третий метод позволяет достроить полифазную матрицу одного из банков по его части (строке/столбцу). Все три метода обеспечивают выполнение заданных требований к фильтрам.

Рассматриваются три метода построения банков фильтров (БФ) для многоскоростных систем.

**Первый** метод позволяет синтезировать двумерные (2D), трехмерные (3D) и четырехмерные (4D) биортогональные банки фильтров (БФ) для 2-хканальных многоскоростных систем. Данный подход основан на применении полиномов Бернштейна [1, 2, 3, 5]. В 2D случае это полиномы:

$$b_{i,j}^N(x, y) = C_N^i C_N^j x^i (1-x)^{N-i} y^j (1-y)^{N-j}.$$

Полином Бернштейна позволяет получить БФ с максимальным числом нулевых производных (с заданной степенью гладкости), со свойствами точного восстановления сигнала (ТВС) и ЛФ при любых размерах фильтра. Степень гладкости в начале координат и на краях полосы пропускания задается числом  $N$ . Теория и методы получены для проектирования БФ, в котором импульсные характеристики фильтра, шкалирующие и вейвлет функции имеют квадратную опорную область. Важно и то, что получаемые БФ являются неразделимыми.

Необходимо найти передаточную характеристику фильтра  $H_0$ , которая находится непосредственно с помощью полинома Бернштейна [2]. Фильтр  $H_1$  может быть получен как  $H_1(\mathbf{z}) = -z_1^{-1}(2(H_0^M(\mathbf{z}) - 0.5)H_0^N(\mathbf{z}) - 1)$ , где  $N$  и  $M$  – степени гладкости фильтров.

**Второй** метод позволяет построить ортогональные банки фильтров (БФ) для двумерных 4-хканальных многоскоростных систем. Подход состоит в рассмотрении каскадных форм, гарантирующих структурную ортогональность, линейность фазы (ЛФ) и гладкость характеристик. Каскадная форма позволяет уменьшить число неизвестных. Их выбор осуществляется при оптимизации нелинейной задачи. Такой каскад не полный, т.е. не любой ортогональный БФ с ЛФ может быть описан этой формой.

Полифазная матрица будет равна [4]

$$H(z_1, z_2) = \mathbf{R}_1 \mathbf{W} \prod_{i=2}^K \mathbf{D}(z_1, z_2) \mathbf{P} \mathbf{W} \mathbf{R}_1 \mathbf{W} \mathbf{P}, \text{ где}$$

$$\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 & 0 \\ \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \beta_i & -\sin \beta_i \\ 0 & 0 & \sin \beta_i & \cos \beta_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_1 z_2 \end{bmatrix}$$

Тогда

$$H_j(z_1, z_2) = H_{j,0}(z_1^2, z_2^2) + H_{j,1}(z_1^2, z_2^2)z_1 + H_{j,2}(z_1^2, z_2^2)z_2 + H_{j,3}(z_1^2, z_2^2)z_1 z_2, j = 0 \dots 3$$

Фильтры  $H_0$  и  $H_1$  являются симметричными, а  $H_2$  и  $H_3$  – антисимметричными. Каждый фильтр имеет ЛФ и импульсную характеристику квадратной формы размером  $2K \times 2K$ . Полученный БФ

<sup>1</sup> Работа выполнена в рамках гранта № Т02-03.1-2522 и программы № 209.01.01.044 Минобразования России.

ортогонален. Для заданного  $K$  нужно выбрать углы  $\alpha_1 \dots \alpha_K$  и  $\beta_1 \dots \beta_K$ . Необходимо получить максимально плоские фильтры из условия равенства нулю производных  $\frac{\partial^{k_1+k_2} H_j}{\partial z_1^{k_1} \partial z_2^{k_2}} = 0$  в точках  $(1, 1), (1, -1), (-1, 1)$  или  $(-1, -1)$ . Построены соответствующие вейвлет функции.

**Третий** метод заключается в достройке унимодулярной прямоугольной полиномиальной матрицы  $E(z)$  размером  $p \times q$  ( $p > q$ ) до инвертируемой полифазной матрицы  $H(z_1, z_2)$ . Метод основан на теореме Куиллин-Суслина. В одномерном случае метод основан на применении метода исключения Гаусса и алгоритме Евклида. Имеются несколько алгоритмов, основанных на технике базисов Грёбнера. Сначала решается уравнение  $F(z)E(z) = I_q$ , где многомерные полиномиальные матрицы

$$E(z), F(z) \in A_p(z^\Gamma) = \{B(z^\Gamma) = \sum_{x \in \Gamma} b(x)z^x \mid b(x) \in R\},$$

а  $A_p(z^\Gamma)$  является обобщенным полиномиальным кольцом Лорана. Частное решение  $F_{part}(z)$  находится с помощью базисов Грёбнера. В результате находятся  $S_i, i=1, \dots, k$  и диагональная матрица  $D$  такие, что

$$D(z)S_k(z) \dots S_1(z)E(z) = \tilde{S}(z)E(z) = (I_q \ 0 \dots 0)^T, F_{part}(z) = (I_q \ 0 \dots 0)\tilde{S}(z).$$

Унимодулярным расширением  $E(z)$  будет  $\tilde{S}^{-1}(z)$  такое, что

$$F_{part}(z)\tilde{S}^{-1}(z) = (I_q \ 0 \dots 0)\tilde{S}(z)\tilde{S}^{-1}(z) = (I_q \ 0 \dots 0).$$

Были построены БФ для 2-хканальных многоскоростных систем для 2D, 3D и 4D случаев [3, 5].

#### Литература

1. Чобану М.К. Многомерные многоскоростные системы и многомерные вейвлет-функции. Часть 1. Теория // Вестник МЭИ, 2003. №2, 75-82.
2. Чобану М.К. Многомерные многоскоростные системы и многомерные вейвлет-функции. Часть 2. Синтез // Вестник МЭИ, 2003. №3, 69-78
3. Большакова О.В. Синтез четырехмерных банков фильтров с помощью полиномов Бернштейна. 5-я Международная конференция и выставка 'Цифровая обработка сигналов и ее применение', 12-14 марта 2003г., Москва, Россия, Т.1, с. 158-161.
4. Tchobanou M.K., Bolshakova O.V. Synthesis of two-dimensional filter banks and wavelet functions. International conference "Wavelets and Splines" July 3-8, 2003, St. Petersburg, Russia, p. 95-96
5. Tchobanou M., Mironov V., Klyushkin V., Rychkov A., Stepachew A., Bolshakova O., Woodburn C. Design and implementation of 2-D and 3-D multirate systems. Proc. 2<sup>nd</sup> International Workshop on Spectral Methods and Multirate Signal Processing, SMMSP-2002, p. 83-86, Toulouse, France, 2002