ДВУМЕРНОЕ БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ХАРТЛИ В ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Злобин С.Л., Стальной А.Я.

ОАО НПО «Алмаз» им. акад. А.Расплетина

При цифровой обработке изображений и в цифровом телевидении, в частности, одной из важнейших задач является задача сокращения скорости передачи двоичных данных и, следовательно, требуемой ширины полосы частот канала связи. Эта задача решается путём уменьшения избыточности информации, передаваемой в телевизионном сигнале или запоминаемой и обрабатываемой в цифровом процессоре при обработке изображений. Уменьшение объёма информации достигается за счёт её сжатия. Различные алгоритмы сжатия уменьшают объём информации, что приводит к значительному сокращению скорости передачи двоичных данных, и, следовательно, к уменьшению ширины спектра видеосигнала. Сжатие позволяет уменьшить скорость передачи изображения без существенных искажений.

В ряде международных стандартов сжатия изображений: JPEG, MPEG-1, MPEG-2 и др. используется дискретное косинусное преобразование (ДКП) [1], имеющее вещественные частотные коэффициенты (спектральные отсчёты). Двумерное ДКП (ДКП-2) обладает свойством разделимости, то есть двумерное ДКП блока размерностью $N \times N$ можно вычислить через одномерные ДКП по строкам и столбцам этого блока. Разделение двумерного ДКП на одномерные сокращает количество арифметических операций: при вычислении двумерного ДКП блока $N \times N$ необходимое количество операций сложения A_1 и умножения M_1 составляет:

$$A_1 = 2 \cdot N^2 \cdot (N-1);$$
 $M_1 = 2 \cdot N^3.$ (1)

Существуют также быстрые алгоритмы вычисления ДКП.

Основным недостатком дискретного косинусного преобразования (ДКП) является невозможность получения с его помощью спектра Фурье, т.е. отсчётов ДПФ. Это верно как для одномерного, так и для двумерного случая. Частотные коэффициенты ДКП X(k) совпадают со спектром Фурье только тогда, когда исходный временной сигнал x(n) является чётной функцией. Невозможность вычисления из спектра ДКП истинного частотного спектра (спектра Фурье) изображения не позволяет выполнить двумерную цифровую фильтрацию в частотной области с помощью различных фильтров — ФНЧ, ФВЧ и т.д. Таким образом, преобразование ДКП при цифровой обработке изображений играет вспомогательную роль, оно используется только для сжатия видеоинформации; сам спектр ДКП не имеет самостоятельного значения.

Цифровую обработку изображений желательно выполнять с помощью вещественного преобразования, формирующего действительные коэффициенты, но вместе с тем однозначно связанного со спектром Фурье, т.е. позволяющего получить отсчёты ДПФ и спектральной плотности Фурье (СПМ Фурье).

Дискретное преобразование Хартли (ДПХ), как и ДПФ, применяется в задачах спектрального анализа и цифровой фильтрации [2,3]. В ДПХ данные обрабатываются только в области вещественных чисел. Прямое и обратное преобразования Хартли не имеют различий, они взаимно симметричны. ДПХ является модификацией ДПФ в плоскости вещественной переменной [2,3], преобразования связаны взаимно однозначными соотношениями. СПМ Фурье и фаза преобразования Фурье могут быть непосредственно получены из ДПХ [2]. Целесообразно применение ДПХ для обработки изображений, так как это двумерные массивы действительных чисел. Весьма эффективно использование ДПХ при цифровой фильтрации на основе свёртки [2]; вычисления проводятся только в спектральной области Хартли.

В [2,3] сформулировано ДПХ для двумерного случая и описано вычисление двумерного ДПФ с помощью двумерного ДПХ. Двумерное прямое и обратное дискретное преобразование Хартли (ДПХ-2) массива (изображения) размера $N \times N$ определяются соотношениями:

$$H(u,v) = \frac{1}{N^2} \cdot \sum_{\tau_1=0}^{N-1} \sum_{\tau_2=0}^{N-1} f(\tau_1,\tau_2) \cdot \cos\left[\frac{(2\pi u \tau_1 + 2\pi v \tau_2)}{N}\right]; \quad \tau_1,\tau_2 = 0,...,N-1;$$
 (2)

$$f(\tau_1, \tau_2) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} H(u, v) \cdot \cos\left[\frac{(2\pi u \tau_1 + 2\pi v \tau_2)}{N}\right]; \qquad u, v = 0, \dots, N-1,$$
 (3)

где $\cos \theta = \cos \theta + \sin \theta$ — ядро преобразования, $f(\tau_1, \tau_2)$ — изображение размера $N \times N$. Двумерное дискретное преобразование Фурье (ДПФ–2) записывается в виде:

$$F(u,v) = R(u,v) + i \cdot I(u,v); \qquad i = \sqrt{-1}$$
 (4)

Двумерное ДПХ связано с ДПФ-2 соотношениями [2]: H(u,v) = R(u,v) - I(u,v);

 $R(u,v) = [H(u,v) + H(N-u,N-v)]/2; \ I(u,v) = -[H(u,v) - H(N-u,N-v)]/2.$

(5)

Двумерная СПМ Фурье вычисляется с помощью зеркального изображения H(N-u,N-v):

$$Z^{2}(u,v) = \left[H^{2}(u,v) + H^{2}(N-u,N-v)\right]/2 . (6)$$

Ядро ДПХ-2 не расщепляется, его нельзя представить через одномерные ДПХ по строкам и столбцам. В [3] было предложено двумерное Q – преобразование с расщепляющимся ядром:

$$Q(u,v) = \frac{1}{N^2} \cdot \sum_{\tau_1=0}^{N-1} \sum_{\tau_2=0}^{N-1} f(\tau_1,\tau_2) \cdot \cos\left(\frac{2\pi u \tau_1}{N}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi v \tau_2}{N}\right). \tag{7}$$

Прямое и обратное Q – преобразования идентичны. Преобразование Q(u,v) вычисляется через ДПХ по строкам и столбцам изображения $f(\tau_1, \tau_2)$ и просто связано с двумерным ДПХ [3]:

$$H(u,v) = [Q(u,v) + Q(N-u,v) - Q(N-u,N-v) + Q(u,N-v)]/2.$$
(8)

Двумерное ДПФ F(u,v) также можно непосредственно получить из Q – преобразования:

$$R(u,v) = [Q(u,N-v) + Q(N-u,v)]/2; I(u,v) = -[Q(u,v) - Q(N-u,N-v)]/2. (9)$$

Таким образом, двумерная фильтрация, основанная на алгоритме двумерной свёртки, может выполняться не только на основе двумерного ДПХ (минуя спектр Фурье) согласно теореме о двумерной свёртке [2], но и лишь с помощью преобразования Q(u,v), поскольку обе функции — ДПФ F(u,v) и ДПХ H(u,v) выражаются через Q – преобразование (8,9).

Для выполнения преобразования O(u,v) может быть применён матричный рекуррентный алгоритм БПХ по основанию 2 [5,6] или аналогичные матричные алгоритмы БПХ по произвольным основаниям b = 3,4,5,7, а также по смешанному основанию. При использовании алгоритма БПХ по основанию 2 [6] для обработки изображения $N \times N$ (где $N = 2^{s}$) необходимое количество операций сложения A_{2} и умножения M_{2} будет составлять:

$$A_2 = 2 \cdot N \cdot [1, 5 \cdot N \cdot (\log_2 N - 2) + 2 \cdot N]; \qquad M_2 = 2 \cdot N^2 \cdot (\log_2 N - 2). \tag{10}$$

В качестве альтернативного быстрого алгоритма вычисления двумерного ДПХ (ДПХ-2) [4] и с целью ускорения и упрощения организации вычислительного процесса авторами разработан новый двумерный матричный рекуррентный алгоритм БПХ по основанию 2×2, для массивов произвольной размерности $N \times N$, где $N = 2^s$. Алгоритм записан в виде трёхмерных матриц, его графическая интерпретация также пространственная — матричные диаграммы алгоритма (рис.1) [6] представлены в виде трёхмерных

матриц. Матричные формулы двумерного алгоритма БПХ имеют вид:
$${}_{n2}\mathbf{F}_p^t = {}_{n2}\mathbf{A}_p^t + {}_{n2}\mathbf{B}_p^t * \mathbf{CL}_{n2}^l + {}_{n2}\underline{\mathbf{B}}_p^t * \mathbf{SL}_{n2}^l + {}_{n2}\mathbf{D}_p^t * \mathbf{CJ}_p^l + {}_{n2}\underline{\mathbf{D}}_p^t * \mathbf{SJ}_p^l + {}_{n2}\mathbf{E}_p^t * \mathbf{CS}_{n2}^l + {}_{n2}\underline{\mathbf{E}}_p^t * \mathbf{SN}_{n2}^l;$$

$${}_{n2}\mathbf{G}_p^t = {}_{n2}\mathbf{A}_p^t + {}_{n2}\mathbf{B}_p^t * \mathbf{CL}_{n2}^l + {}_{n2}\underline{\mathbf{B}}_p^t * \mathbf{SL}_{n2}^l - {}_{n2}\mathbf{D}_p^t * \mathbf{CJ}_p^l - {}_{n2}\underline{\mathbf{D}}_p^t * \mathbf{SJ}_p^l - {}_{n2}\mathbf{E}_p^t * \mathbf{CS}_{n2}^l - {}_{n2}\underline{\mathbf{E}}_p^t * \mathbf{SN}_{n2}^l;$$

$${}_{n2}\mathbf{H}_p^t = {}_{n2}\mathbf{A}_p^t - {}_{n2}\mathbf{B}_p^t * \mathbf{CL}_{n2}^l - {}_{n2}\underline{\mathbf{B}}_p^t * \mathbf{SL}_{n2}^l + {}_{n2}\mathbf{D}_p^t * \mathbf{CJ}_p^l + {}_{n2}\underline{\mathbf{D}}_p^t * \mathbf{SJ}_p^l - {}_{n2}\mathbf{E}_p^t * \mathbf{CS}_{n2}^l - {}_{n2}\underline{\mathbf{E}}_p^t * \mathbf{SN}_{n2}^l;$$

$${}_{n2}\mathbf{X}_p^t = {}_{n2}\mathbf{A}_p^t - {}_{n2}\mathbf{B}_p^t * \mathbf{CL}_{n2}^l - {}_{n2}\underline{\mathbf{B}}_p^t * \mathbf{SL}_{n2}^l - {}_{n2}\mathbf{D}_p^t * \mathbf{CJ}_p^l - {}_{n2}\underline{\mathbf{D}}_p^t * \mathbf{SJ}_p^l + {}_{n2}\mathbf{E}_p^t * \mathbf{CS}_{n2}^l + {}_{n2}\underline{\mathbf{E}}_p^t * \mathbf{SN}_{n2}^l;$$

где $A, B, \underline{B}, D, \underline{D}, E, \underline{E}$ — семь входных трёхмерных матриц; F, G, H, X — четыре выходные трёхмерные матрицы;

 $\mathbf{CL}_{n2}^{1}, \mathbf{SL}_{n2}^{1}, \mathbf{CJ}_{n}^{1}, \mathbf{SJ}_{n2}^{1}, \mathbf{CS}_{n2}^{1}, \mathbf{SN}_{n2}^{1}$ — вектор-столбцы весовых коэффициентов;

$$p=2^{\mathrm{m-1}},\,t=2^{\mathrm{s-m}},\,m=1,2,3,...,s,\,m$$
 — номер итерации, $s=\log_2N,\,n2=N/2;$

 $_{n2}$ \mathbf{A}_{n}^{t} — матрица \mathbf{A}_{n} имеющая n2 = N/2 вертикальных слоёв, каждый из которых является матрицей размером $p \times t$ (p и t — число строк и столбцов), остальные матрицы аналогичны;

 $_{\rm n2}{\bf \underline{B}}_{\rm p}^{\scriptscriptstyle {}^{\scriptscriptstyle {}}}$ — зеркальная (инверсная) трёхмерная матрица, причём в двумерном случае имеет место инверсия и горизонтальных и вертикальных слоёв; матрицы $\underline{\mathbf{D}}$ и $\underline{\mathbf{E}}$ аналогичны;

 $_{n2}$ \mathbf{B}_{p}^{t} * \mathbf{CL}_{n2}^{l} и $_{n2}$ \mathbf{D}_{p}^{t} * \mathbf{CJ}_{p}^{l} — поэлементное (статическое) умножение столбцов горизонтальных или вертикальных слоёв матриц В и D на вектор-столбцы CL и CJ.

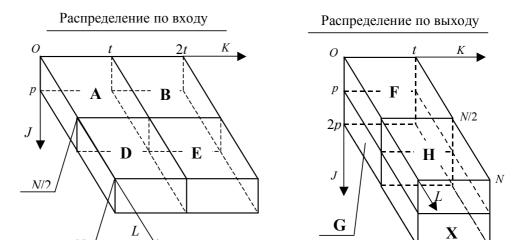


Рис.1. Матричные диаграммы двумерного алгоритма БПХ по основанию 2×2.

Преобразование осуществляется за $s = \log_2 N$ итераций. На каждой итерации выполняется $N^2/4$ базовых операций — двумерных «бабочек». Изображение $f(\tau_1, \tau_2)$ представляется в виде матрицы размером $N \times N$, состоящей из блочных матриц $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}$ и \mathbf{E} . Это горизонтальная плоскость KOL (рис.1). На каждой итерации формируются «частичные» двумерные спектры, являющиеся вертикальными слоями в трёхмерных матрицах — аналогичное явление описано для одномерного матричного алгоритма БПХ [6]. В результате последней итерации спектр Хартли представляется в виде матрицы $N \times N$, которая лежит в вертикальной плоскости JOL. Это наглядно иллюстрирует ортогональность исходного изображения и соответствующей ему плоскости спектра Хартли. Полное количество операций сложения A_3 и умножения M_3 нового двумерного матричного алгоритма БПХ (11) можно найти по формулам:

$$A_3 = (11/4) \cdot N^2 \cdot (\log_2 N - 2) + 4 \cdot N^2; \qquad M_3 = (3/2) \cdot N^2 \cdot (\log_2 N - 2). \tag{12}$$

Двумерный алгоритм БПХ (11) требует выполнения приблизительно на 25% меньше операций умножения, чем это необходимо при вычислении Q – преобразования (10).

ЛИТЕРАТУРА

- 1. А.В.Смирнов, «Основы цифрового телевидения». Москва, «Горячая линия-Телеком», 2001.
- 2. Р.Н.Брейсуэлл, «Преобразование Хартли». Москва, «Мир», 1990.
- 3. Р.Н.Брейсуэлл, О.Бьюнеман и др., «Быстрое двумерное преобразование Хартли». ТИИЭР, том 74, № 9,
- 4. «Быстрые алгоритмы в цифровой обработке изображений», под ред. Т.С.Хуанга. Москва, «Радио и связь», 1984.
- 5. А.Я.Стальной, С.Л.Злобин, А.В.Анищенко. Патент РФ на изобретение: «Процессор для быстрого преобразования Хартли», № 2071221, 6 G 06 F 17/14, 29.06.94 г.
- 6. С.Л.Злобин, А.Я.Стальной, «Матричный рекуррентный алгоритм быстрого преобразования Хартли с естественным порядком адресации входной и выходной информации». Радиотехника, № 4, апрель 2000 г.