

ПРИМЕНЕНИЕ МАРКОВСКОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФАЗЫ В КАНАЛЕ OFDM

Александров А.С., Кукушкин Д.С., Шабанов А.В.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, alexsh@uniyar.ac.ru, dima_f@nrr.ru

Аннотация. На основе предложенной марковской модели выполнен анализ статистических характеристик системы восстановления фазы несущей для сигналов OFDM. В основу анализа положен расчет плотности распределения вероятности фазовой ошибки с использованием уравнения Колмогорова-Чепмена. Получены зависимости среднего времени до срыва слежения от параметров системы и внешних воздействий.

Известно, что системы OFDM характеризуются высокой чувствительностью к фазовому шуму, что определяет высокие требования к стабильности фазы восстанавливаемой несущей [1, 2]. Существует два подхода к решению этой проблемы. Первый заключается в использовании специальных тестовых преамбул. Такой подход характеризуется определенными недостатками. Во-первых, повышается избыточность передаваемой информации. Во-вторых, такая система не способна отслеживать резкие скачки фазы, которые могут возникать вследствие работы системы восстановления частоты несущей [1]. Второй подход состоит в применении следящих систем, свободных от перечисленных недостатков.

За основу работы взята предложенная в [2] схема восстановления фазы несущей с обратной связью, представляющая собой по сути систему фазовой синхронизации с многоканальным фазовым детектором, состоящим из совокупности решающих устройств в каждом подканале и усреднителя, вычисляющего среднее по всем каналам значение оценки фазового рассогласования. Известные ранее результаты анализа данной схемы были получены на основе имитационного моделирования и носили достаточно частный характер [2]. Особенностью предлагаемой работы является использование для анализа схемы восстановления марковской модели в виде уравнения Колмогорова-Чепмена (КЧ), позволившей получить общие сведения о работе системы. При этом была также применена имитационная модель, но в основном для проверки полученных с помощью уравнения КЧ результатов.

При построении марковской модели в форме уравнений КЧ был предложен переход от N фазовых детекторов (по одному в каждом подканале) к одному эквивалентному фазовому детектору, нелинейность характеристики которого имеет статистический характер и определяется типом и уровнем шумовых воздействий в каналах. Характеристика эквивалентного детектора носит периодический характер с периодом, равным $\pi/2^{m-1}$, где m – размерность созвездия КАМ, используемой в подканалах. Например, для КАМ модуляции с $m = 2$ период соответствует интервалу $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

1. Эквивалентная функциональная схема

Запишем комплексный сигнал на входе системы восстановления фазы в виде:

$$s_l(k) = I_l(k)e^{i\psi(k)} + n_l(k), \quad (1)$$

где $I_l(k)$ – информационная комплексная составляющая l -го подканала (далее учитываться не будет), $\psi(k)$ – фазовый сдвиг между передаваемым комплексным числом и его принятым значением (не зависит от номера подканала l), $n_l(k)$ – комплексный шум, возникающий на входе l -го подканала в результате БПФ приемника; считаем $n_l(k)$ в подканалах независимыми. Задача системы восстановления фазы состоит в компенсации $\psi(k)$.

Эквивалентная функциональная схема системы восстановления приведена на рис.1. Здесь n_l' представляет собой аддитивный к фазе $\psi(k)$ белый шум, полученный путем пересчета $n_l(k)$. Полная фаза на входе l -го подканала (на входе соответствующего фазового детектора (ФД)) определяется выражением

$$g_l(k) = \psi(k) + n_l'(k). \quad (2)$$

Считаем, что действительная и мнимая части отсчетов шума n_l представляют собой независимые взаимногауссовские процессы. В этом случае ПРВ эквивалентного аддитивного шума в каждом из подканалов примет вид:

$$P(n') = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{\sin^2(n')}{2\sigma^2}\right) \int_0^\infty V \exp\left[-\frac{V - \cos(n')}{2\sigma^2}\right] dV,$$

где σ^2 – дисперсия шума в каждом из каналов.

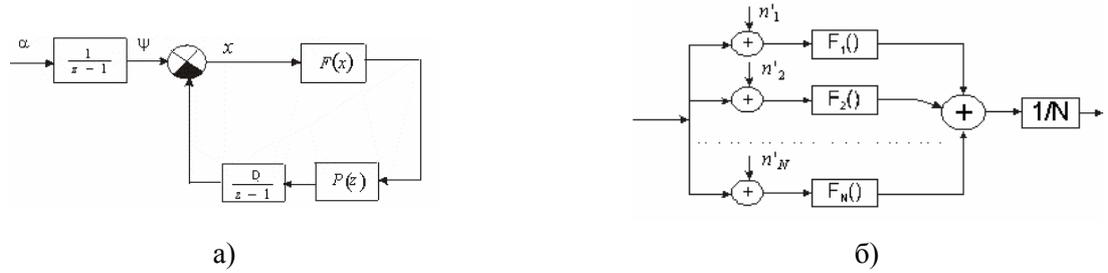


Рис.1. Функциональная модель системы:
 а) эквивалентная схема СФС б) эквивалентная схема фазового детектора

На схеме (рис.1а) введена переменная α , характеризующая закон изменения частоты:

$$\alpha_{n+1} \equiv \psi_n - \psi_{n-1}. \quad (3)$$

2. Статистический фазовый детектор

Эквивалентный фазовый детектор (рис.1б) состоит из N параллельных одинаковых звеньев, в каждом из которых действует аддитивный шум n_i^1 . Операцию усреднения выходов всех звеньев при достаточном числе подканалов, можно заменить операцией вычисления математического ожидания случайного процесса, для которого все подканалы представляют собой ансамбль реализаций. В этом случае характеристика ФД будет представлять собой нелинейную функцию, вид которой определяется статистическими характеристиками аддитивного шума:

$$F(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\pi/4}^{\pi/4} y \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{\sin^2\left(y - x - i\frac{2\pi}{N}\right)}{2\sigma^2}\right) \left(\int_0^{\infty} V \exp\left(-\frac{\left(V - \cos\left(y - x - i\frac{2\pi}{N}\right)\right)^2}{2\sigma^2}\right) dV \right) dy \right] \quad (4)$$

На рис.2 приведена характеристика ФД для разных значений дисперсии шума (приведен один период), рассчитанная в соответствии с (4).

Видно, что с ростом дисперсии характеристика изменяется от пилообразной до синусоидальной.

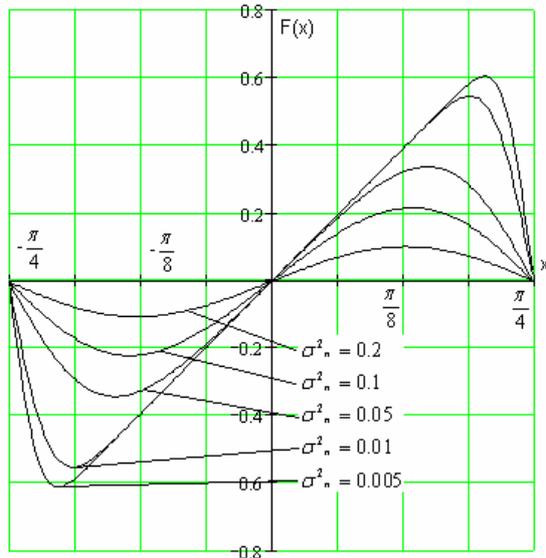


Рис.2. Характеристики фазового детектора.

Это объясняется тем, что при большой дисперсии повышается вероятность выхода фазовой ошибки на соседний период характеристики.

Разностное уравнение, описывающее систему, приведенную на рис.1 для $P(z) = 1$ будет иметь вид:

$$x_{n+1} = x_n + \alpha_n - DF(x_n), \quad (5)$$

где x – фазовая ошибка, D – усиление кольца.

Пусть плотность распределения вероятности переменной α имеет вид:

$$P(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}\right), \quad (6)$$

где σ^2_α – дисперсия. В этом случае уравнение (6) описывает простую марковскую цепь первого порядка, для которой можно выписать уравнение Колмогорова-Чепмена для плотности распределения вероятности фазовой ошибки $P_n(x)$ вида:

$$P_{n+1}(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} P\left(z + i\frac{\pi}{4} | x\right) P_n(x) dx, \quad (7)$$

где $P\left(z + i\frac{\pi}{4} | x\right)$ – условная плотность вероятности, имеющая вид

$$P(z | x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(z - x + DF(x))^2}{2\sigma_a^2}\right) \quad (8)$$

В (7) приняты следующие обозначения:

$$\begin{cases} z = x_{n+1} \\ x = x_n \end{cases} \quad (9)$$

Операция суммирования в (7) связана со сверткой бесконечного фазового пространства в конечный интервал $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$. В силу быстрой сходимости ряда можно ограничиться конечным числом слагаемых.

3. Анализ результатов

Исследование системы проводилось в два этапа. На первом исследовались статистические характеристики фазовой ошибки. Для чего было получено численное решение уравнения (9) в форме ПРВ. На втором этапе исследовалась зависимость среднего времени до срыва слежения, как от параметров системы, так и от параметров внешнего воздействия.

На рис.3 приведены ПРВ для случая наличия поглощающих экранов на границе интервала $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$. Наличие поглощающих экранов приводит к тому, что точка, вышедшая за вышеуказанный интервал, в дальнейших вычислениях не участвует. Из графиков видно, что с ростом дисперсии площадь ПРВ, находящаяся в пределах границ однозначности фазового детектора, с течением времени уменьшается. Это в свою очередь связано с изменением нелинейности фазового детектора.

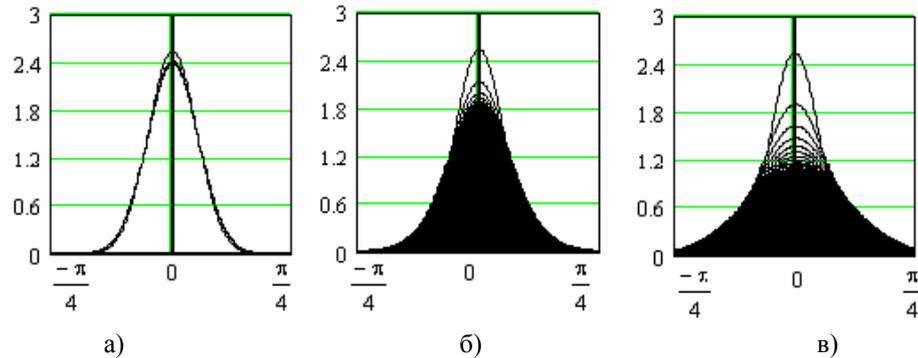


Рис. 3. Динамика ПРВ фазовой ошибки при $\sigma^2_{\psi} = \left(0.2\frac{\pi}{4}\right)^2, D = 1.0$

Для а) $\sigma^2_n = 0.1$; б) $\sigma^2_n = 0.2$; в) $\sigma^2_n = 0.4$.

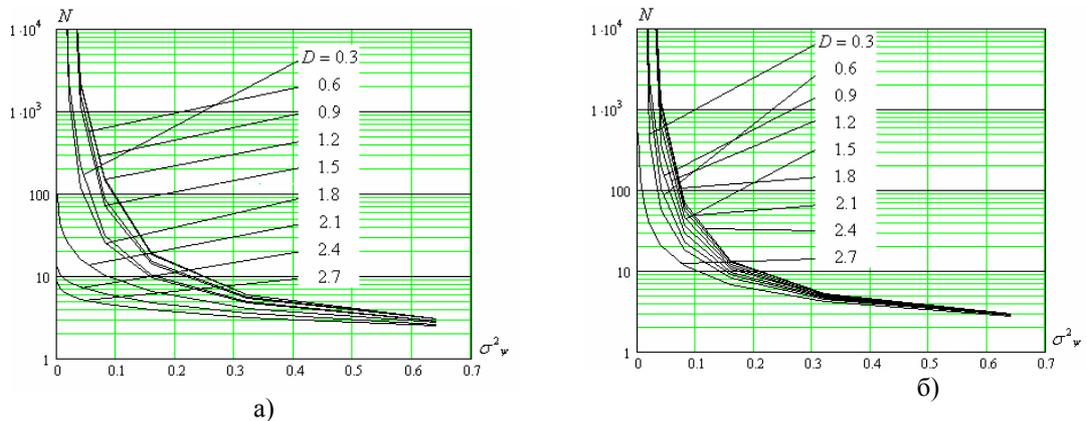


Рис.4. Зависимость среднего времени до срыва слежения от дисперсии шума при разных D
для а) $\sigma_n^2 = 1.25 \cdot 10^{-3}$; б) $\sigma_n^2 = 1.6 \cdot 10^{-1}$

Задача о времени до срыва слежения сводится к вычислению среднего времени достижения двух поглощающих экранов в точках $\pm \frac{\pi}{4}$. Из приведенных графиков (рис.4) видно, что при малой дисперсии шума среднее время до срыва растет при стремлении усиления D к единице. Смещение экстремума в область больших коэффициентов при увеличении дисперсии шума объясняется изменением крутизны характеристики фазового детектора (рис. 2). При большой дисперсии зависимость среднего времени до срыва от коэффициента усиления практически отсутствует, что можно объяснить существенной нелинейностью характеристики фазового детектора.

Литература

1. John A. C. Bingham. Multicarrier modulation for data transmission: An idea whose time has come. IEEE Communications Magazine, May 1990.
 2. V.S Abhayawardhana, I.J. Wassel Common Phase Error Correction with Feedback for OFDM in Wireless Communication, IEEE Global Communications Conference (GLOBECOM 2002), November 2002.
 3. Казаков Л.Н., Башмаков М.В. Математические модели стохастических цифровых систем фазовой синхронизации. – издательство Ярославского государственного университета, 2001. 152с.
-