

## ЭФФЕКТЫ КВАНТОВАНИЯ В ЦИФРОВЫХ РЕКУРСИВНЫХ ФИЛЬТРАХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПРЕДСТАВЛЕНИЕМ ЧИСЕЛ В ДОПОЛНИТЕЛЬНОМ КОДЕ С УСЕЧЕНИЕМ ПОСЛЕ СЛОЖЕНИЯ\*

Брюханов Ю.А.

Ярославский государственный университет им. Демидова  
150000, Россия, Ярославль, ул. Советская, 14, тел./факс (0852) 305-319, E-mail: bruhanov@uniyar.ac.ru

Исследованы свободные колебания и колебания при постоянном входном сигнале в фильтрах нижних и верхних частот. Используется целочисленная арифметика с фиксированной запятой. Сумматор имеет характеристику с насыщением. Получены выражения для расчета наиболее вероятных режимов при произвольном количестве разрядов в представлении чисел.

Фильтры первого порядка используются для выделения нижних и верхних частот [1]. Специфическими для цифровых фильтров являются ошибки, вызванные конечным количеством разрядов  $M$  в представлении чисел.

Цель данной работы – исследование автономного режима и колебаний при постоянном входном сигнале  $A$  в фильтрах, использующих целочисленную арифметику с фиксированной запятой, где числа представляются в дополнительном коде с усечением результатов сложения.

Полагаем, что сумматор имеет характеристику с насыщением, а число уровней квантования  $L$  произвольно. При этом характеристика сумматора (квантователя) выражается функцией

$$f(\varphi) = \begin{cases} [\varphi] & \text{при } 0 \leq \varphi < N, \\ N_1 & \text{при } \varphi \geq N_1, \\ [\varphi + N] - N & \text{при } -N_1 \leq \varphi < 0, \\ -N & \text{при } \varphi < -N_1, \end{cases}$$

где  $[\cdot]$  - целая часть числа,  $N_1 = N - 1$ ,  $N = L/2$ . В случае  $\varphi \geq 0$  участки характеристики, соответствующие значениям  $[\varphi]$ , обозначим  $0, I, II, \dots, N_1$ , а для  $\varphi < 0$  участки, соответствующие значениям  $[\varphi + N] - N$ , обозначим  $0, -I, -II, \dots, -N$ .

В общем случае колебания в нелинейном цифровом рекурсивном фильтре первого порядка описываются разностным уравнением

$$x(n+1) = f(ax(n) + u(n)),$$

где  $x(n)$  - реакция фильтра,  $a$  - параметр фильтра,  $u(n)$  - входной сигнал. Введем функцию  $y(n) = x(n+1)$ . Процессы исследуем на плоскости состояний  $(x, y)$  методом точечных отображений [2]. В нашем случае функция последования имеет вид  $y(n) = f(ax(n) + u(n))$ . Как и в [3], плоскость состояний разобьем на области соответственно участкам характеристики сумматора. Обозначим эти области, как и соответствующие участки.

В зависимости от начального состояния  $x(0)$  в фильтре возможны различные колебания. Вероятность колебания  $B$  определим  $P(B) = m/L$ , где  $m$  - число начальных условий, соответствующих колебанию  $B$ . Параметр фильтра  $a$  выбираем в области устойчивости без учета эффектов квантования, т.е.  $0 < |a| < 1$ .

В автономном режиме ( $u(n) = 0$ ) в зависимости от знака и величины параметра  $a$  графики функции последования и биссектрисы  $y = x$  могут пересекаться в одной или нескольких точках. В качестве иллюстрации на рис. 1 показаны диаграмма Ламерея ( $a = 0,7$ ) и вероятностная диаграмма автономного фильтра нижних частот (ФНЧ) при  $L = 12$ .

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 02-02-17500)

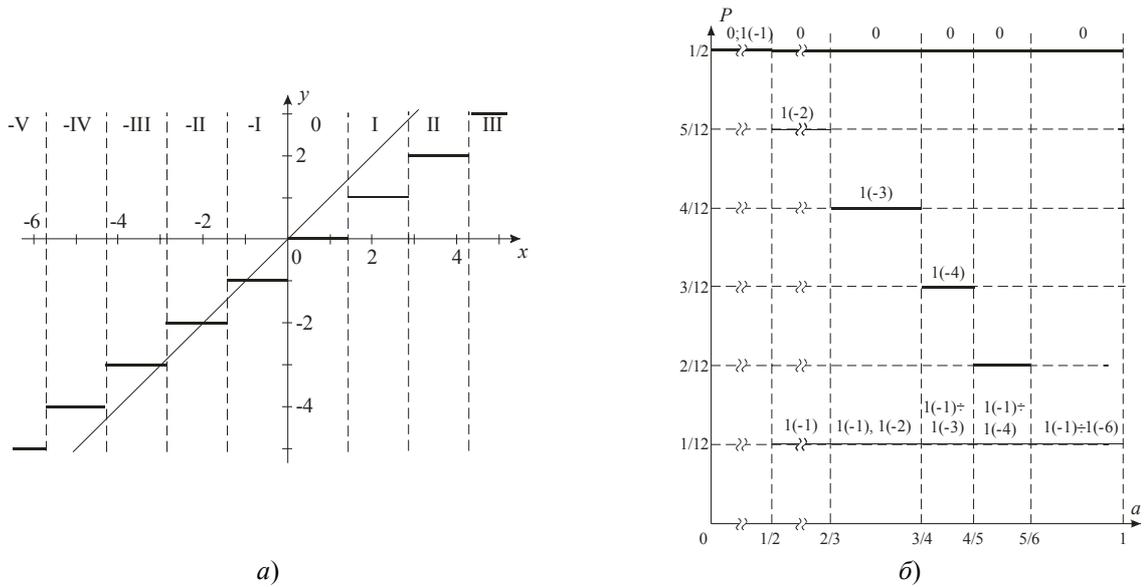


Рис. 1. Диаграмма Ламерея (а) и вероятностная диаграмма автономного ФНЧ при  $L = 12$  (б)

Исследования показали, что для любого  $L$  при  $0 < a \leq 1/2$  в ФНЧ существуют равновероятные: состояние покоя ( $T = 0$ ) и установившееся колебание с периодом  $T = 1$  и амплитудой  $X = -1$  (обозначается  $T = 1(-1)$ ). С увеличением параметра  $a$  наиболее вероятным становится состояние покоя (с вероятностью  $P(0) = 1/2$ ) и вместе с ним существуют колебания других амплитуд  $X \in [-N, -1]$ .

При  $a < 0$  (цепь является фильтром верхних частот (ФВЧ)), график функции последования пересекается с биссектрисой только в начале координат. Поэтому при любых значениях единственным состоянием фильтра является состояние покоя  $T = 0$ .

Если входной сигнал отличен от нуля и постоянен (т.е.  $u(n) = A$ ), то на диаграмме Ламерея график функции последования пересекает ось ординат в точке  $y = A$ , при этом  $\varphi = A$ . Рассмотрим случай  $A > 0$ . Вероятностные диаграммы при  $L = 12$  ФНЧ (при  $A = 2$ ) и ФВЧ (при  $A = 4$ ) показаны на рис. 2. Здесь  $2(R/S)$  означает колебание с периодом  $T = 2$  и мгновенными значениями  $x \in \{R, S\}$ .

Анализ колебаний для ряда значений  $L$  и  $A$  позволил найти следующие закономерности для наиболее вероятных значений величин  $x = X$  на выходе ФНЧ. Если  $1 < A < N_1$ , то на выходе ФНЧ имеем  $T = 1(X)$ , где  $A \leq X < N_1$ , если на диаграмме Ламерея точки  $X$  и  $X - 1$  принадлежат области  $X$ . Это означает выполнение условия

$$(X - A)/(X - 1) \leq a < (X + 1 - A)/X.$$

При  $A = N_1$ ,  $a \in (0; 1)$  на выходе фильтра имеем единственное установившееся колебание  $T = 1(N_1)$ .

В общем случае произвольных  $L$  и  $1 < A < N_1$  на выходе ФВЧ также имеем  $T = 1(X)$ , где однако  $1 < X < A$ , если на диаграмме Ламерея точки  $X$  и  $X - 1$  или точки  $X$  и  $X + 1$  принадлежат области  $X$ . Это означает выполнение условий

$$(X - A)/X \leq a < (X + 1 - A)/(X - 1) \tag{1}$$

или

$$(X - A)/(X + 1) \leq a < (X + 1 - A)/X. \tag{2}$$

Другим по сравнению с определенными из (1) и (2) областям параметра  $a < 0$  соответствуют наиболее вероятные паразитные колебания с периодом  $T = 2$ .

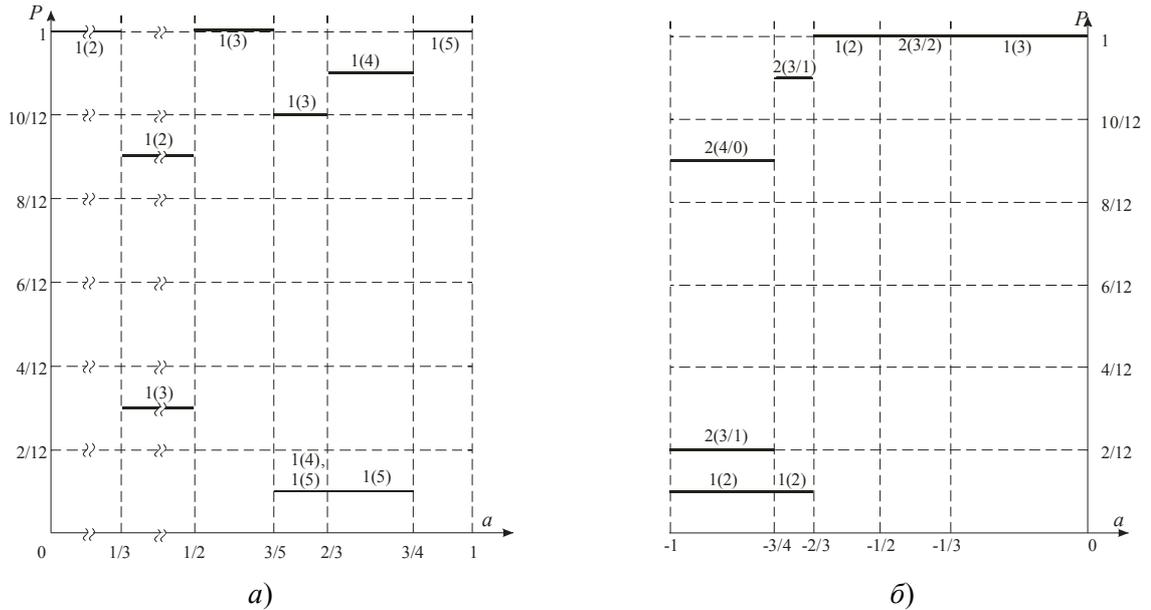


Рис. 2. Вероятностные диаграммы при  $L = 12$  ФНЧ (а) при  $A = 2$  и ФВЧ (б) при  $A = 4$

Рассмотрим случай  $A < 0$ . С помощью описанной выше методики установлено, что при  $-N + 1 < A < 0$  на выходе ФНЧ имеем колебание  $T = 1(X)$ , где  $-N < X < A$ , если на диаграмме Ламерея точки  $X$  и  $X + 1$  принадлежат области  $X$ . Это означает выполнение условия

$$(X + 1 - A)/(X + 1) < a \leq (X - A)/X.$$

При  $A \in \{-N; -N + 1\}$  имеем единственное установившееся колебание  $T = 1(-N)$ .

На выходе ФВЧ при  $-N \leq A < -1$  также имеем  $T = 1(X)$ , где однако  $A \leq X < -1$ , если на диаграмме Ламерея точки  $X$  и  $X - 1$  или точки  $X$  и  $X + 1$  принадлежат области  $X$ . Результирующее соотношение для параметра  $a$  получаются из (1) и (2) простой заменой знаков  $\geq$  и  $<$  на  $\leq$  и  $>$  соответственно.

Полученные закономерности позволяют установить зависимость  $X(a)$  для произвольных  $L$  и  $A$ . Эту зависимость можно сравнить с идеальной при  $L = \infty$ , которая рассчитывается с помощью методики, разработанной автором в [4]. Теоретические результаты подтверждены компьютерным моделированием. Если в цифровом фильтре используются дробные числа, то для применения приведенных выше закономерностей достаточно ввести новую переменную  $\bar{x} = x \cdot q$ , где  $q = 1/L$  - шаг квантования.

#### Литература

1. Рабинер Л.М., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир. 1978
2. Бутеник Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука. 1987
3. Брюханов Ю.А. Эффекты квантования в цифровых рекурсивных фильтрах первого порядка с усечением по модулю // 4-ая междунар. конф. "Цифровая обработка сигналов и ее применения". Докл. Т. 1. Москва. 2002. с.67.
4. Брюханов Ю.А. Колебания в нелинейных рекурсивных цифровых цепях первого порядка при постоянном внешнем воздействии // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1999. Т. 7. № 4. с. 29

