

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИСПЕРСИИ ОЦЕНКИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ МОЩНОСТИ

Ромашко Д.А., Стецко И.П., Фролов П.В.

Белорусский государственный университет
220050, Беларусь, Минск, пр. Скорины, 4
Тел. (37517) 209-58-81. E-mail: stetsko@bsu.by

При оценке спектральной плотности мощности (СПМ) приходится искать компромисс между точностью и временем измерения. При этом представляет интерес среднеквадратичное отклонение (СКО) оценки СПМ белого шума σ , которое может быть использовано для определения доверительного интервала. Как известно, вероятность “попадания” несмещенной оценки в окрестность $\pm\sigma$ равна 68,3%, в окрестность $\pm 2\sigma$ – 95,5% и в окрестность $\pm 3\sigma$ – 99,7% [1]. Таким образом, зная значение СКО при конкретных установках анализатора спектра, пользователь получает удобную возможность нахождения искомого компромисса.

В разработанном авторами портативном акустическом шумомере и анализаторе спектра МАНОМ-5 решена задача автоматического вычисления СКО оценки СПМ при задании конкретных установок прибора. При этом МАНОМ-5 позволяет задавать такие параметры, как произвольное время усреднения, коэффициент перекрытия периодограмм, коэффициент децимации входного сигнала (для реализации режима “спектрального окна”) и др. В приборе может быть задана произвольная функция окна, а также два типа усреднения – линейное и экспоненциальное. Кроме того, для некоторых оконных функций (Кайзера-Бесселя, Гаусса) может быть задан и параметр окна, что исключает возможность использования табличных параметров окон.

При оценке спектральной плотности мощности (СПМ) широкое распространение получил метод периодограмм. Для нахождения дисперсия оценки СПМ в случае линейного усреднения периодограмм принято использовать следующие выражения [2]:

$$D[\mathfrak{E}(f)] = \frac{S^2(f)}{K} \left[1 + 2 \sum_{j=1}^{K-1} \frac{K-j}{K} \rho(j) \right],$$

$$\rho(j) = \frac{\left[\sum_{k=0}^{L-1} w(k)w(k+jM) \right]^2}{\left[\sum_{k=0}^{L-1} w^2(k) \right]^2}, \quad (1)$$

где $D[\mathfrak{E}(f)]$ – дисперсия оценки СПМ, $S(f)$ – истинная СПМ, K – количество усредняемых периодограмм, L – размер периодограмм, M – шаг периодограмм в отсчетах (определяет перекрытие), $w(k)$ – используемое окно.

Реализованный в разработанном цифровом анализаторе спектра режим экспоненциального усреднения позволяет имитировать поведение аналогового прибора, в котором усреднение осуществляется на РС-цепочке с заданной постоянной времени. Для многих пользователей такой тип усреднения кажется более привычным и естественным.

Экспоненциальное усреднение может быть реализовано при помощи рекурсивного фильтра:

$$\mathfrak{E}_i = \alpha \cdot \mathfrak{E}_{i-1} + (1-\alpha)X_i, \quad \alpha = e^{-1/f_p T}, \quad (2)$$

где f_p – частота следования отсчетов, подлежащих усреднению (в данном случае частота следования периодограмм), равная fs/M , T – требуемая постоянная времени усреднения, \mathfrak{E}_i – оценка СПМ, X_i – усредняемые периодограммы.

Экспоненциальное усреднение может быть представлено и в нерекурсивной форме:

$$\mathfrak{E}_i = \sum_{k=0}^{\infty} X_{i-k} a_k, \quad \text{где } a_k = (1-\alpha)\alpha^k. \quad (3)$$

Дисперсию оценки СПМ можно выразить как дисперсию линейной функции периодограмм:

$$D\left[\sum a_i X_i\right] = \sum a_i^2 D[X_i] + 2 \sum_{i<j} a_i a_j K_{ij}, \quad (4)$$

где X_i – периодограммы (случайные величины), K_{ij} – корреляционные моменты случайных величин X_i и X_j .

Учитывая, что дисперсия оценки СПМ без усреднения периодограмм равна квадрату СПМ:

$$D[X_i] = S^2(f) = D, \quad (5)$$

получаем

$$D[\mathcal{S}(f)] = D\left[\sum_{i=0}^{\infty} X_i a_i\right] = D\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 + 2\sum_{i<j} a_i a_j K_{ij}. \quad (6)$$

Второе слагаемое в этом выражении отражает зависимость соседних периодограмм, если рассматривать их как случайные величины. Периодограммы могут коррелировать при наличии перекрытия.

После преобразований формула приводится к виду:

$$D[\mathcal{S}(f)] = \frac{S^2(f)}{(1+\alpha)/(1-\alpha)} \left[1 + 2\sum_{j=1}^{L/M-1} \alpha^j \rho(j)\right]. \quad (7)$$

Основываясь на формулах (1) и (7), можно провести сравнительную оценку двух видов усреднения.

В случае, если периодограммы не перекрываются, $\rho(j) = 0$ при всех значениях j . Тогда линейное усреднение уменьшает дисперсию оценки в $K = f_p T$ раз, причем T в этом случае имеет смысл времени усреднения. На практике для экспоненциального усреднения $f_p T \gg 1$, и значение величины α близко к единице. Учитывая это, дисперсия будет уменьшена примерно в $2f_p T$ раз, где T – постоянная времени усреднения. Следует отметить, что при экспоненциальном усреднении требуется большая длина выборки для достижения той же точности, что и при линейном усреднении.

В разработанном приборе в целях достижения высокой скорости обновления результатов измерений (что особенно важно при большом частотном разрешении) и более полного использования вычислительной мощности встроенного сигнального процессора, коэффициент перекрытия периодограмм устанавливается максимально возможным при заданном коэффициенте децимации сигнала. Ниже в таблице приведена зависимость СКО оценки от некоторых параметров спектроанализатора. Время усреднения подбиралось таким, чтобы скомпенсировать изменение частотного разрешения, то есть чтобы произведение $T\Delta F$ оставалось неизменным. Для экспоненциального усреднения постоянная времени устанавливалась в 2 раза меньшей, чем время линейного усреднения.

Таблица.

Коэффициент децимации	Спектральное разрешение, Гц	Коэффициент перекрытия, %	Линейное усреднение		Экспоненциальное усреднение	
			Время, сек	СКО, дБ	Постоянная времени, сек.	СКО, дБ
1	91,6	0	0,125	1,10	0,063	1,12
2	45,8	50	0,25	0,88	0,125	0,87
4	22,9	75	0,5	0,85	0,25	0,84
8	11,4	87,5	1	0,85	0,5	0,84
16	5,7	93,75	2	0,85	1	0,84
32	2,86	96,88	4	0,85	2	0,84
64	1,43	98,44	8	0,85	4	0,84
128	0,72	99,22	16	0,85	8	0,84
256	0,36	99,61	32	0,85	16	0,84
512	0,18	99,8	64	0,85	32	0,84

СКО белого шума, пропущенного через фильтр с эффективной полосой пропускания ΔF и устройство линейного усреднения со временем усреднения T , может быть вычислено по формуле:

$$\varepsilon = 10 \lg \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\Delta F \cdot T}} \right), \quad (8)$$

где ε – СКО в дБ. Для параметров, приведенных в таблице, расчетное значение СКО равно 1,12 дБ.

Из таблицы видно, что увеличение коэффициента перекрытия более 75% не приводит к уменьшению дисперсии оценки. Однако, это позволяет обеспечить для пользователя высокую скорость обновления информации, что особенно актуально при большом частотном разрешении.

Литература

1. Дженкинс Г., Ваттс Д., Спектральный анализ и его приложения, изд-во «Мир», 1971.
2. Рабинер Л., Голд Б., Теория и применение цифровой обработки сигналов, М.: Мир, 1978.