

## ИССЛЕДОВАНИЕ ЦИФРОВОЙ СИСТЕМЫ ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Султанов Б.В., Щербаков М.А., Колотков А.Ю., Дорошкевич В.В., Колготин П.В.

Пензенский государственный университет  
440017, Пенза, ул. Красная, 40, (841-2)36-82-23, [BV\\_SULTANOV@mail.ru](mailto:BV_SULTANOV@mail.ru)

Объектом исследования являются системы фазовой синхронизации (СФС) с равномерной дискретизацией [1], которые представляют собой дискретные аналоги цифровых систем фазовой синхронизации (ЦСФС) с аналого-цифровым преобразователем (АЦП) до контура регулирования, получаемые в предположении бесконечной разрядности АЦП. Подобные системы используются, например, при когерентном приёме сигналов с различными видами модуляции в составе устройств техники связи, применяемых в телекоммуникационных системах (в частности, при построении цифровых модемов и эхокомпенсаторов [2]).

Следуя методике, изложенной в работе [1], можно показать, что математической моделью СФС 3-го порядка является следующее нелинейное разностное уравнение:

$$\psi[k] - 3\psi[k-1] + 3\psi[k-2] - \psi[k-3] + k_1 \sin \psi[k-1] + k_2 \sin \psi[k-2] + k_3 \sin \psi[k-3] = \varphi[k] - 3\varphi[k-1] + 3\varphi[k-2] - \varphi[k-3] - k_1 n_{\text{ш}}[k-1] - k_2 n_{\text{ш}}[k-2] - k_3 n_{\text{ш}}[k-3], \quad (1)$$

где  $k_1 = \beta + \mu + \gamma$ ,  $k_2 = -(2\beta + \mu)$ ,  $k_3 = \beta$ , а  $\beta, \mu, \gamma$  - соответствующие масштабирующие коэффициенты цифрового фильтра СФС, определяющего порядок и свойства этой системы [3].

Условием асимптотической устойчивости подобных систем, является расположение нулей характеристических полиномов (корней характеристических уравнений) их линейного приближения на комплексной плоскости внутри единичной окружности [4]. Для определения областей асимптотической устойчивости рассматриваемой ЦСФС целесообразно применить разработанный в теории автоматического регулирования метод D-разбиения [5], несколько видоизменив его применительно к анализу дискретных систем, описываемых в операторной форме с помощью Z-преобразования.

При отсутствии шума ( $n_{\text{ш}} = 0$ ) и в предположении  $\sin(\bullet) = (\bullet)$  (в линейном приближении) уравнение (1) принимает вид:

$$\psi[k] - (3 - k_1)\psi[k-1] + (3 + k_2)\psi[k-2] - (1 - k_3)\psi[k-3] = \varphi[k] - 3\varphi[k-1] + 3\varphi[k-2] - \varphi[k-3]. \quad (2)$$

Тогда передаточная функция линеаризованной системы по фазовой ошибке  $H_{\psi^3}(z)$  определяется по временному алгоритму (2) как:

$$H_{\psi^3}(z) = \frac{1 - 3z^{-1} + 3z^{-2} - z^{-3}}{1 - (3 - k_1)z^{-1} + (3 + k_2)z^{-2} - (1 - k_3)z^{-3}} = \frac{z^3 - 3z^2 + 3z - 1}{z^3 - (3 - k_1)z^2 + (3 + k_2)z - (1 - k_3)}.$$

При этом характеристическое уравнение исследуемой ЦСФС имеет вид:

$$z^3 - (3 - k_1)z^2 + (3 + k_2)z - (1 - k_3) = 0. \quad (3)$$

Задачей анализа является выявление областей значений параметров системы, при которых все корни уравнения (3) на комплексной плоскости находятся внутри единичной окружности. В качестве таких параметров при исследовании взяты коэффициенты цифрового фильтра  $\beta, \mu, \gamma$ .

При использовании метода D-разбиения для исследования устойчивости линеаризованной системы в функции от трёх параметров разбиение необходимо вести в плоскости двух из них при фиксированном третьем. Двумерные границы областей устойчивости в каждой такой плоскости формируются D-кривой и особыми прямыми в соответствии с их штриховкой. Набор таких плоскостей при всех возможных значениях третьего параметра даст полную картину пространственной области устойчивости.

Осуществим переход из комплексной плоскости в область параметров системы подставив в (3)  $z = \exp(j\omega_0)$ , где  $\omega_0 = 2\pi f/f_d$  - безразмерный аргумент образующего единичного радиус-вектора, и приравняв нулю действительную и мнимую части получившегося выражения:

$$\begin{cases} k_1 \cos 2\omega_0 + k_2 \cos \omega_0 = -\cos 3\omega_0 + 3\cos 2\omega_0 - 3\cos \omega_0 + 1 - k_3 \\ k_1 \sin 2\omega_0 + k_2 \sin \omega_0 = -\sin 3\omega_0 + 3\sin 2\omega_0 - 3\sin \omega_0. \end{cases} \quad (4)$$

Подставляя в (4) значения  $k_1, k_2, k_3$ , выраженные через коэффициенты цифрового фильтра  $\beta, \mu, \gamma$  и принимая  $\beta$  в качестве задаваемого параметра, получаем:

$$\begin{cases} (\cos 2\omega_0 - \cos \omega_0)\mu + (\cos 2\omega_0)\gamma = -\cos 3\omega_0 + 3\cos 2\omega_0 - 3\cos \omega_0 - \beta \cos 2\omega_0 + 2\beta \cos \omega_0 - \beta + 1 \\ (\sin 2\omega_0 - \sin \omega_0)\mu + (\sin 2\omega_0)\gamma = -\sin 3\omega_0 + 3\sin 2\omega_0 - 3\sin \omega_0 - \beta \sin 2\omega_0 + 2\beta \sin \omega_0. \end{cases} \quad (5)$$

Для нахождения уравнения D-кривой необходимо найти общее решение системы (5).

Определители системы (5) имеют вид:

$$\Delta_0 = -\sin \omega_0, \Delta_\mu = (\beta - 1)(2 \sin \omega_0 - \sin 2\omega_0), \Delta_\gamma = \beta(-2 \sin \omega_0 + \sin 2\omega_0) \quad (6)$$

На основании выражений (6) можно записать выражения для решения системы (5):

$$\begin{cases} \mu = 4(1 - \beta)2 \sin^2(\omega_0/2) & (7) \\ \gamma = 2\beta(1 - \cos \omega_0). & (8) \end{cases}$$

Соотношения (7), (8) представляют собой параметрические уравнения кривой D-разбиения в плоскости параметров  $\mu$  и  $\gamma$  при фиксированном параметре  $\beta$  в интервале  $(0 \div \pi)$ . В виду чётности и периодичности относительно  $\omega_0$  функций, представленных в правых частях соотношений (7) и (8), при изменении  $\omega_0$  в диапазоне  $(\pi \div 2\pi)$  получается та же ветвь D-кривой, что и при  $\omega \in (0 \div \pi)$ , пробегаемая в обратном направлении.

Выражая из (8)  $\cos \omega_0 = (2\beta - \gamma)/2\beta$  и подставляя это выражение в (7), после упрощения получаем уравнение кривой D-разбиения в явном виде:  $\gamma = \frac{\beta}{1-\beta} \mu$  (9)

Из анализа определителей (6) видно, что они обращаются в ноль при  $\omega_0 = 0$  и  $\omega_0 = \pi$ . Это говорит о наличии на диаграмме D-разбиения двух особых прямых. Уравнение первой из них, соответствующей  $\omega_0 = 0$ , получается путём подстановки в (3) значения  $z = \exp(j0) = 1$  при условии  $k_1 = \beta + \mu + \gamma$ ,  $k_2 = -(2\beta + \mu)$ ,  $k_3 = \beta$  и имеет вид:

$$k_2 = -k_1 - k_3 \text{ или } \gamma = 0. \quad (10)$$

Аналогично уравнение второй особой прямой находится с помощью подстановки  $z = \exp(j\pi) = -1$  в (3) при условии  $k_1 = \beta + \mu + \gamma$ ,  $k_2 = -(2\beta + \mu)$ ,  $k_3 = \beta$ :

$$k_2 = k_1 + k_3 - 8 \text{ или } \gamma = 8 - 4\beta - 2\mu. \quad (11)$$

Так как в качестве фиксированного параметра выбран параметр  $\beta$ , то D-разбиение необходимо вести в плоскости  $\gamma - \mu$ . Набор таких плоскостей при различных  $\beta$  даст полную картину пространственной области устойчивости.

Осуществим предварительный анализ выражений для D-кривой.

Выражение (9) для D-кривой можно записать в виде:  $\gamma = k\mu$ , где  $k = \beta/(1 - \beta)$ .

Видно, что зависимость, представленная последним равенством, имеет следующие характерные зоны:  $\beta < 0$ ,  $0 < \beta < 1$ ,  $\beta = 1$  и  $\beta > 1$ . (12)

Рассмотрим сначала случай  $0 < \beta < 1$ . Для определённости положим  $\beta = 0,5$  и построим график D-кривой (9) и двух особых прямых (10), (11). Результат показан на рисунке 1.

Штриховка кривых D-разбиения и особых прямых выполнена по правилам, приводимым в [5] для непрерывных систем, с той лишь разницей, что диапазон изменения  $\omega_0$  является не  $-\infty \div 0 \div \infty$ , а  $0 \div \pi \div 2\pi$ .

Таким образом, претендентом на область устойчивости будет область внутри треугольника АБД. Внутри этой области будет 3 корня, лежащих внутри единичной окружности на Z-плоскости. Распределение корней в других областях также обозначено на рисунке 1. Численное решение уравнения (3) при условии  $k_1 = \beta + \mu + \gamma$ ,  $k_2 = -(2\beta + \mu)$  и  $k_3 = \beta$  подтверждает такое распределение корней.

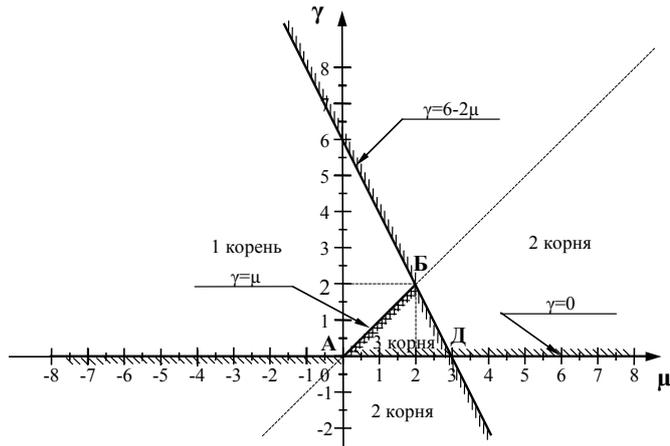


Рис. 1 - Диаграмма D-разбиения в плоскости параметров  $\mu$  и  $\gamma$ , при  $\beta = 0,5$

Отметим, что при  $\beta \rightarrow 0$ , коэффициент  $k = \beta/(1 - \beta)$  тоже стремится к 0. При этом D-кривая будет поворачиваться по часовой стрелке вокруг начала координат и при  $\beta = 0$  займёт положение оси абсцисс  $\mu$  (рисунок 1), т.е. область устойчивости при  $\beta = 0$  исчезнет.

При дальнейшем уменьшении  $\beta$ , т.е. при  $\beta < 0$ , D-кривая, продолжая вращаться по часовой стрелке, пересекает ось абсцисс  $\mu$  и будет находиться в зоне, где модуль одного из 3х корней уравнения (3) больше единицы. Поэтому при  $\beta < 0$  зоны устойчивости не будет.

При  $\beta \rightarrow 1$  D-кривая будет поворачиваться против часовой стрелки, приближаясь сколь угодно близко к оси ординат  $\gamma$ , тем самым сужая область устойчивости.

Особая прямая (11) при изменении  $\beta$  будет перемещаться параллельно самой себе.

Координаты точки А определяются из (9), (10) и равны:  $\mu_A = 0, \gamma_A = 0$ . (13)

Координаты точки В, определяемые из (9), (11), равны:  $\mu_B = 4(1 - \beta)$  и  $\gamma_B = 4\beta$ . (14)

Координаты точки Д, определяемые из (10), (11), равны:  $\mu_D = 4 - 2\beta$  и  $\gamma_D = 0$ . (15)

Рассмотрим случай  $\beta > 1$ , положив для примера  $\beta = 1,5$  и построив рисунок 2, аналогичный рисунку 1.

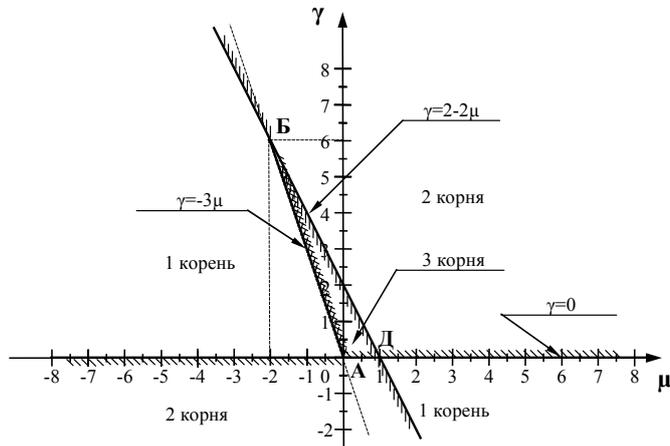


Рис. 2 - Диаграмма D-разбиения в плоскости параметров  $\mu$  и  $\gamma$ , при  $\beta = 1,5$

Как и для предыдущего случая (рисунок 1) в соответствии со штриховкой претендентом на область устойчивости будет область, ограниченная треугольником АБД, внутри которой будет 3 корня уравнения (3), лежащих внутри единичной окружности на Z-плоскости. Число таких корней в других зонах в соответствии с правилами [5] также показано на рисунке 2. Такое распределение корней подтверждает численное решение при соответствующих  $\beta, \mu$  и  $\gamma$  уравнения (3) при условии  $k_1 = \beta + \mu + \gamma$ ,  $k_2 = -(2\beta + \mu)$  и  $k_3 = \beta$ .

Рассмотрим, как будет изменяться зона устойчивости, соответствующая диапазону  $\beta > 1$ .

При изменении  $\beta$  от 1 до 2 коэффициент  $k = \frac{\beta}{1-\beta}$  в (9) будет изменяться от  $k = \infty$  при  $\beta \rightarrow 1$  до  $k = -2$  при  $\beta = 2$ . D-кривая (9) будет при этом поворачиваться вокруг начала координат против часовой стрелки от положения бесконечно близкого к оси  $\gamma$  до положения  $\gamma = -2\mu$ .

Особая прямая (11) будет по-прежнему перемещаться параллельно самой себе от положения, соответствующего  $\beta = 1$ , до положения, когда она пройдет через начало координат при  $\beta = 2$ . При этом из (11)  $\gamma = -2\mu$ . Таким образом, особая прямая (11) совпадает с D-кривой. Зона устойчивости при этом исчезает. При дальнейшем росте  $\beta$ , т.е. при  $\beta > 2$  зоны устойчивости не будет, т.к. особая прямая (11) будет находиться с незаштрихованной стороны D-кривой.

Координаты точек Б и Д как и для предыдущего случая находятся из (14) и (15).

Следует отметить, что при  $1 < \beta < 2$  значения  $\mu$  отрицательны.

Таким образом, условия асимптотической устойчивости для ЦСФС третьего порядка выражаются следующими соотношениями:

1) при  $0 < \beta < 1$ :

$$\begin{cases} 0 < \gamma < \frac{\beta}{1-\beta} \mu & \text{при } 0 < \mu \leq 4(1-\beta) \\ 0 < \gamma < 8 - 4\beta - 2\mu & \text{при } 4(1-\beta) < \mu \leq 4 - 2\beta \end{cases}$$

2) при  $1 < \beta < 2$ :

$$\frac{\beta}{1-\beta} \mu < \gamma < 8 - 4\beta - 2\mu \quad \text{при } 4(1-\beta) < \mu \leq 0$$

Полученные результаты могут служить основой для дальнейшего анализа характеристик рассмотренного класса ЦСФС с учётом их нелинейности и наличия шума.

#### Литература

- 1 Султанов Б. В., Щербаков М. А., Захаренков В. Е., Дорошкевич В. В. Математические модели цифровых систем фазовой синхронизации с равномерной дискретизацией // Доклады 4-й Международной Конференции «Цифровая обработка сигналов и ее применения». – М., 27 февраля – 1 марта 2002. – Т.1 – с.106–109.
- 2 Бочков В. К. и др. Двухпроводный дуплексный модем // Электросвязь. – 2000. – № 7. – с. 35 – 38.
- 3 Линдсей У. Ч., Цзе Цзамин. Обзор цифровых систем фазовой автоподстройки частоты // ТИИЭР. – 1981. – Т. 69. – № 4. – С. 12 – 33.
- 4 Султанов Б. В., Щербаков М. А. Анализ цифровых систем фазовой синхронизации на основе функциональных разложений Вольтера. – Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2002. – 172 с.
- 5 Егоров К.В. Основы теории автоматического регулирования – М., «Энергия», 1967. – 648 с.

#### RESEARCH OF THE THIRD ORDER DIGITAL PHASE-LOCKED LOOP

Shcherbakov M., Sultanov B., Kolotkov A., Doroshkevich V., Kolgotin P.

Penza State University

Krasnaya 40, Penza 440017, Russia, (841-2) 36-82-23, [BV\\_SULTANOV@mail.ru](mailto:BV_SULTANOV@mail.ru)

The subject of inquiry is the third order digital phase-locked loop (DPLL) with even digitization and with analog-to-digital conversion up to a closed loop of a PLL.

The mathematical model of such system is the next nonlinear difference equation:

$$\begin{aligned} \psi[k] - 3\psi[k-1] + 3\psi[k-2] - \psi[k-3] + k_1 \sin \psi[k-1] + k_2 \sin \psi[k-2] + k_3 \sin \psi[k-3] = \\ = \varphi[k] - 3\varphi[k-1] + 3\varphi[k-2] - \varphi[k-3] - k_1 n_{ш}[k-1] - k_2 n_{ш}[k-2] - k_3 n_{ш}[k-3], \end{aligned}$$

where  $k_1 = \beta + \mu + \gamma$ ,  $k_2 = -(2\beta + \mu)$ ,  $k_3 = \beta$ , and  $\beta, \mu, \gamma$  - scalable coefficients of PLL digital filter determining the order and characteristics of this system.

The inquiry task is range of  $\beta, \mu, \gamma$  parameters values, at which all characteristic equation of concerned discrete nonlinear system linear approximation roots is within complex plane unit circumference, detection. It is used D-decomposition method developed in automatic control theory to find domains of asymptotic stability of concerned DPLL.

In conformity with three parameters D-decomposition method decomposition is necessary be conducting in a two of them plane during the third one is settled. Two-dimensional boundaries of stability ranges in each such plane

are formed by D-curve and singular lines in conformity with there hatching. Aggregate of such planes during the third parameter accepts all probable values gives full picture of three-dimensional stability range.

By inquiry results D-curve equation in an explicit form in a  $\mu$  and  $\gamma$  parameters plane during the  $\beta$  parameter is settled in  $(0 \div \pi)$  interval represents a relation:  $\gamma = \frac{\beta}{1-\beta} \mu$ . At change  $\omega_0$  in  $(\pi \div 2\pi)$  interval the same D-curve branch results, as at  $\omega \in (0 \div \pi)$ , but it runs in the opposite direction.

There are two singular lines on the D-decomposition diagram too. The first one equation, corresponding to  $\omega_0 = 0$ , looks like:  $\gamma = 0$ .

The second line equation, corresponding to  $\omega_0 = \pi$ :  $\gamma = 8 - 4\beta - 2\mu$

D-decomposition curves and singular lines hatching at building is carried out by rules brought for continuous systems, with that only a difference that the range of  $\omega_0$  change is not  $-\infty \div 0 \div \infty$ , but  $0 \div \pi \div 2\pi$ .

The full picture of the third order digital phase-locked loop three-dimensional stability range by inquiry results is expressed as follows:

1) if  $0 < \beta < 1$ :

$$\begin{cases} 0 < \gamma < \frac{\beta}{1-\beta} \mu & \text{if } 0 < \mu \leq 4(1-\beta) \\ 0 < \gamma < 8 - 4\beta - 2\mu & \text{if } 4(1-\beta) < \mu \leq 4 - 2\beta \end{cases}$$

2) if  $1 < \beta < 2$ :

$$\frac{\beta}{1-\beta} \mu < \gamma < 8 - 4\beta - 2\mu \quad \text{if } 4(1-\beta) < \mu \leq 0$$

Introduced in the report the results can form the basis for the analysis of the characteristics of the reviewed DPLL class with the assumption of their real nonlinearity and noise presence.

---