

# Алгоритм обработки ультразвуковых сигналов с линейно-частотной модуляцией при нелинейном распространении акустических волн в биологических тканях

Бененсон З.М., Елизаров А.Б.

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Российской академии наук

## 1. Введение

Использование эффекта нелинейного распространения волны в методе визуализации тканевой гармоники позволяет существенно уменьшить искажение диаграммы направленности передающей апертуры на второй гармонике из-за различных артефактов и тем самым улучшить контрастность изображения.

Однако при этом уровень сигнала второй гармоники снижается по сравнению с уровнем сигнала первой гармоники, а необходимость фильтрации сигнала первой гармоники приводит к значительному увеличению длительности импульсного сигнала.

С целью увеличения уровня сигнала второй гармоники и значительного подавления сигнала первой гармоники при малой длительности импульса в настоящей работе проведено аналитическое и численное исследование нелинейного распространения импульсного акустического сигнала с линейно-частотной модуляцией (ЛЧМ). На основе исследования предложен алгоритм декодирования сигнала (сжатия импульса). В работе используется трехмерное преобразование Фурье для приближенного решения нелинейного уравнения акустики с последовательной процедурой выражения сигналов первой и второй гармоник. Представление решения в пространственно-временной области естественно определяет алгоритм сжатия импульса при ЛЧМ-модуляции, оно удобно для выбора фильтра высоких частот и позволяет получать аналитические оценки основных характеристик сигнала второй гармоники.

Работа выполнена по проекту РФФИ № 05-01-00325.

## 2. Формулы для вычисления второй гармоники с учетом ЛЧМ-модуляции

Уравнение для Фурье-преобразования давления  $\hat{P}(x, y, z, \omega)$  с учетом нелинейности среды и дисперсного затухания в биологических тканях представим в виде:

$$\left( \nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} (1 + 2\alpha i) \right) \hat{P} + \frac{\beta}{\rho_0 c^4} \omega^2 \left( \hat{P} \otimes_{\omega} \hat{P}(x, y, z, \omega) \right) = 0, \quad (1)$$

где  $\omega$  — угловая частота,  $x, y, z$  — декартовы координаты,  $\alpha$  — коэффициент затухания,  $\beta$  — параметр нелинейности,  $\rho_0$  — средняя плотность среды,  $c$  — средняя скорость звука. Это уравнение получается из исходного нелинейного уравнения распространения давления звука  $P(x, y, z, t)$  [1].

Начальные условия для (1) с учетом ЛЧМ-модуляции имеют вид:

$$\hat{P}(x, y, 0, \omega) = \hat{A}(x, y, \omega) F(\omega) P_0, \quad (2)$$

где  $\hat{A}$  — комплексная амплитуда аподизации апертуры, учитывающая фокусировку,  $P_0$  — амплитуда начального давления,  $F(\omega)$  — Фурье-преобразование функции ЛЧМ-модуляции:

$$F(\omega) = K_C \exp(-\mu(\omega - \omega_0)^2), \quad \mu = \mu_1 + i\mu_2, \quad (3)$$

$$\mu_1 = \frac{1}{4(1/T^2 + T^2\chi^2)}, \quad \mu_2 = \frac{\chi T^2}{4(1/T^2 + T^2\chi^2)}, \quad K_C = \frac{1}{\sqrt{2(1/T^2 - i\chi)}}.$$

Здесь  $T$  — длительность импульса возбуждения,  $\omega_0$  — средняя частота.

Мы применим пространственно-спектральный метод как для аналитического, так и для численного решений (1), используя итерационный процесс, при котором сначала вычисляется поле первой гармоники, затем поле второй гармоники с подстановкой в последний член (1) функции первой гармоники.

Фурье-преобразование  $\hat{P}_1$  поля первой гармоники по  $x$  и  $y$  определяется следующей формулой [2]:

$$\hat{P}_1(\Omega_x, \Omega_y, z, \omega) = P_0 F(\omega) \hat{P}_{1,l}(\Omega_x, \Omega_y, z, \omega), \quad (4)$$

$$\text{где } \hat{P}_{1,l}(\Omega_x, \Omega_y, z, \omega) = \hat{A}_1(\Omega_x, \Omega_y, z, \omega) \exp \left( iz \left( \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \Omega_x^2 - \Omega_y^2} + i\alpha\omega \right) \right),$$

$\hat{A}_1(\Omega_x, \Omega_y, \omega)$  — преобразование Фурье  $A(\bullet)$  по  $x$  и  $y$ ,

$\Omega_x, \Omega_y$  — пространственные частоты.

Пространственное преобразование Фурье поля второй гармоники  $\hat{P}_2$  определяется как решение уравнения

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\omega^2}{c^2} (1 + 2\alpha i) - \Omega_x^2 - \Omega_y^2 \right) \hat{P}_2 = f_r(\Omega_x, \Omega_y, z, \omega), \quad (5)$$

где  $f_r(\Omega_x, \Omega_y, z, \omega) = K_r \omega^2 \int P_{1,l}(\Omega_x, \Omega_y, z, \omega') \otimes_{\Omega_x, \Omega_y} P_{1,l}(\Omega_x, \Omega_y, z, \omega - \omega') F(\omega) F(\omega - \omega') d\omega'$ ,

$$K_r = -\frac{\beta}{\rho_0 c^4} P_0^2 K_c^2.$$

Функция  $f_r(\bullet)$  преобразуется к виду:

$$f_r(\bullet) = K_r \omega^2 \exp\left(-\frac{1}{2} \mu (\omega - 2\omega_0)^2\right) \times \\ \times \int \hat{P}_{1,l}(\Omega_x, \Omega_y, z, \omega') \otimes_{\Omega_x, \Omega_y} \hat{P}_{1,l}(\Omega_x, \Omega_y, z, \omega - \omega') \exp\left(-\frac{1}{2} \mu (\omega - 2\omega')^2\right) d\omega'. \quad (6)$$

Оценки показывают, что при

$$|\Omega_x|_{\max}, |\Omega_y|_{\max} < \frac{2}{3} \omega_0$$

величина (6) близка к его истинной величине при подстановке  $P_{1,l}(\bullet, z, \omega/2)$  и поэтому частотная характеристика  $f_r$  по временной частоте  $\omega$  определяется первым экспоненциальным множителем в (6).

Если принять алгоритм сжатия сигнала, состоящий в умножении  $\hat{P}_1 + \hat{P}_2$  на  $\exp(i\mu_2(\omega - \omega_0)^2)$ , то длительность сжатого импульса второй гармоники определяется коэффициентом  $\sqrt{\mu_1/2}$  и в  $\sqrt{2}$  раз меньше длительности сжатого импульса первой гармоники.

Решение (5) для выходящей волны ( $z > 0$ ) имеет вид:

$$\hat{P}_2(\Omega_x, \Omega_y, z, \omega) = \frac{1}{\varphi(\bullet)} \exp(iz(\varphi + i\alpha\omega)) \int \exp(-iz'(\varphi + i\alpha\omega)) f_r dz', \quad (7)$$

где  $\varphi(\bullet) = \sqrt{\omega^2/c^2 - \Omega_x^2 - \Omega_y^2}$ . Из (7) следует, что затухание волны такое же, как при линейном распространении, что указано в [3].

3. Приближенное аналитическое решение для поля второй гармоники в случае гауссовой аподизации  
Полагаем в (7), что

$$\varphi(\bullet) = \frac{\omega}{c} - \frac{1}{2} (\Omega_x^2 + \Omega_y^2) \frac{c}{\omega}, \quad \hat{A}(\bullet) = K_1 K_2 \exp(-(\alpha_1 + i\zeta_1) \Omega_x^2) \exp(-(\alpha_2 + i\zeta_2) \Omega_y^2),$$

где  $\zeta_{1,2} = -\frac{F_{1,2}c}{2\omega}$ ,  $K_{1,2} \approx \sqrt{-i \frac{F_{1,2}c}{\omega}}$ ;  $2a_1, 2a_2$  — размеры прямоугольной апертуры,  $F_1, F_2$  — фокусные расстояния.

Как было упомянуто выше, можно в (6) подставить  $P_{1,l}(\bullet, z, \omega/2)$  и получить из (7) следующую

приближенную формулу для  $\hat{P}_{2,a} = \hat{P}_2 \exp\left(\frac{1}{2} \mu (\omega - 2\omega_0)^2 - i\omega z \left(\frac{1}{c} + i\alpha\right)\right)$ :

$$\hat{P}_{2,a} = K_3 \exp(-v_1 \Omega_x^2 - v_2 \Omega_y^2), \quad (8)$$

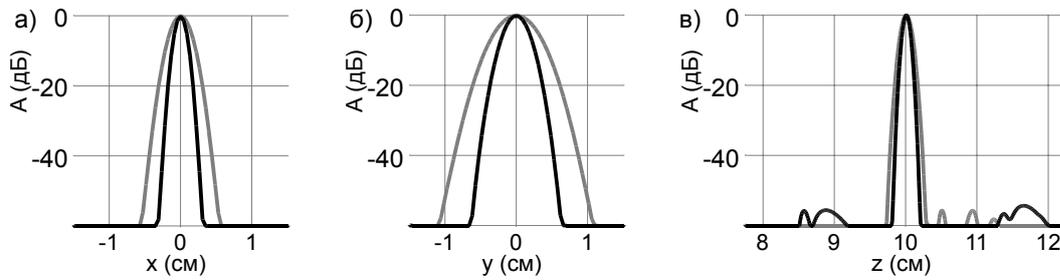
$$\text{где } K_3 = K_1 K_2 K_r \frac{\omega^2}{\varphi(\omega)} \frac{1}{2\sqrt{\mu}}, \quad v_1 = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{i(z - F_1)c}{4\omega}, \quad v_2 = \frac{\alpha_2}{2} + \frac{i(z - F_2)c}{4\omega},$$

$$f_s(\omega, F_{1,2}, a_{1,2}) = \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\left(4\alpha_1 + 1 \frac{(z - F_1)c}{2\omega}\right) \left(4\alpha_2 + 1 \frac{(z - F_2)c}{2\omega}\right)}}.$$

Функция  $f_s$  может быть приближенно определена формулой:

$$f_s(\bullet) = \psi(l_2, z) \frac{\omega}{2c} \ln \frac{z}{l_1}, \quad \text{где } l_{1,2} = \frac{4F_{1,2}^2 c}{\omega a_{1,2}^2} \text{ — размеры зоны каустики, } \psi = 1 \text{ при } F_2 = F_1 \text{ и } a_2 = a_1. \text{ При}$$

$a_1 > a_2$  и  $f_1 > f_2$ ,  $z = F_1$  значение  $\psi$  уменьшается до величины порядка  $1/2$ , если  $F_2 \sim F_1/2$ ,  $a_2 \sim a_1/2$ .



Из (8) следует, что поперечное разрешение в фокусе, определяемое величиной  $2\sqrt{\alpha_{1,2}}$ , для второй гармоники уменьшается в  $\sqrt{2}$  раза по сравнению с разрешением для первой гармоники.

4. Результаты компьютерного моделирования и аналитического исследования

При компьютерном моделировании весь диапазон дальностей разбивался на интервалы малого размера  $\Delta z$ , вычисление давления производилось последовательно по интервалам, начиная с  $z = 0$ . На каждом интервале вычислялось  $P(\bullet, z + \Delta z) = P_1(\bullet, z + \Delta z) + P_2(\bullet, z + \Delta z)$  по выражениям (4), (6) и (7) из  $P(\bullet, z)$ , посчитанного на предыдущем интервале. Вычисление свертки выполнялось с использованием быстрого преобразования Фурье. Для подавления сигнала первой гармоники решение  $\hat{P}_1 + \hat{P}_2$  умножалось на

$W_{2,A}(\omega)$ , а для сжатия импульса второй гармоники — на  $W_{2,\phi}(\omega)$ , где

$$W_{2,A} = \exp\left(-\frac{1}{2}(\omega - 2\omega_0)^2 \mu_1\right), \quad (9)$$

$$W_{2,\phi} = \exp\left(i\frac{1}{2}(\omega - 2\omega_0)^2 \mu_2\right).$$

Основные параметры при моделировании:  $\beta = 6$ ,  $P_0 = 0,5$  МПа,  $2a_1 = 1$  см,  $2a_2 = 2$  см,  $F_1 = 4; 8; 10$  см,  $F_2 = 8$  см,  $\omega_0 = 2\pi \cdot 1,7$  МГц, коэффициент затухания  $0,5$  дБ/см·МГц. Длительность импульса возбуждения  $m\tau = m \cdot (1,0; 1,4)$  мкс, где  $\tau$  — длительность сжатого импульса,  $m = 10; 20$  ( $m \approx \mu_2/\mu_1$ ,  $\mu_1 = \tau^2$ ), шаг итерационного процесса по  $z$  —  $\Delta z = 0,2$  см.

На рис. 1 и 2 представлены результаты моделирования для  $\tau = 1,0$  мкс,  $m = 10$ ,  $F_1 = 10$  см. На рис. 1а дан график зависимости амплитуды спектра излученного сигнала

Рис. 2. Диаграммы направленности по  $x$  (а) и  $y$  (б) и форма сигнала по дальности (в) при отражении от точечного отражателя на  $z = 10$  см. Серая линия — 1-я гармоника, черная линия — 2-я гармоника

$\hat{P}(x, y, z, \omega)$  от частоты в точке с координатами  $(x, y, z) = (0, 0, 10)$  см. На рис. 1б даны графики амплитуды 1-й и 2-й гармоник в зависимости от дальности на  $(x, y) = (0, 0)$ . На рис. 2 показаны диаграммы направленности по  $x$  и  $y$  и форма сигнала по дальности при отражении от точечного отражателя на  $z = 10$  см для первой и второй гармоник. Частотная фильтрация и сжатие импульса на второй гармонике производились в соответствии с (9), для первой — аналогично, умножением на коэффициент

$$W_1(\omega) = \exp\left(-(\mu_1 - i\mu_2)(\omega - \omega_0)^2\right).$$

Вычисления с использованием формулы (8) оказались близки к результатам моделирования. Моделирование подтвердило теоретический вывод о том, что диаграмма направленности на второй гармонике сужается в 1,4 раза по сравнению с диаграммой на первой гармонике. Размер точки по дальности также в 1,4 раза меньше. Уровень боковых лепестков после сжатия импульса не превышает  $-55$  дБ. Боковые лепестки обусловлены главным образом наложением на сигнал основной гармоники сигналов соседних гармоник.

Заключение

Полученные в работе аналитические зависимости позволили оценить характеристики

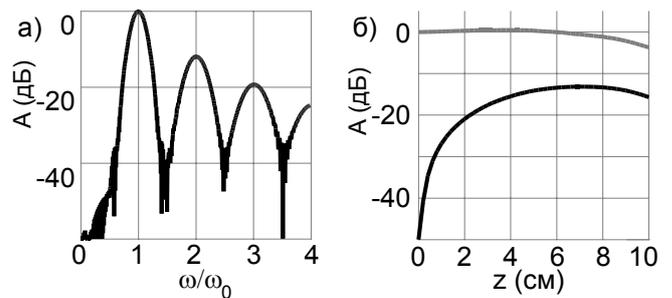


Рис. 1. а) Зависимость амплитуды  $A$  спектра излученного сигнала от частоты на  $z = 10$  см. б) Зависимость амплитуды 1-й (серая линия) и 2-й (чёрная линия) гармоник от дальности

сигнала второй гармоники, возникающего при нелинейном распространении ультразвуковых волн в биологических тканях, причём в качестве зондирующего импульса выбран ЛЧМ-модулированный сигнал. Разработанный численный алгоритм позволяет моделировать сигнал первой и второй гармоник при распространении как короткого зондирующего импульса, так и длинного ЛЧМ-модулированного акустического сигнала. Результаты аналитических оценок и численного моделирования показали возможность получения узкой сфокусированной диаграммы направленности (в 1,4 раза уже диаграммы сигнала на первой гармонике) при обеспечении низкого уровня боковых лепестков (ниже  $-55$  дБ). Сжатие импульса позволяет повысить отношение сигнал-шум в 10–20 раз в зависимости от выбранного коэффициента сжатия.

Данный метод использования ЛЧМ-модулированных сигналов рекомендуется использовать в абдоминальных исследованиях. Его использование позволит увеличить глубину области обзора при сохранении высокого пространственного разрешения.

#### Литература

1. M. F. Hamilton and D. T. Blackstock. *Nonlinear Acoustics*. Academic Press, 1998.
2. Z. M. Benenson, A. B. Elizarov, T. V. Yakovleva and W. D. O'Brien. Approach to 3D ultrasound high resolution imaging for mechanically moving large-aperture transducer based upon Fourier transform. *IEEE transactions on Ultrasound, Ferroelectric and Frequency Control*, vol. 49, pp. 1665–1685, 2002.
3. H. Torp, T. Johansen and J. S. Haugen. Nonlinear wave propagation — a fast 3D simulation method based on quasi-linear approximation of the second harmonic field. *Proceedings IEEE Ultrasonic Symposium*, pp. 1549–1552, 2002.

---

### Algorithm for chirp-modulated ultrasound signal processing in case of nonlinear propagation of acoustical waves in biological tissues

Benenson Z., Elizarov A.

Dorodnicyn Computing Centre of the Russian Academy of Sciences

The paper contains analytical and numerical investigation of nonlinear propagation of a chirp-modulated signal in biological tissues. We obtained a solution of the wave equation for 3-D Fourier transform of the second harmonic signal. The solution was estimated for the case of Gaussian apodization of the signal emitted by a transducer. This allowed deriving approximate formula that describes the second harmonic component of the signal both in 3-D space domain and in 3-D Fourier transform domain. The transmitted pulse was considered to be a chirp-modulated signal. The formula obtained permits estimating the signal magnitude, the beam width, the active area of the second harmonic formation, the first and the second harmonics magnitude ratio.

We developed a numerical simulation algorithm for nonlinear signal propagation. The algorithm is based on sequential application of the obtained nonlinear wave equation solution to the signal propagation in depth. Computations are conducted for a given small step by depth. For each next position the signal is calculated as a sum of the first and the second harmonic components, the first component being computed as the linear wave equation solution and the second one as the nonlinear equation solution with the substitution of the solution from the previous position into the right side of the equation.

On the basis of the conducted analysis we proposed and simulated an algorithm for decoding of the chirp-modulated signal (pulse compression) for both the first and the second harmonics.

Simulation was performed for parameters typical to abdominal examinations. Carrier frequency was 1.7 MHz, active transducer aperture size was  $1 \times 2$  cm, chirp-modulated signal duration was from 10.1.0 to 20.1.4 microseconds, compression coefficient was from 10 to 20. Simulation results practically corresponded to analytical estimations. Simulation confirmed theoretical conclusion of the possibility to obtain narrow focused directional diagram (1.4 times narrower than that at the first harmonic) while providing low side lobe level (below  $-55$  дБ). Pulse compression allows increasing the signal-to-noise ratio 10 to 20 times depending on the chosen compression coefficient.

This work was supported by grant 05-01-00325 from RFBR (Russia).

---