

МЕТОД ВЫДЕЛЕНИЯ ИЗЛОМОВ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛЬНОГО ВСПЛЕСКОВОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Гаврилюк А.Л., Мальцев А.П.

Уральский Государственный Технический Университет - УПИ, радиотехнический институт - РТФ

Рассматривается следующая задача: на интервале $[0, T] \subset \mathbf{R}$ задана непрерывная функция $s(t)$ из пространства $L_2(\mathbf{R})$, имеющая на $[0, T]$ конечное число точек разрыва первой производной $s'(t)$ (точки излома $s(t)$). Предполагается, что шум наблюдения аддитивен и является стационарным случайным процессом с известной дисперсией σ_n^2 , нулевым мат. ожиданием и автокорреляционной функцией $R_n(t_1, t_2) = R_n(t_2 - t_1)$. Известно разбиение интервала $[0, T]$ на отрезки вида $[t_k, t_{k+1}]$, каждый из которых содержит не более одной точки разрыва $s'(t)$. Требуется определить положение этих точек и оценить погрешность метода.

Дополнительная информация об отрезках, на которых локализованы точки разрыва, с одной стороны вытекает из возможного прикладного значения задачи (определение основного тона колебаний в речевых сигналах), с другой стороны, из-за этого же об исходном сигнале $s(t)$ более никакой априорной информации не предполагается. Разумным кажется искать решение с помощью математического аппарата, наиболее удобного для анализа нестационарных сигналов – всплескового преобразования (вейвлет-преобразования).

В работе рассмотрен случай, когда шум наблюдения $n(t)$ является равномерно распределенным, $|n(t)| \leq \varepsilon$, и некоррелированным. В возможных приложениях задачи к такому типу шума может быть отнесен шум квантования аналогового сигнала [3].

Основной результат работы формулирует следующая

Теорема. Пусть функция $s(t) \in L_2(\mathbf{R})$ имеет единственный 1-скачок (излом) величины $\Delta^1(s) = s^{(1)}(t)|_{b+0} - s^{(1)}(t)|_{b-0}$ в точке b из интервала $[0; T]$, а через $\psi(t)$ обозначен всплеск порядка $N \geq 2$, обладающий компактным носителем T_ψ . Если функция $s(t)$ наблюдается в совокупности со стационарным некоррелированным случайным процессом $n(t)$, имеющим ограниченную плотность вероятности, $|n(t)| \leq \varepsilon$, то существует метод, позволяющий по наблюдениям функции

$$w_{\tilde{s}}(a, t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \tilde{s}(t_1) \cdot \psi\left(\frac{t_1 - t}{a}\right) dt_1, \text{ где } \tilde{s}(t) = s(t) + n(t),$$

определить положение точки излома с вероятностью ошибки, не превышающей величины $3 \cdot 10^{-3}$ при выполнении неравенства $C_0 \geq \sigma_v A$, где $C_0 = \Delta^1(s) \cdot \frac{1}{2} \int_{-T_\psi}^{T_\psi} \text{sgn}(t) \cdot t \cdot \psi(t) dt$, $\sigma_v = \sigma_n \cdot \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} \|\psi\|_2$ и

$$A = 6 \cdot \left[|J| + \left(\sum_i a_i^{N+\frac{1}{2}} \right)^2 \cdot \left(\sum_m a_m^{2N+1} \right)^{-1} \right]^{1/2} \cdot \left(\sum_j a_j^{\frac{3}{2}} - \left(\sum_j a_j^{N+2} \sum_j a_j^{N+\frac{1}{2}} \right) \cdot \left(\sum_j a_j^{2N+1} \right)^{-1} \right)^{-1}, \quad \{a_j\}_{j \in J} -$$

совокупность значений масштабов, на которых вычислялись $w_{\tilde{s}}(a_j, t)$.

Доказательство теоремы и описание метода опирается на анализ асимптотики коэффициентов всплеск-преобразования при стремлении масштабирующего параметра (a) к нулю. Известны следующие результаты:

Теорема 3.15 из [1]. Пусть функция $s(t) \in L_2(\mathbf{R})$ имеет r -скачок $\Delta^r(s) = s^{(r)}(t)|_{b+0} - s^{(r)}(t)|_{b-0}$, $r < N$, в точке b . Если всплеск $\psi(t)$ порядка N обладает компактным носителем, то справедлива следующая асимптотическая оценка коэффициентов всплеск-преобразования:

$$w_s(a, b) = a^{r+\frac{1}{2}} \cdot (C \cdot \Delta^r(s) + o(1)), \text{ где константа } C \text{ не зависит от функции } s(t).$$

Теорема 3.13 из [1]. Пусть функция $s(t) \in L_2(\mathbf{R})$ принадлежит классу C^N (класс функций с непрерывными производными до порядка N включительно) в окрестности U точки b . Если всплеск

$\psi(t)$ порядка N обладает компактным носителем, то справедлива следующая асимптотическая оценка коэффициентов всплеск-преобразования: $w_s(a, b) = a^{N+\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{N!} s^{(N)}(b) + o(1) \right)$.

В работе [2] дана оценка вклада шума в коэффициенты всплеск-преобразования. Показано, что если шум не коррелирован, то на масштабах a , удовлетворяющих неравенству

$$a \geq 3 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(kt) dt \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(kt)| dt \right)^{-2},$$

шум в коэффициентах всплеск-преобразования $w_s(a, b)$ можно

считать нормально распределенным с нулевым математическим ожиданием и СКО, равным:

$$\sigma_v = \sigma_n \cdot \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(kt) dt} = \sigma_n \cdot \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} \|\psi\|_2.$$

Таким образом, задачу выделения излома в сигнале на фоне шума можно свести к классической задаче различения двух гипотез. Для каждого узла сетки, на которой взяты отсчеты сигнала, мы вычисляем коэффициенты всплескового преобразования (заменяя соответствующие интегралы интегральными суммами) и формируем две гипотезы, соответствующие поведению всплесковых коэффициентов при $a \rightarrow 0$.

Итак, зафиксируем некоторую точку b и сформулируем задачу в более общем виде. Нам необходимо разрешить две гипотезы (далее полагаем $r=1$):

$$H_0 : w_{\tilde{s}}(a) = a^{r+\frac{1}{2}} \cdot (C_0 + o(1)) + v(a) \approx a^{r+\frac{1}{2}} \cdot C_0 + v(a)$$

$$H_1 : w_{\tilde{s}}(a) = a^{N+\frac{1}{2}} \cdot (C_1 + o(1)) + v(a) \approx a^{N+\frac{1}{2}} \cdot C_1 + v(a)$$

где $v(a)$ - шум наблюдения, $C_0 = C \cdot \Delta^r(s)$, $C_1 = \frac{1}{N!} s^{(N)}(b)$ - неизвестные параметры гипотез.

Поскольку шум $v(a)$ нормально распределен, то в предположении слабой коррелированности величин $v(a_j)$ из метода максимального правдоподобия ([3]) для величины \hat{C}_1 следует такая оценка:

$$\hat{C}_1 = \left(\sum_j w_{\tilde{s}}(a_j) a_j^{N+\frac{1}{2}} \right) \cdot \left(\sum_j a_j^{N+2} \right)^{-1},$$

где a_j - значения масштабов, на которых вычислялось всплеск-преобразование.

Эта оценка будет несмещенной при правильном определении гипотезы, в противном случае:

$$M\{\hat{C}_1 | H_0\} = C_0 \cdot \sum_j a_j^{N+2} / \sum_j a_j^{2N+1}.$$

Определим дисперсию оценки для обеих гипотез:

$$D\{\hat{C}_1 | H_0\} = C_0^2 \left(\sum_{i,j} a_i^{N+2} a_j^{N+2} \right) \left(\sum_j a_j^{2N+1} \right)^{-2} + \frac{\sigma_v^2}{\sum_j a_j^{2N+1}} - \left(C_0 \sum_m a_m^{N+2} / \sum_j a_j^{2N+1} \right)^2 = \frac{\sigma_v^2}{\sum_j a_j^{2N+1}}$$

$$D\{\hat{C}_1 | H_1\} = \left(\sum_{i,j} C_1^2 a_i^{2N+1} a_j^{2N+1} + \sum_k \sigma_v^2 a_k^{2N+1} \right) \left(\sum_m a_m^{2N+1} \right)^{-2} - C_1^2 = \frac{\sigma_v^2}{\sum_m a_m^{2N+1}}.$$

Итак, для обеих гипотез дисперсия определяется только шумом, одинакова и равна:

$$D\{\hat{C}_1 | H_1\} = D\{\hat{C}_1 | H_0\} = D.$$

Далее, сформируем вспомогательную величину $F_1 = \sum_j \left(w_{\tilde{s}}(a_j) - \hat{C}_1 \cdot a_j^{N+\frac{1}{2}} \right)$.

Сумма в этом выражении включает в себя нормально распределенные величины, поэтому в первом приближении можно считать F_1 нормально распределенной случайной величиной. Найдем её характеристики в зависимости от различных гипотез.

Математическое ожидание:

$$M\{F_1|H_0\} = M\left\{\sum_j \left(a_j^{\frac{3}{2}} \cdot C_0 + v(a) - \hat{C}_1 \cdot a_j^{N+\frac{1}{2}}\right)\right\} = C_0 \left(\sum_j a_j^{\frac{3}{2}} - \sum_j a_j^{N+2} \sum_j a_j^{N+\frac{1}{2}} / \sum_j a_j^{2N+1}\right),$$

$$M\{F_1|H_1\} = M\left\{\sum_j \left(a_j^{N+\frac{1}{2}} \cdot C_1 + v(a) - \hat{C}_1 \cdot a_j^{N+\frac{1}{2}}\right)\right\} = 0.$$

И дисперсия:

$$D\{F_1|H_0\} = |J| \cdot \sigma_v^2 + D \cdot \left(\sum_j a_j^{N+\frac{1}{2}}\right)^2.$$

$$D\{F_1|H_1\} = M\left\{\left(\sum_j \left(a_j^{N+\frac{1}{2}} \cdot C_1 + v(a) - \hat{C}_1 \cdot a_j^{N+\frac{1}{2}}\right)\right)^2\right\} = |J| \cdot \sigma_v^2 + D \cdot \left(\sum_j a_j^{N+\frac{1}{2}}\right)^2$$

Заметим, что дисперсия F_1 не зависит от выбранной гипотезы и определяется только уровнем шума наблюдения. Определим теперь введенную нами вспомогательную величину как функцию временных отсчетов: $F_1 = F_1(t) = \sum_j \left(w_{\tilde{s}}(a_j, t) - \hat{C}_1(t) \cdot a_j^{N+\frac{1}{2}}\right)$.

Если $b \in [0; T]$ - искомая точка излома, то считаем $\tilde{b} \in [0; T]$ - приближение к точке b , если \tilde{b} выбрана так, что $|F_1(\tilde{b})| = \sup_{t \in [0; T]} \{|F_1(t)|\}$. Обозначим вероятность ошибки $e = P\{\tilde{b} \neq b\}$. Это выражение эквивалентно: $e = P\{|F_1(\tilde{b})| > |F_1(b)|\} = P\{|F_1(t)|_{H_0} < |F_1(t)|_{H_1}\} = P\{|F_1(t)|_{H_0} - |F_1(t)|_{H_1} < 0\}$.

Проведя соответствующие выкладки, получим конечное выражение для вероятности ошибки:

$$e = \int_0^{\infty} P_0(\xi) \cdot \Phi\left\{-\frac{\xi}{\sqrt{D_1}}\right\} d\xi = 2 \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi D_0}} \exp\left\{-\frac{(\xi-M_0)^2}{2D_0}\right\} + \frac{1}{\sqrt{2\pi D_0}} \exp\left\{-\frac{(-\xi-M_0)^2}{2D_0}\right\}\right) \cdot \Phi\left\{-\frac{\xi}{\sqrt{D_1}}\right\} d\xi \approx$$

$$2 \int_0^{3\sqrt{D_1}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi D_0}} \exp\left\{-\frac{(\xi-M_0)^2}{2D_0}\right\} + \frac{1}{\sqrt{2\pi D_0}} \exp\left\{-\frac{(\xi+M_0)^2}{2D_0}\right\}\right) \cdot \Phi\left\{-\frac{\xi}{\sqrt{D_1}}\right\} d\xi$$

Здесь $D_i = D\{F_1|H_i\}$, $M_i = M\{F_1|H_i\}$.

Вычисление значения последнего выражения требует достаточно большого количества априорных знаний о сигнале, кроме того, что не вычисляется аналитически. Поэтому ограничимся достаточно грубой оценкой следующего вида. Как было сказано, величины $\{F_1(t)\}_{t \in [0; T]}$ распределены приблизительно нормально, имеют дисперсии и математические ожидания, соответствующие гипотезам, справедливым для выбранных точек $t \in [0; T]$. Исходя из известных значений нормального распределения и последнего выражения, скажем, что вероятность ошибки не превышает величины $3 \cdot 10^{-3}$ при выполнении неравенства:

$$M\{F_1|H_0\} \geq 3\left(\sqrt{D\{F_1|H_1\}} + \sqrt{D\{F_1|H_0\}}\right).$$

Подставив полученные ранее выражения для фигурирующих в этом неравенстве величин, получим утверждение Теоремы.

Метод проверен на модельных сигналах (свертка двух прямоугольных импульсов и односторонней экспоненциальной функции – содержит три излома) с использованием всплеска МНАТ (вторая производная гауссовой кривой). Ниже приводится таблица результатов численных экспериментов (зависимость ошибки выделения излома от уровня шума).

Отношение сигнал-шум, дБ	Число ошибок в определении точек локализации изломов b_i функции $s(t)$	Максимальная ошибка
100	0	0 отсчетов
800	0	0 отсчетов
60	1	1 отсчет
40	1	1 отсчет
20	2	5 отсчетов

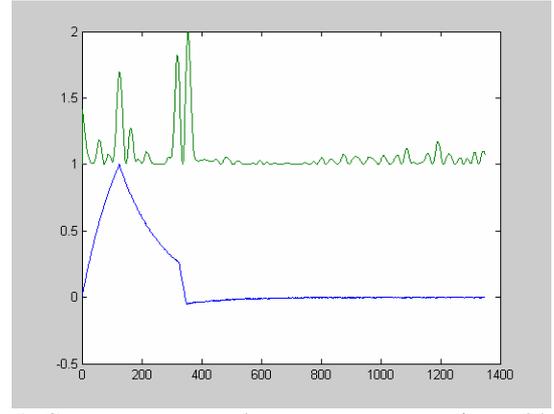
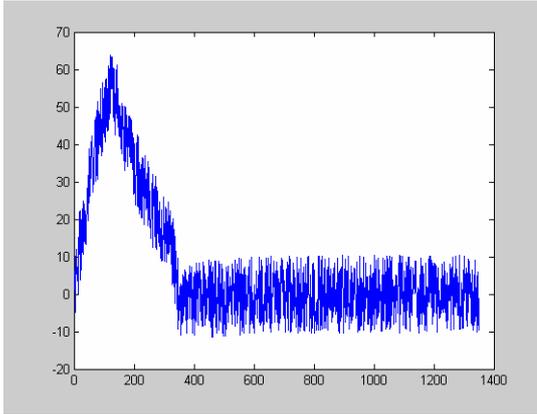


Рис. 1. Сигнал с шумом (отношение сигнал/шум 20

дБ), график вспомогательной величины $|F_1(t)|$ (верхний) и исходного незашумленного сигнала (нижний).

Литература

1. Блаттер К. Вейвлет-анализ. Основы теории // М.: «Техносфера», 2004 г
2. Гаврилюк А. Л., Мальцев А. П. О выделении изломов функции с помощью интегрального всплескового преобразования // IX Всероссийская научно-техническая Интернет-конференция «Информационные технологии и электроника».
3. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника // М.: «Радио и Связь», 1966 г.

ABOUT ALLOCATION BREAKS OF FUNCTION WITH USE CONTINUAL WAVELET TRANSFORMATIONS

Gavriliouk A., Maltsev A.

The Ural State Technical University – USTU, Radio Engineering Institute – RTF.

There is a following problem: at the interval $[0, T] \subset \mathbf{R}$ is set continuous function $s(t)$ from space $L_2(\mathbf{R})$ with have at $[0, T]$ final number sharps of the first derivative $s'(t)$. It is supposed, that noise of supervision is additive and is stationary casual process with a zero mean and autocorrelation function $R_n(t_1, t_2) = R_n(t_2 - t_1)$, $\sigma_n^2 = R(0)$. We know splitting an interval $[0, T]$ at pieces of a kind is known $[t_k, t_{k+1}]$, each of which contains no more than one sharp $s'(t)$. It is required to determine location of these points and to estimate an error of a method.

The additional information on pieces on which are located sharps, follows from possible applied value of a problem – definition the basic tone of fluctuations in speech signals. We suggest to search for the decision with the mathematical device, which is the most convenient for the analysis of non-stationary signals – wavelet transformations.

In this paper is considered the case, when noise of supervision is in regular intervals distributed, $|n(t)| \leq \varepsilon$, and non-correlated. Such the noise can be interpreted, as a noise of quantization at the analog signal.

The basic result of work consists in the following estimation: showed the opportunity of definition of break point position with probability of a mistake, not exceeding $3 \cdot 10^{-3}$, if performance of an inequality

$$C_0 \geq \sigma_v A, \text{ where } C_0 = \Delta^1(s) \cdot \frac{1}{2} \int_{-T_v}^{T_v} \text{sgn}(t) \cdot t \cdot \psi(t) dt, \sigma_v = \sigma_n \cdot \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} \|\psi\|_2 \text{ и}$$

$$A = 6 \cdot \left(|J| + \left(\sum_i a_i^{N+\frac{1}{2}} \right)^2 \cdot \left(\sum_m a_m^{2N+1} \right)^{-1} \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_j a_j^{\frac{3}{2}} - \left(\sum_j a_j^{N+2} \sum_j a_j^{N+\frac{1}{2}} \right) \cdot \left(\sum_j a_j^{2N+1} \right)^{-1} \right)^{-1},$$

$\{a_j\}_{j \in J}$ – set of values of scales on which wavelet-transformation $w_{\mathfrak{s}}(a_j, t) = \int \mathfrak{s}(u) \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \psi\left(\frac{u-t}{a}\right) du$,

$\mathfrak{s}(t) = s(t) + n(t)$ was calculated. Used wavelet $\psi(t)$ have a compact support $[-T_{\psi}, T_{\psi}]$ and possesses property:

$$\int_{-T_{\psi}}^{T_{\psi}} \psi(t) dt = \int_{-T_{\psi}}^{T_{\psi}} t \cdot \psi(t) dt = \dots = \int_{-T_{\psi}}^{T_{\psi}} t^{N-1} \cdot \psi(t) dt = 0.$$

The proof of an estimation and the description of a method of definition of break points position based on the analysis of asymptotics wavelet-coefficients with the scaling parameter (a), which aspires to zero: $a \rightarrow 0$.

Efficiency of this method is confirmed with numerical experiments at the modelling signals (convolution of rectangular pulses and unilateral exponential functions) with use of wavelet MHAT (the second derivative Gaussian function).

The further plans of authors are improvement of the received estimations and realization of possible applied application of results.

