

ВЛИЯНИЕ ТОЧНОСТИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЙ НА КАЧЕСТВО СЛЕПОЙ ОЦЕНКИ ЧАСТОТЫ И ФАЗЫ КАМ-СИГНАЛОВ

асп. Петров А. В., к. т. н., доц. Сергиенко А. Б.

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» (СПбГЭТУ «ЛЭТИ»),
197376, Россия, Санкт-Петербург, ул. проф. Попова, д. 5

Введение

Системы частотной и фазовой синхронизации являются неотъемлемой частью систем, осуществляющих когерентную обработку сигналов с цифровой линейной модуляцией. При этом в ряде случаев необходимо осуществлять слепую оценку, так как в сигнале отсутствуют служебные фрагменты, известные на приемной стороне. Алгоритмы частотной и фазовой синхронизации можно разделить на два класса: “разомкнутые” алгоритмы, реализующие вычисление оценки частоты и фазы по наблюдаемой выборке сигнала, и “замкнутые” алгоритмы, представляющие собой следящие системы с обратной связью. Для быстрой первоначальной оценки параметров, как правило, применяются “разомкнутые” методы, при этом актуальной задачей является приближение к теоретически возможным пределам, что позволяет увеличить точность оценки либо сократить длительность сигнала, необходимую для достижения заданной точности.

В [1, 2] нами была предложена идея разложения логарифма функции правдоподобия (ЛФП) в ряд по угловым гармоникам для слепой оценки фазы. Затем этот подход был применен для оценки частоты [3]. В [4, 5] рассмотрена совместная оценка частотного и фазового сдвига. В статье [5] представлены параметры данного метода при использовании оценки мощности сигнала по наблюдаемой выборке.

Целью данной статьи является анализ показателей предложенного метода в зависимости от точности представления весовых функций.

1. Постановка задачи слепой оценки частоты и фазы

Наблюдаемая выборка $\{\dot{x}(k)\}$ представляет собой отсчеты комплексной огибающей сигнала после согласованного фильтра (в соответствии с [6] предполагается, что частотный сдвиг много меньше символьной скорости):

$$\dot{x}(k) = \dot{a}(k) \exp(j(\varphi_0 + k\varphi_f)) + \dot{n}(k), \quad k = 0, \dots, K-1, \quad (1)$$

где $\dot{a}(k)$ — информационные символы, независимо и равновероятно выбираемые из сигнального созвездия $\{\dot{C}_m\}$, $m = 1, \dots, M$, M — размер КАМ-созвездия, φ_0 — фазовый сдвиг, $\varphi_f = 2\pi\Delta f T$ — межсимвольный фазовый набег из-за частотного сдвига Δf , T — длительность символа, $\dot{n}(k)$ — отсчеты комплексного дискретного белого гауссова шума, вещественная и мнимая составляющие которого имеют дисперсию, равную σ^2 . ОСШ определим как отношение дисперсии сигнала к дисперсии шума:

$$\text{SNR} = \frac{|\dot{a}(k)|^2}{2\sigma^2} = \frac{1}{2\sigma^2 M} \sum_{m=1}^M |\dot{C}_m|^2. \quad (2)$$

Требуется найти совместную оценку фазового φ_0 и частотного Δf сдвига (или, что эквивалентно, межсимвольного фазового набег φ_f). В предыдущих публикациях [1]–[5] подробно представлена процедура нахождения такой оценки. В следующем разделе приведены полученные результаты.

2. Разложение ЛФП в ряд по угловым гармоникам и предлагаемый алгоритм

Рассмотрим ЛФП, который для КАМ-сигналов записывается следующим образом:

$$\text{LLF}(\varphi_0, \varphi_f | \dot{x}(k)) = \log \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2 M} \sum_{m=1}^M \exp \left(- \frac{|\dot{x}(k) e^{-j(\varphi_0 + k\varphi_f)} - \dot{C}_m|^2}{2\sigma^2} \right) \right). \quad (3)$$

Представим отсчеты $\dot{x}(k)$ в полярных координатах, выделив в них модуль $r = |\dot{x}(k)|$ и фазу $\phi = \arg \dot{x}(k)$. Зависимость ЛФП (3) от фазы ϕ является периодической функцией с периодом, определяемым угловой симметрией созвездия и для КАМ-сигналов равным $\pi/2$. Следовательно, ЛФП можно представить в виде ряда Фурье относительно фазы ϕ , что приводит к разложению по угловым гармоникам [7]:

$$\text{LLF}(\varphi_0, \varphi_f | r e^{j\phi}) = \frac{A_0(r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(r) \cos(n\phi - n(\varphi_0 + k\varphi_f) + \theta_n(r)), \quad (4)$$

где $A_n(r)$ и $\theta_n(r)$ — зависящие от модуля отсчёта сигнала r амплитуда и фаза n -й гармоники ряда Фурье:

$$A_n(r)e^{j\theta_n(r)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \text{LLF}(0 | re^{j\phi}) e^{-jn\phi} d\phi. \quad (5)$$

Следует отметить, что при определенном угловом положении используемых на практике сигнальных созвездий все комплексные коэффициенты (5) ряда Фурье оказываются вещественными, так что $\theta_n(r) = 0$ или π . В дальнейшем будем предполагать, что $\theta_n(r) = 0$, поэтому $A_n(r)$ могут принимать отрицательные значения. ЛФП (4) для всей выборки $\{\dot{x}(k)\}$ можно, таким образом, записать в следующем виде:

$$\text{LLF}(\varphi_0, \varphi_f | \{\dot{x}(k)\}) = \sum_{k=1}^K A_0(r(k))/2 + \text{Re} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-jn\varphi_0} \dot{F}_n(n\varphi_f), \quad (6)$$

$$\dot{F}_n(v) = \sum_{k=1}^K \dot{u}_n(\dot{x}(k)) \exp(-jknv), \quad (7)$$

$$\dot{u}_n(\dot{x}(k)) = \dot{u}_n(r(k)e^{j\phi(k)}) = A_n(r(k)) \exp(jn\phi(k)), \quad (8)$$

где $\dot{F}_n(v)$ — спектр нелинейно преобразованной последовательности отсчетов сигнала $\dot{u}_n(\dot{x}(k))$, который может быть получен с помощью быстрого преобразования Фурье (БПФ) с дополнением нулями.

По правилу максимума правдоподобия для получения совместной оценки частотного и фазового сдвига необходимо максимизировать (6) по φ_f и φ_0 . В общем случае сделать это аналитически невозможно. Однако можно воспользоваться аппроксимацией ЛФП, заключающейся в усечении ряда (6). Учитывая, что отличны от нуля только коэффициенты с номерами, кратными 4 (вследствие упомянутой выше угловой симметрии КАМ-сигналов), а слагаемое с номером $n = 0$ является константой, то оставляя в (6) только первую ненулевую гармонику (с $n = 4$), получается следующее решение рассматриваемой задачи:

$$\hat{\varphi}_f = \left(\arg \max_v |\dot{F}_4(v)| \right) / 4, \quad \hat{\Delta f} = \hat{\varphi}_f / (2\pi T), \quad \hat{\varphi}_0 = \arg \dot{F}_4(4\hat{\varphi}_f) / 4. \quad (9)$$

Если в (6) оставить две гармоники ЛФП (с $n = 4$ и 8), то, воспользовавшись квадратичным приближением функции косинуса в окрестности её максимума, можно получить решение в виде:

$$F(v) = |\dot{F}_4(v)| + |\dot{F}_8(2v)| - \frac{\psi^2(v) |\dot{F}_4(v) \dot{F}_8(2v)|}{2 |\dot{F}_4(v)| + 8 |\dot{F}_8(2v)|}, \quad \psi(v) = \arg(\dot{F}_8(2v) / \dot{F}_4^2(v)), \quad (10)$$

$$\hat{\varphi}_f = \left(\arg \max_v F(v) \right) / 4, \quad \hat{\Delta f} = \hat{\varphi}_f / (2\pi T), \quad \hat{\varphi}_0 = \frac{1}{4} \left(\arg \dot{F}_4(4\hat{\varphi}_f) + \frac{2\psi(4\hat{\varphi}_f) |\dot{F}_8(8\hat{\varphi}_f)|}{|\dot{F}_4(4\hat{\varphi}_f)| + 4 |\dot{F}_8(8\hat{\varphi}_f)|} \right). \quad (11)$$

4. Точность представления весовых функций и результаты моделирования

В данной статье рассматриваются вопросы, касающиеся практической реализации предлагаемого алгоритма, а именно влияния точности представления весовых функций на качество оценки. Здесь можно выделить два аспекта — это объем памяти, необходимый для хранения значений весовых функций, и вычислительные затраты, связанные со способом интерполяции этих значений (будет рассмотрена кусочно-линейная и кусочно-постоянная интерполяция).

Приводимые на рис. 1–6 результаты получены путем моделирования, при этом использовалось стандартное крестообразное созвездие КАМ-32, длина генерируемой выборки K составляла 200 символов, для измерения дисперсии оценки использовалось усреднение по 5000 реализаций. Случайный фазовый сдвиг φ_0 и случайный частотный сдвиг Δf были равномерно распределены на интервалах $0 \dots \pi/2$ и $-1/(8T) \dots 1/(8T)$, соответственно (эти диапазоны следуют из фазовой неопределенности, неизбежной для слепых алгоритмов оценки частоты и фазы [6]). Весовые функции рассчитаны для ОСШ 18 дБ. На графиках использованы следующие обозначения:

- **CHE4** — алгоритм (9), использующий одну гармонику;
- **CHE48** — алгоритм (10)–(11), использующий две гармоники;
- **ideal** — «идеальная» реализация весовых функций;
- **piecewise-constant** — кусочно-постоянная интерполяция весовых функций;
- **piecewise-linear** — кусочно-линейная интерполяция весовых функций;
- **MCRB** — модифицированная граница Крамера-Рао для совместной оценки частотного и фазового сдвига [6].

«Идеальные» весовые функции показаны на рис. 1, 2. При реализации алгоритма они должны быть представлены в виде таблиц поиска. Желательно, чтобы занимаемый ими объем памяти был как можно меньше, поэтому нужно выбрать такой шаг дискретизации весовых функций по радиусу, при котором ещё не происходит заметного ухудшения качества оценки частоты и фазы.

Как показывает моделирование, начиная с определенного шага дискретизации происходит не только количественное (незначительное) ухудшение дисперсии оценки, но и качественное (аномальные ошибки

исчезают при большем ОСШ). Поэтому шаг (для кусочно-постоянной интерполяции) будем определять при том ОСШ, при котором исчезают аномальные ошибки в случае реализации алгоритма с «идеальными» весовыми функциями (см. рис. 3, 4). Как следует из графиков, данное ОСШ для КАМ-32 следует принять равным 18 дБ.

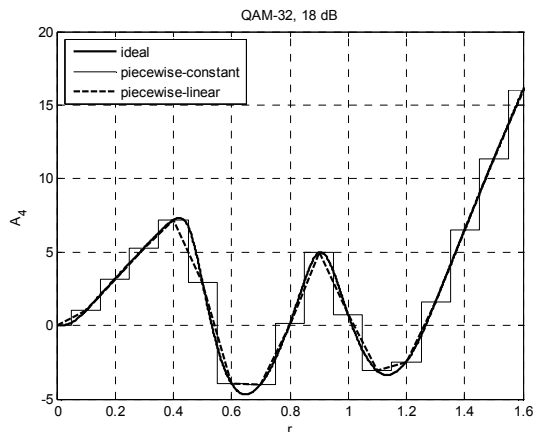


Рис. 1

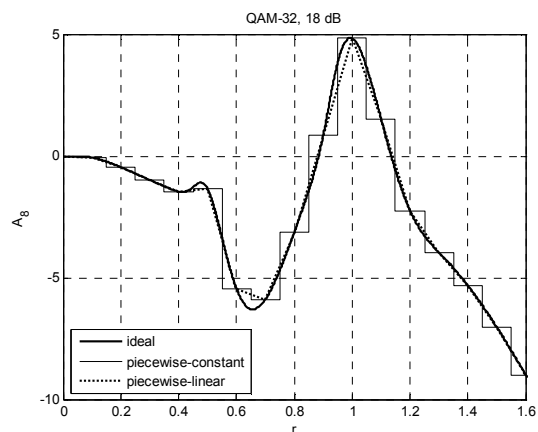


Рис. 2

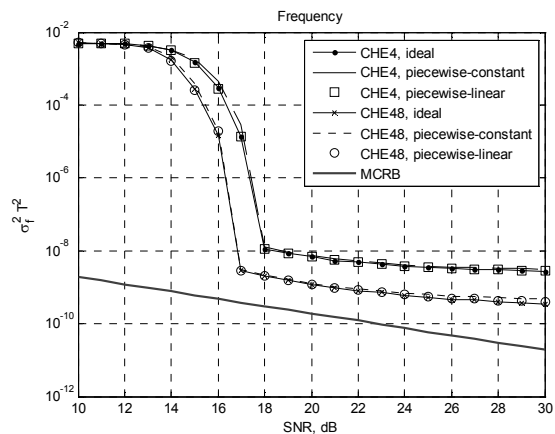


Рис. 3

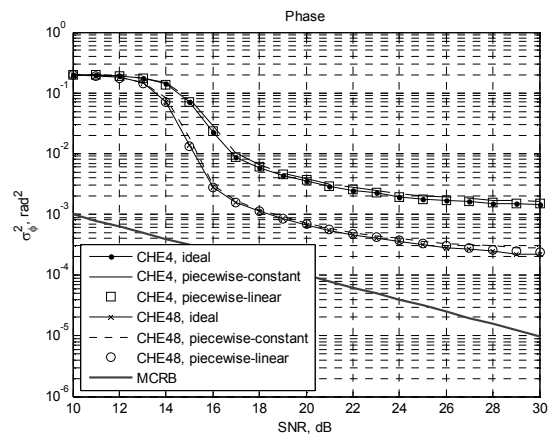


Рис. 4

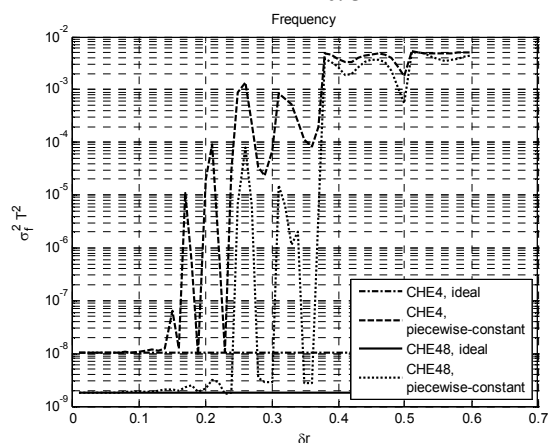


Рис. 5

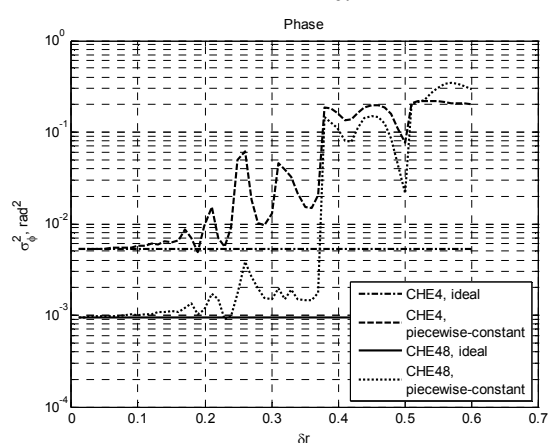


Рис. 6

Основываясь на результатах, представленных на рис. 5, 6, можно определить максимальный шаг, при котором для выбранного выше ОСШ ещё не появляются аномальные ошибки. Этот шаг (с небольшим запасом) для различных созвездий представлен в таблице 1. В ней также приводится объем памяти, необходимый для хранения одной весовой функции, в предположении, что ее значения представлены в 16-битовом формате с фиксированной точкой. В таблице также приведено расстояние между ближайшими точками при единичной мощности созвездия, ОСШ, для которого рассчитываются весовые функции, максимальное значение радиуса для расчета весовых функций, длина генерируемой выборки и ОСШ, при котором исчезают аномальные ошибки.

Из таблицы видно, что чем больше размер созвездия, тем меньший шаг дискретизации δr нужен для сохранения формы весовых функций (так как они чаще меняют свой знак). Значение шага также связано

с минимальным расстоянием между точками созвездия (d). Для квадратных КАМ имеет место соотношение $\delta r \approx d \log_2(M)/12$, а для крестообразных — $\delta r \approx d/4$. Колебательный характер кривых, представленных на рис. 5, 6, связан с тем, каким образом разбивается (а затем интерполируется) зона смены знака весовых функций в зависимости от шага дискретизации. В результате возможны более и менее «удачные» варианты разбиения. Также стоит отметить, что алгоритм СНЕ48 по сравнению с СНЕ4 менее чувствителен к точности представления весовых функций.

Таблица 1. Сводная таблица параметров для различных созвездий

Сигнальное созвездие	КАМ-16	КАМ-32	КАМ-64	КАМ-128	КАМ-256	КАМ-512
Расстояние между точками, d	0,6325	0,4472	0,3086	0,2209	0,1534	0,1101
ОСШ для расчета весовых функций, дБ	15	18	21	24	27	30
Максимальный радиус для расчета весовых функций	1,6	1,5	1,8	1,6	1,8	1,6
Длина выборки (в символах)	100	200	300	400	500	600
ОСШ, при котором исчезают аномальные ошибки, дБ	14	18	15	23	12	31
Шаг дискретизации, δr	0,2	0,1	0,15	0,05	0,1	0,025
Объем памяти, байт	18	32	26	66	38	130

Использование кусочно-линейной интерполяции вместо кусочно-постоянной позволяет улучшить ситуацию (потери по сравнению с «идеальной» реализацией практически отсутствуют, см. рис. 3, 4). Такого же улучшения можно добиться при уменьшении шага дискретизации весовых функций при кусочно-постоянной интерполяции. Таким образом, при кусочно-постоянной интерполяции требуется более частая сетка значений весовых функций, чем при кусочно-линейной интерполяции, для сохранения того же качества оценки. Поэтому можно найти компромисс между объемом памяти и вычислительными затратами.

Заключение

В данной статье были рассмотрены вопросы, касающиеся практической реализации весовых функций. Показано, что использование кусочно-постоянной аппроксимации при достаточно малом размере таблиц поиска (десять байт) практически не ухудшает качество слепой совместной оценки частотного и фазового сдвига по сравнению с «идеальной» реализацией. Экспериментальным путем была установлена зависимость между требуемым шагом дискретизации, расстоянием между точками созвездия и размером созвездия. Полученные соотношения показывают, что с увеличением размера созвездия уменьшается требуемый шаг дискретизации, при этом для крестовых созвездий он должен быть меньше, чем для квадратных. Для алгоритмов СНЕ4 и СНЕ48 требования к дискретизации являются практически одинаковыми. Что касается способа аппроксимации, то при одинаковых условиях кусочно-линейная аппроксимация дает результаты лучше, чем кусочно-постоянная, но при этом требует больших вычислительных затрат. Таким образом, можно найти компромисс между объемом памяти и вычислительными затратами.

Литература

1. Сергиенко А. Б., Петров А. В. Слепая оценка фазы сигналов с цифровой линейной модуляцией путем аппроксимации функции правдоподобия. Доклады 12-й международной конф. «Цифровая обработка сигналов и её применение» (DSPA-2010), Москва, 31 марта – 2 апреля 2010 г., с. 110–113.
2. Петров А. В., Сергиенко А. Б. Новый алгоритм слепой оценки фазового сдвига для КАМ-сигналов на основе аппроксимации функции правдоподобия. Научно-технический журнал «Цифровая обработка сигналов», №1, 2011, с. 28–32.
3. A. B. Sergienko, A. V. Petrov. Blind Carrier Frequency Offset Estimation for QAM Signals Based on Weighted 4th Power of Signal Samples. Proc. 8th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS 2010), St. Petersburg, September 17–20, 2010, pp. 278–281.
4. A. B. Sergienko, A. V. Petrov. Joint Blind Estimation of Carrier Phase and Frequency Offset for QAM Signals Using Circular Harmonic Decomposition. Proc. 36th IEEE International Conference on Acoustic, Speech and Signal Processing (ICASSP 2011), Prague, May 22–27, 2011, pp. 3460–3463.
5. Петров А. В., Сергиенко А. Б. Совместная слепая оценка частоты и фазы КАМ-сигналов без информации о мощности сигнала и отношении сигнал/шум. Доклады 13-й международной конф. «Цифровая обработка сигналов и её применение» (DSPA-2011), Москва, 30 марта – 1 апреля 2011 г., с. 242–246.
6. Mengali U., D'Andrea A. N. Synchronization Techniques for Digital Receivers. — Plenum Press, New York, 1997.
7. G. Jacovitti, A. Neri. Multiresolution Circular Harmonic Decomposition. IEEE Trans. Signal Processing, Vol. 48, No. 11, Nov. 2000, pp. 3242–3247.

WEIGHTING FUNCTIONS REPRESENTATION ACCURACY IMPACT ON QUALITY OF BLIND FREQUENCY AND PHASE OFFSET ESTIMATION FOR QAM SIGNALS

Petrov A. V., Sergienko A. B.

St. Petersburg Electrotechnical University «LETI», 5 Prof. Popov Street, St. Petersburg, 197376, Russia

In [1] we presented algorithm for joint blind estimation of carrier phase and frequency offset for signals with quadrature amplitude modulation. In this paper problems related to practical implementation, such as weighing functions representation accuracy impact on the quality of estimation, are discussed. Two aspects are considered: size of memory needed for storing weighing functions values and computational cost associated with interpolation method used.

By computer simulation it is shown that using piecewise-constant approximation with quite small size of lookup table (tens of bytes) has negligible impact on estimation quality in comparison with “ideal” implementation. Relation between required sampling step, distance between constellation points, and constellation size was established empirically. Sampling requirements for algorithms using one and two circular harmonics appeared approximately identical. Piecewise-linear approximation is better than piecewise-constant one, but its computational cost is higher. Hence it is possible to find an acceptable trade-off between memory space and computational cost.

References

1. A. B. Sergienko, A. V. Petrov. “Joint Blind Estimation of Frequency and Phase Offset for QAM Signals Without Information About Signal Power and Signal-to-Noise Ratio.” *Proc. DSPA-2011*, pp. 242–246. — in Russian.