

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ С ТРЕБУЕМОЙ АКФ НА ВЫХОДЕ КИХ-ФИЛЬТРА

Солонина А. И.

Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций
им. проф. М.А. Бонч-Бруевича

На этапе компьютерного моделирования разного рода процессов цифровой обработки сигналов возникает необходимость в создании модели случайной последовательности (случайного дискретного сигнала) с различными статистическими характеристиками, в том числе с требуемой автокорреляционной функцией (АКФ).

Как правило, моделирование подобных случайных последовательностей выполняется на основе эталонного случайного сигнала, обычно нормального или равномерного белого шума.

Для моделирования случайной последовательностей с требуемой АКФ в качестве эталонной случайного сигнала удобно выбрать нормальный белый шум $x_{WN}(n)$ с нулевым средним и единичной дисперсией.

СПМ $S_{WN}(\omega)$ такого шума (двусторонняя) равномерна в бесконечной полосе частот и равна (без учета множителя $1/f_d$):

$$S_{WN}(\omega) = N_0/2, \quad -\infty < \omega < \infty, \quad (1)$$

а АКФ $R_{WN}(m)$ равна:

$$R_{WN}(m) = \begin{cases} (N_0/2)u_0(m), & m = 0; \\ 0, & m \neq 0, \end{cases} \quad (2)$$

где $u_0(m)$ — цифровой единичный импульс, а $N_0/2$ — константа, в общем случае равная средней мощности шума, а для выбранного эталонного сигнала равна единице:

$$N_0/2 = R_{WN}(0) \quad \sigma_{WN}^2 + \mu_{WN}^2 = 1. \quad (3)$$

Для идеального нормального белого шума $N_0/2 = 1$.

Моделирование случайной последовательности с требуемой АКФ основывается на паре известных взаимно однозначных соотношений для СПМ и АКФ [1]:

$$S_y(\omega) = S_x(\omega) |H(e^{j\omega T})|^2; \quad (4)$$

$$R_y(m) = R_x(m) * R_h(m), \quad (5)$$

которые для нормального белого шума $x_{WN}(n)$ принимают вид:

$$S_y(\omega) = (N_0/2) |H(e^{j\omega T})|^2; \quad (6)$$

$$R_y(m) = (N_0/2) R_h(m), \quad (7)$$

где нижние индексы соответствуют воздействию, реакции и импульсной характеристике (ИХ), а также на паре известных соотношений вход/выход для ЛДС [1, 2]:

$$Y(e^{j\omega T}) = X(e^{j\omega T})H(e^{j\omega T});$$

$$y(n) = x(n) * h(n),$$

где при вычислении линейной свертки с помощью ДПФ переходят к круговой свертке на периоде L .

Случайную последовательность с требуемой АКФ будем формировать на выходе КИХ-фильтра 1-го типа с линейной ФЧХ (ЛФЧХ) [2].

Алгоритм моделирования случайной последовательности с требуемой АКФ в MATLAB включает в себя следующие шаги:

1. Моделирование нормального белого шума $x_{WN}(n)$ длины N и вычисление константы $N_0/2$ (3).
2. Моделирование требуемой АКФ $R_y(m)$ длины $L = 2N - 1$ и формирование ее периода для вычисления СПМ с помощью ДПФ:

$$R_y(m) = \begin{cases} R_y(L + m), & -L/2 \leq m \leq -1; \\ R_y(m), & 0 \leq m \leq (L/2 - 1). \end{cases} \quad (8)$$

3. Вычисление СПМ $S_y(k)$ в (6) по формуле ДПФ для АКФ $R_y(m)$ (8) с помощью БПФ (функция `fft`):

$$S_y(k) = \sum_{m=0}^{L-1} R_y(m) W_N^{mk}, \quad k = 0, 1, \dots, L-1. \quad (9)$$

4. Вычисление АЧХ КИХ-фильтра $|H(k)|$, $k = 0, 1, \dots, L-1$, на основе (6).
5. Вычисление ЛФЧХ $\varphi(k)$ КИХ-фильтра 1-го типа:

$$\varphi(k) = -k\pi R/L, \quad k = 0, 1, \dots, L-1,$$

где R — четный порядок КИХ-фильтра, а $R+1$ — длина ИХ, симметричной относительно $R/2$.

Согласно (7), АКФ ИХ копирует требуемую АКФ (с точностью до множителя) при одинаковой длине L . При быстро затухающей требуемой АКФ, что имеет место на практике, длину ИХ можно существенно сократить, задавая четный порядок R равным удвоенной длине требуемой АКФ от ее центрального отсчета до ближайшего нуля.

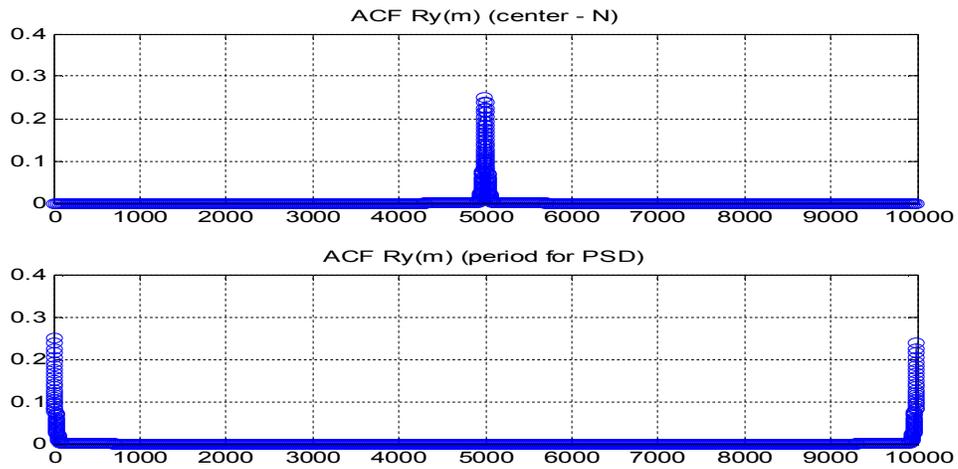
6. Вычисление частотной характеристики КИХ-фильтра:

$$H(k) = |H(k)| e^{j\varphi(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, L-1. \quad (10)$$

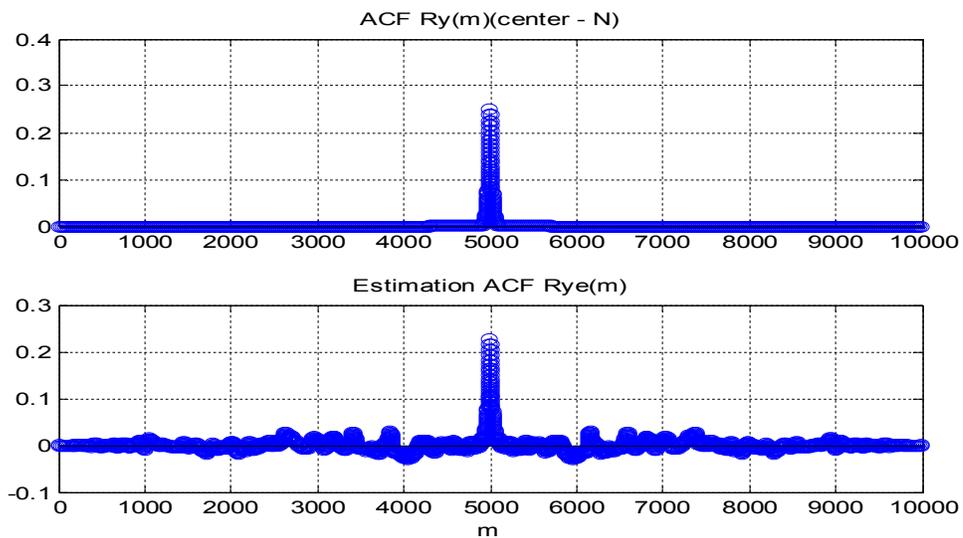
7. Вычисление ИХ КИХ-фильтра на периоде L круговой свертки по формуле ОДПФ для $H(k)$ (10) с помощью ОБПФ (функция `ifft`).
8. Вычисление реакции КИХ-фильтра с ИХ длины $(R+1)$ на воздействие в виде нормального белого шума длины N по формулам ДПФ и ОДПФ с помощью БПФ и ОБПФ (функция `fftfilt` для вычисления линейной свертки на основе круговой свертки).

Алгоритм иллюстрируется следующими графиками:

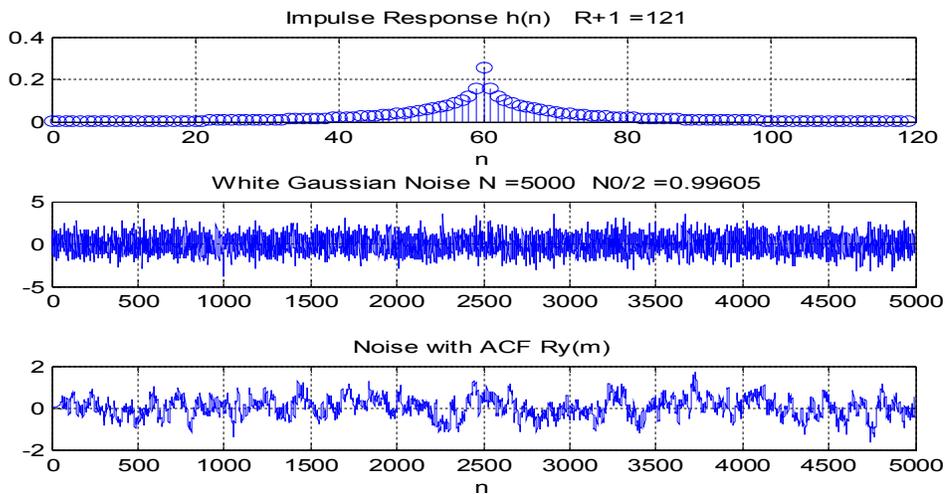
1. Требуемая АКФ $R_y(m) = 0.25 \cdot 0.95^{|m|}$, $|m| = 0, \dots, N-1$, центрированная относительно $m = N$ и ее период для вычисления СПМ:



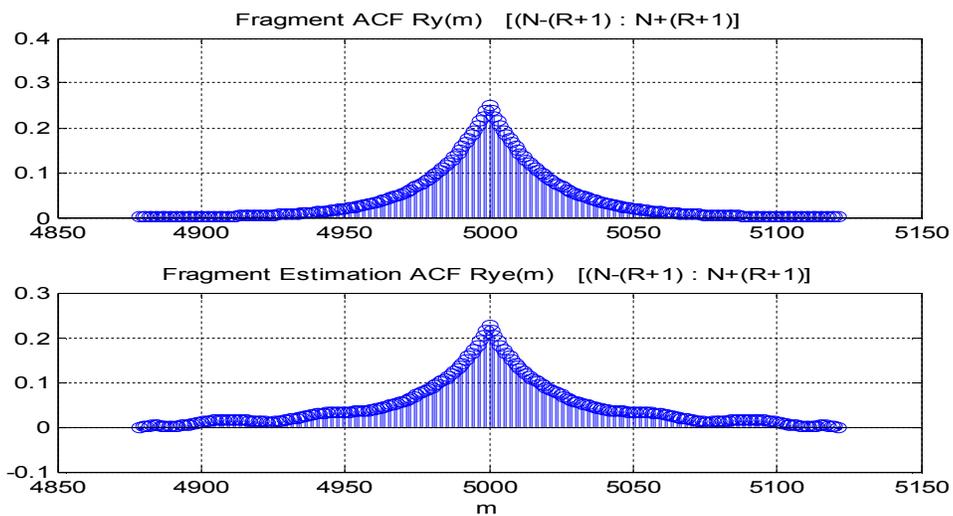
2. Требуемая АКФ и оценка АКФ реакции КИХ-фильтра:



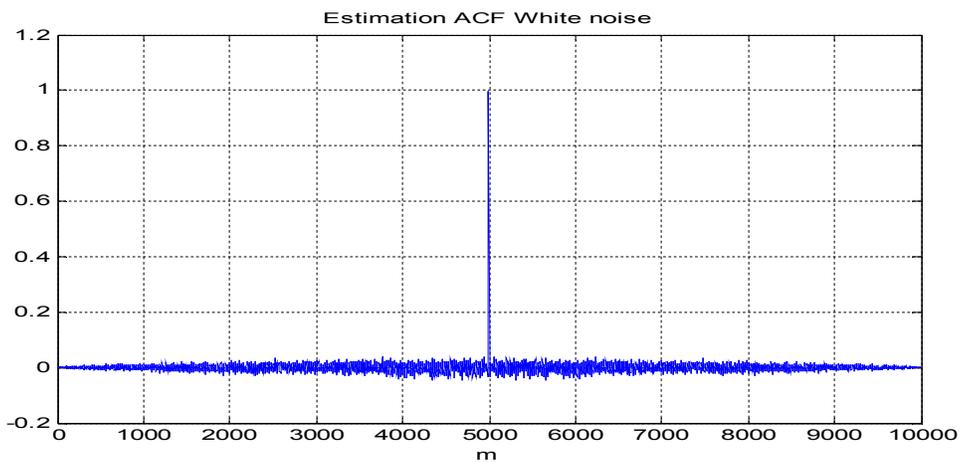
3. Импульсная характеристика длины $(R+1) = 121$, воздействие (нормальный белый шум) и реакция КИХ-фильтра (случайная последовательность с требуемой АКФ):



4. Фрагменты требуемой АКФ и оценки АКФ случайной последовательности:



5. Оценка АКФ нормального белого шума:



Литература

1. Опенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. — М.: Техносфера, 2006.
2. Сергиенко А. Б. Цифровая обработка сигналов, 3-е изд. — СПб.: БХВ-Петербург, 2010.
3. Солонина А. И., С. М. Арбузов. Цифровая обработка сигналов. Моделирование в MATLAB. — СПб.: БХВ-Петербург, 2008.