

ОПТИМИЗАЦИЯ ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКОГО И БИГАРМОНИЧЕСКОГО МЕТОДОВ ОЦЕНКИ ФАЗОВОГО СДВИГА КАМ-СОЗВЕЗДИЙ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ

асп. Петров А. В., к. т. н., доц. Сергиенко А. Б.

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» (СПбГЭТУ «ЛЭТИ»)

Введение

Системы фазовой синхронизации являются неотъемлемой частью систем, осуществляющих когерентную обработку сигналов с цифровой линейной модуляцией. При этом в ряде случаев необходимо осуществлять слепую оценку, так как в сигнале отсутствуют служебные фрагменты, известные на приемной стороне. Алгоритмы фазовой синхронизации можно разделить на два класса: “разомкнутые” алгоритмы, реализующие вычисление оценки фазы по наблюдаемой выборке сигнала, и “замкнутые” алгоритмы, представляющие собой следящие системы с обратной связью. Для быстрой первоначальной оценки параметров, как правило, применяются “разомкнутые” методы, при этом актуальной задачей является приближение к теоретически возможным пределам, что позволяет увеличить точность оценки либо сократить длительность сигнала, необходимую для достижения заданной точности.

В статье [1] была предложена идея разложения логарифма функции правдоподобия (ЛФП) в ряд по угловым гармоникам для слепой (без использования данных) оценки фазового сдвига сигнала, затем этот подход был применен для оценки частоты [2] и, далее, для совместной оценки частоты и фазы [3]. Эти работы показали перспективность использования комбинации двух (4-й и 8-й) степеней сигнала. В данной статье будет рассмотрена оптимизация весовых функций для предложенных алгоритмов.

1. Постановка задачи

Задача слепой оценки фазового сдвига может быть сформулирована следующим образом. Наблюдаемая выборка $\{\dot{x}(k)\}$ представляет собой последовательность отсчетов комплексной огибающей сигнала на выходе согласованного фильтра:

$$\dot{x}(k) = \dot{a}(k)e^{j\varphi_0} + \dot{n}(k), \quad k = 0, \dots, K-1, \quad (1)$$

где $\dot{a}(k)$ — информационные символы, независимо и равномерно выбираемые из сигнального созвездия $\{\dot{C}_m\}$, $m = 1, \dots, M$ (M — размер созвездия), φ_0 — постоянный фазовый сдвиг, равномерно распределенный на интервале $0 \dots 2\pi$, $\dot{n}(k)$ — отсчеты комплексного дискретного белого гауссова шума, вещественная и мнимая составляющие которого имеют дисперсию, равную σ^2 . Уровни сигнала и шума известны. Отношение сигнал/шум (ОСШ) определяется как отношение мощности сигнала к мощности шума:

$$\text{SNR} = \frac{|\dot{a}(k)|^2}{2\sigma^2} = \frac{1}{2\sigma^2 M} \sum_{m=1}^M |\dot{C}_m|^2. \quad (2)$$

Требуется определить фазовый сдвиг φ_0 в предположении, что информационные символы $\dot{a}(k)$ неизвестны. В следующем разделе кратко представлено решение этой задачи, более подробное описание можно найти в [1].

2. Разложение ЛФП в ряд по угловым гармоникам и предлагаемый алгоритм

Для получения максимально правдоподобной оценки фазового сдвига необходимо максимизировать ЛФП по искомому параметру φ_0 :

$$\hat{\varphi}_0 = \arg \max_{\varphi_0} \text{LLF}(\varphi_0 | \{\dot{x}(k)\}). \quad (3)$$

ЛФП для всей последовательности отсчетов сигнала $\{\dot{x}(k)\}$ — это сумма нелинейных функций от каждого отсчета сигнала:

$$\text{LLF}(\varphi_0 | \{\dot{x}(k)\}) = \sum_{k=0}^{K-1} F(\varphi_0 | \dot{x}(k)), \quad (4)$$

где $F(\varphi_0 | \dot{x})$ — логарифм функции плотности вероятности (ФПВ) отсчета \dot{x} , сдвинутого по фазе на φ_0 :

$$F(\varphi_0 | \dot{x}) = \log \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2 M} \sum_{m=1}^M \exp \left(-\frac{|\dot{x}e^{-j\varphi_0} - \dot{C}_m|^2}{2\sigma^2} \right) \right). \quad (5)$$

Представим отсчеты \dot{x} в полярных координатах, выделив в них модуль $r = |\dot{x}|$ и фазу $\varphi = \arg \dot{x}$. Тогда нелинейная функция $F(\cdot)$ может быть разложена в ряд Фурье относительно фазы φ , что дает её представление в виде разложения в ряд по угловым гармоникам [4]:

$$F(\varphi_0 | r e^{j\varphi}) = \frac{A_0(r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(r) \cos(n\varphi - n\varphi_0 + \theta_n(r)), \quad (6)$$

где $A_n(r)$ и $\theta_n(r)$ — амплитуда и фаза n -й гармоники ряда Фурье, зависящие от модуля отсчета сигнала r :

$$A_n(r) e^{j\theta_n(r)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(0 | r e^{j\varphi}) e^{-jn\varphi} d\varphi. \quad (7)$$

Следует отметить, что при определенном угловом положении используемых на практике сигнальных созвездий все комплексные коэффициенты ряда Фурье (7) оказываются вещественными, так что $\theta_n(r) = 0$ или π . В дальнейшем будем предполагать, что $\theta_n(r) = 0$, поэтому $A_n(r)$ могут быть отрицательными. Этот альтернативный вариант амплитуд гармоник $A_n(r)$ мы будем называть *весовыми функциями*.

Благодаря разложению Фурье поиск максимума ЛФП (4) сводится к максимизации полигармонической функции, содержащей бесконечное число гармоник (6). Этот факт приводит к идее усечения ряда Фурье, так как амплитуды гармоник убывают с увеличением их номера. Алгоритмы, основанные на усечении ряда Фурье, были исследованы в наших предыдущих работах [1], [2], [3]. Полученные в них результаты показывают перспективность использования такого (полигармонического) подхода.

Так как, благодаря угловой симметрии КАМ-созвездий, отличны от нуля только гармоники с номерами n , кратными 4, а слагаемое с номером $n = 0$ не влияет на оценку фазы, результирующая формула для оценки фазового сдвига после усечения (6) принимает следующий вид:

$$\hat{\varphi}_0 = \arg \max_{\varphi_0} \left(\operatorname{Re} \sum_{n=1}^N \dot{F}_{4n}(\{\dot{x}(k)\}) e^{-j4n\varphi_0} \right) = \arg \max_{\varphi_0} f(\varphi_0), \quad (8)$$

где Re обозначает вещественную часть комплексной функции, N — число используемых гармоник, и

$$\dot{F}_{4n}(\{\dot{x}(k)\}) = \sum_{k=0}^{K-1} A_{4n}(r(k)) \exp(j4n\varphi(k)) \quad (9)$$

есть сумма нелинейно преобразованных отсчетов сигнала.

Для оценки фазы можно использовать усеченный ряд Фурье, но он дает глобальную аппроксимацию, которая минимизирует суммарную квадратическую ошибку, в то время как для повышения точности оценки необходимо использовать локальную аппроксимацию ЛФП в окрестности его максимума. Такая локальная аппроксимация может быть получена оптимизацией весовых функций по критерию минимума дисперсии оценки. В следующем разделе представлены результаты такой оптимизации.

3. Оптимизация весовых функций путем минимизации дисперсии оценки

3.1. Аналитическое выражение для дисперсии оценки

Выражение для дисперсии оценки фазового сдвига было получено в [5] путем квадратичной аппроксимации (т.е., усечением ряда Тейлора) целевой функции $f(\varphi_0)$ (см. (8)) в окрестности истинного значения (без потери общности это истинное значение предполагается равным нулю) и имеет следующий вид:

$$D\{\hat{\varphi}_0\} = \frac{K-1}{K^2} \frac{\overline{X_1^2}}{(\overline{X_2})^2} + \frac{1}{K^2} \frac{\overline{X_1^2 X_2^2}}{(\overline{X_2})^4}, \quad (10)$$

где X_1 и X_2 — независимые и одинаково распределенные для каждого отсчета сигнала случайные величины, сумма которых для всей сигнальной последовательности дает первую и вторую производные целевой функции в окрестности истинного значения, соответственно:

$$f'(0) = \sum_{k=0}^{K-1} X_{1k}, \quad f''(0) = \sum_{k=0}^{K-1} X_{2k}. \quad (11)$$

Усреднение производится по ФПВ отсчета сигнала \dot{x} . Она может быть представлена в полярных координатах следующим образом:

$$p(r, \varphi) = \frac{r}{2\pi\sigma^2 M} \sum_{m=1}^M \exp\left(-\frac{r^2 + r_m^2 - 2rr_m \cos(\varphi - \varphi_m)}{2\sigma^2}\right), \quad (12)$$

где $r_m = |\dot{C}_m|$ и $\varphi_m = \arg \dot{C}_m$.

Количественные оценки показывают, что в выражении для дисперсии (10) первое слагаемое с увеличением ОСШ постепенно становится доминирующим. Например, для КАМ-16 и длины сигнала $K = 100$ символов его можно считать доминирующим, начиная с ОСШ 5 дБ. По этой причине для поиска оптимальных весовых функций мы будем минимизировать следующее выражение:

$$\overline{X_1^2} / (\overline{X_2})^2 \rightarrow \min_{A_n(r)}. \quad (13)$$

3.2. Гармонический метод

В случае гармонической аппроксимации из (8) и (9) имеем

$$X_1 = 4A_4(r) \sin(4\varphi), \quad X_2 = -16A_4(r) \cos(4\varphi). \quad (14)$$

Усреднение по фазе φ может быть легко вычислено, так что (13) примет следующий вид:

$$\int_0^{\infty} A_4^2(r) N_4(r) dr \left/ \left(\int_0^{\infty} A_4(r) D_4(r) dr \right)^2 \right. \rightarrow \min_{A_4(r)}, \quad (15)$$

где приняты обозначения

$$N_4(r) = 16 \int_0^{2\pi} \sin^2(4\varphi) p(r, \varphi) d\varphi, \quad D_4(r) = -16T_4(r), \quad T_4(r) = \int_0^{2\pi} \cos(4\varphi) p(r, \varphi) d\varphi. \quad (16)$$

Тогда (15) можно представить как оптимизационную задачу с ограничением:

$$\int_0^{\infty} A_4^2(r) N_4(r) dr \rightarrow \min_{A_4(r)} \text{ при условии } \int_0^{\infty} A_4(r) D_4(r) dr = \text{const}. \quad (17)$$

Для её решения воспользуемся методом Лагранжа [6]:

$$\int_0^{\infty} A_4^2(r) N_4(r) dr + \lambda \int_0^{\infty} A_4(r) D_4(r) dr \rightarrow \min_{A_4(r)}, \quad (18)$$

где λ — множитель Лагранжа.

Решение (18) может быть легко найдено:

$$A_4(r) = -\lambda D_4(r) / (2N_4(r)). \quad (19)$$

Так как масштабный множитель весовых функций не оказывает влияния на оценку фазового сдвига, величина λ не имеет значения. Данный результат близок к приведенному в [7], но не идентичен ему, хотя бы потому, что в нашем случае отсутствует ограничение на неотрицательность весовых функций.

3.3. Бигармонический метод

В случае бигармонической аппроксимации

$$X_1 = 4A_4(r) \sin(4\varphi) + 8A_8(r) \sin(8\varphi), \quad X_2 = -16A_4(r) \cos(4\varphi) - 64A_8(r) \cos(8\varphi). \quad (20)$$

Решение аналогично случаю гармонического метода, однако моделирование показало, что при такой оптимизации уровень второй (8-й) гармоники может превышать уровень первой (4-й) гармоники, что приводит к аномальным ошибкам при некоторых ОСШ для квадратных КАМ-созвездий больших порядков. Поэтому необходимо наложить дополнительное условие, ограничивающее амплитуду второй гармоники по сравнению с амплитудой первой гармоники, и решить следующую оптимизационную задачу:

$$\int_0^{\infty} [A_4^2(r) N_4(r) + A_4(r) A_8(r) N_{48}(r) + A_8^2(r) N_8(r)] dr \rightarrow \min_{A_4(r), A_8(r)} \quad (21)$$

с ограничениями:

$$\int_0^{\infty} [-16A_4(r) T_4(r) - 64A_8(r) T_8(r)] dr = \text{const}, \quad \int_0^{\infty} (A_4(r) T_4(r) - A_8(r) T_8(r)) dr > 0, \quad (22)$$

где в дополнение к (16) мы обозначили

$$N_{48}(r) = 64 \int_0^{2\pi} \sin(4\varphi) \sin(8\varphi) p(r, \varphi) d\varphi, \quad N_8(r) = 64 \int_0^{2\pi} \sin^2(8\varphi) p(r, \varphi) d\varphi, \quad T_8(r) = \int_0^{2\pi} \cos(8\varphi) p(r, \varphi) d\varphi. \quad (23)$$

Решение методом Лагранжа приводит к системе линейных уравнений относительно $A_4(r)$ и $A_8(r)$. После её решения итоговые выражения принимают следующий вид:

$$A_4(r) = \frac{(-\lambda_2 - 64\lambda_1) N_{48}(r) T_8(r) - (-\lambda_2 - 16\lambda_1) 2N_8(r) T_4(r)}{4N_4(r) N_8(r) - N_{48}^2(r)}, \quad (24)$$

$$A_8(r) = \frac{(\lambda_2 - 16\lambda_1) N_{48}(r) T_4(r) - (-\lambda_2 - 64\lambda_1) 2N_4(r) T_8(r)}{4N_4(r) N_8(r) - N_{48}^2(r)}, \quad (25)$$

где λ_1 и λ_2 — множители Лагранжа, которые, в отличие от λ в (19), уже не являются просто масштабными множителями: они влияют на форму весовых функций. Соотношение между этими множителями регулирует компромисс между дисперсией ошибки и вероятностью аномальных ошибок. Подбор λ_2 осуществляется экспериментально при фиксированном λ_1 . При $\lambda_2 = 0$ ограничение на амплитуду второй гармоники не учитывается.

4. Результаты моделирования

Для оценки точностных характеристик предложенных методов с оптимизированными весовыми функциями было выполнено компьютерное моделирование. Использовалась достаточно короткая выборка длиной $K = 100$ (для КАМ-64) и $K = 200$ (для КАМ-128) символов, для измерения дисперсии оценки результат усреднялся по 10^4 реализаций. Случайный фазовый сдвиг φ_0 был равномерно распределен на интервале $0 \dots \pi/2$ (этот диапазон следует из фазовой неопределенности, неизбежной для рассматриваемых

мых слепых алгоритмов оценки фазы [8]). Результирующие зависимости дисперсии оценки от ОСШ для созвездий КАМ-64 и КАМ-128 показаны на рис. 1 и рис. 2, соответственно, для следующих алгоритмов:

- “CHE4” — гармонический метод, полученный усечением ряда Фурье [1].
- “CHE48” — бигармонический метод, полученный усечением ряда Фурье [1].
- “CHE4, optimal” — гармонический метод с оптимальной весовой функцией (19).
- “CHE48, optimal” — бигармонический метод с оптимальными весовыми функциями (24)–(25).
- “WA03” — алгоритм, оптимальный по методу наименьших квадратов, с ограничением на неотрицательность весовой функции [7].
- “CRLB” — нижняя граница Крамера-Рао для оценки фазы [9].

Все зависимости построены с использованием весовых функций, зависящих от ОСШ. Из графиков видно, что оптимизация весовых функций позволяет существенно улучшить характеристики предложенных ранее алгоритмов. Гармонический метод близок к “WA03”, но не идентичен ему. Бигармонический метод дает результаты, близкие к границе Крамера-Рао.

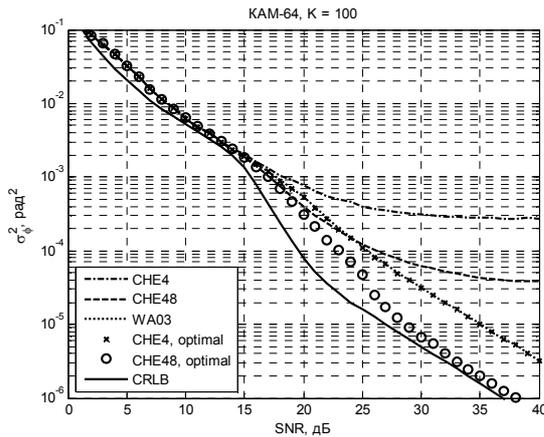


Рис. 1. Дисперсия оценки фазы для КАМ-64

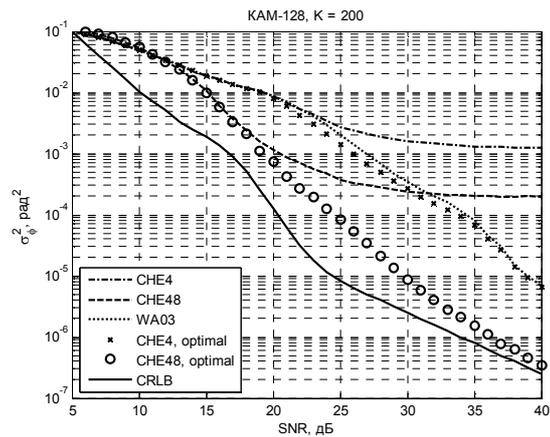


Рис. 2. Дисперсия оценки фазы для КАМ-128

Заключение

В данной статье была рассмотрена оптимизация весовых функций для гармонического и бигармонического алгоритмов оценки фазы. Результаты моделирования демонстрируют, что это дает существенно лучшие показатели по сравнению с исходными алгоритмами, основанными на усечении ряда Фурье. Полученные зависимости дисперсии оценки для гармонического метода близки к алгоритму, оптимальному по методу наименьших квадратов [7], в то время как для бигармонического метода они приближаются к границе Крамера-Рао. Предложенный способ оптимизации весовых функций может быть использован для дисперсии оценки частоты в случае гармонического и бигармонического методов [3].

Литература

1. А. В. Петров, А. Б. Сергиенко. Новый алгоритм слепой оценки фазового сдвига для КАМ-сигналов на основе аппроксимации функции правдоподобия. *Цифровая обработка сигналов*, №1, 2011, с. 28–32.
2. A. B. Sergienko, A. V. Petrov. Blind carrier frequency offset estimation for QAM signals based on weighted 4th power of signal samples. *Proc. 8th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS 2010)*, St. Petersburg, September 17–20, 2010, pp. 278–281.
3. A. B. Sergienko, A. V. Petrov. Joint blind estimation of carrier phase and frequency offset for QAM signals using circular harmonic decomposition. *Proc. 36th IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP 2011)*, Prague, May 22–27, 2011, pp. 3460–3463.
4. G. Jacovitti, A. Neri. Multiresolution circular harmonic decomposition. *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 48, No. 11, Nov. 2000, pp. 3242–3247.
5. A. V. Petrov, A. B. Sergienko. Analytical Evaluation of Performance for Harmonic and Biharmonic Methods of Blind Phase Offset Estimation. *Proc. 13th IEEE Int. Symp. on Problems of Redundancy in Information and Control Systems*, Saint-Petersburg, September 5–10, 2012, pp. 57–61.
6. Френкс Л. *Теория сигналов*. / Пер. с англ.; Под ред. Д. Е. Вакмана. — М.: Сов. радио, 1974.
7. Y. Wang, E. Serpedin, P. Ciblat. Optimal blind nonlinear least-squares carrier phase and frequency offset estimation for general QAM modulations. *IEEE Trans. Wireless Communications*, Vol. 2, No. 5, Sep. 2003, pp. 1040–1054.
8. U. Mengali, A. N. D’Andrea. *Synchronization techniques for digital receivers*. — Plenum Press, New York, 1997.
9. F. Rice, B. Cowley, B. Moran, M. Rice. Cramer-Rao Lower Bounds for QAM Phase and Frequency Estimation. *IEEE Trans. Communications*, Vol. 49, No. 9, Sep. 2001, pp. 1582–1591.

WEIGHTING FUNCTIONS OPTIMIZATION FOR HARMONIC AND BIHARMONIC PHASE OFFSET ESTIMATION METHODS FOR HIGH-ORDER QAM CONSTELLATIONS

Petrov A. V., Sergienko A. B.

St. Petersburg State Electrotechnical University «LETI», 5 Prof. Popov Street, St. Petersburg, 197376, Russia

An algorithm is presented for blind phase offset estimation for signals with quadrature amplitude modulation (QAM). The algorithm is based on a circular harmonic expansion of log-likelihood function. Retaining one or two most significant terms in this series gives a harmonic or biharmonic circular decomposition of the LLF, this approach leads to notable improvement of the estimation quality comparing to known versions of popular “4th power” phase estimation algorithm. In this paper we present improvement for harmonic and biharmonic phase offset estimation algorithms by optimization of weighting functions with special attention given to high-order QAM constellations. Simulation results show that optimized weighting functions give much better performance in comparison with original algorithms based on Fourier series truncation. As a result, harmonic method is similar to optimal nonlinear least-squares algorithm, which was presented by Y. Wang et al in 2003, while biharmonic method approaches Cramer-Rao lower bound. Proposed way for optimization of weighting functions can be used for frequency estimation variance for both harmonic and biharmonic methods.