

ОБЛАСТЬ ДОПУСТИМЫХ ИСХОДНЫХ ПАРАМЕТРОВ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ ЗОЛОТАРЕВА-КАУЭРА

к. т. н. Мингазин А.Т.

РАДИС Лтд, Россия, Москва, Зеленоград, 124460, а/я 20.

Тел./факс: 8-499-735-35-13, e-mail: alexmin@radis.ru

Представлены возможные варианты конфигурации области допустимых исходных параметров цифровых фильтров нижних частот Золотарева-Кауэра. Дополнительные варианты обусловлены предельными переходами к фильтрам Чебышева и Баттерворта при определенных требованиях к АЧХ. Дано математическое описание всех конфигураций области.

DSPA, 2013, V.1, March, pp. 125-128

TOLERABLE INITIAL PARAMETER SPACE OF ZOLOTAREV-CAUER DIGITAL FILTERS

Mingazin A.T.

RADIS Ltd, Russia, Moscow, Zelenograd, 124460, POB 20.

Tel/Fax: 8-499-735-35-13, e-mail: alexmin@radis.ru

Possible configurations of the tolerable initial parameter space of Zolotarev-Cauer lowpass digital filters are presented. Additional configurations are caused by the limit transition to Chebyshev and Butterworth filters at the defined requirements to magnitude responses. The mathematical description for all space configurations is given.

Введение. Для синтеза частотных цифровых БИХ-фильтров необходимо задать требования к параметрам АЧХ таким как, предельно допустимая неравномерность в полосе пропускания, предельно допустимое минимальное ослабление в полосе задерживания и номинальные граничные частоты этих полос. При этом для той или иной аппроксимации АЧХ существует определенная область допустимых исходных параметров $S(\mathbf{p})$ [1], где $\mathbf{p}$ – вектор исходных параметров. Размерность $\mathbf{p}$ и форма $S(\mathbf{p})$ зависят от вида аппроксимации (Баттерворта, Чебышева и др.) и типа фильтра (нижних, верхних частот и др.), а ее размеры – от заданных требований к АЧХ и порядка фильтра.

Перед разработчиком стоит задача выбора исходных параметров в $S(\mathbf{p})$ для расчета фильтра. Тот или иной параметр АЧХ может быть экстремально улучшен при заданных остальных [2-9]. От выбора исходной точки в области $S(\mathbf{p})$ зависят также параметры ХГВЗ, ФЧХ [8,10], уровни шума округления и предельных циклов и, кроме того, результаты синтеза фильтров с квантованными коэффициентами [1,10,11].

Области $S(\mathbf{p})$ фильтров нижних частот Баттерворта, Чебышева I, II и Золотарева-Кауэра были ранее представлены в [1], где также даны их математические описания. В данной работе мы сосредоточим внимание на всех возможных вариантах конфигурации области допустимых исходных параметров фильтров Золотарева-Кауэра. Дополнительные варианты обусловлены предельными переходами к фильтрам Чебышева и Баттерворта [10] и не были описаны в [1].

Варианты конфигурации области допустимых исходных параметров. На рис.1. показаны четыре возможных варианта конфигурации трехмерной области допустимых исходных параметров $S(\Delta a, f_1, f_2)$ цифровых фильтров нижних частот Золотарева-Кауэра. Заметим, что это лишь качественные фигуры, хотя по конкретным требованиям к АЧХ с применением формул, которые будут представлены далее, можно построить точные конфигурации областей. Варианты области рис.1б-г при определенных параметрах соответствуют предельным переходам от фильтров Золотарева-Кауэра к фильтрам Чебышева (I и II) и Баттерворта. Для любой точки и любой конфигурации области $S(\cdot)$ на рис.1 справедливы условия

$$\Delta \hat{a} \leq \Delta a_{\max}, \quad \hat{a}_0 \geq a_{0\min}, \quad (1)$$

где $\Delta \hat{a}$ - неравномерность АЧХ в номинальной полосе пропускания ($0 \leq f \leq f_{1n}$) и $\hat{a}_0$ - минимальное ослабление АЧХ в номинальной полосе задерживания ($f_{2n} \leq f \leq 0,5$), а $\Delta a_{\max}$ и $a_{0\min}$ - заданные предельно допустимые значения этих параметров; f_{1n} и f_{2n} - заданные номинальные граничные частоты полос, которые, как и текущая частота f , нормированы относительно частоты дискретизации. Предполагается, что параметры в (1) выражены в децибелах и максимум АЧХ нормирован к 0 дБ. На рис.1 Δa -

неравномерность АЧХ в полосе пропускания, а f_1 и f_2 - граничные частоты полосы пропускания и задерживания. Начало координат соответствует точке А, для которой $\Delta a = \Delta a_{\max}$, $f_1 = f_{1n}$ и $f_2 = f_{2n}$. Точки А, В, С, D лежат в плоскости $f_2 = f_{2n}$, а точки С, Е, F - в плоскости $f_1 = f_{1n}$.

Область на рис.1а соответствует случаю, когда требованиям (1) удовлетворяет фильтр Золотарева-Кауэра с порядком $N = N_0$, а фильтры Чебышева и Баттерворта при $N = N_0$ не удовлетворяют (1).

Допустим теперь, что порядки фильтров Золотарева-Кауэра и Чебышева (I и II) выбраны исходя из условия (1) идентичны, причем области фильтров Чебышева I и II являются точечными. Тогда область $S(\cdot)$ будет иметь вид как на рис. 1б. При этом точке F соответствует $f_2 = 0,5$ и единственный фильтр Чебышева I, а точке D - равенство $f_1 = \Delta a = 0$ и единственный фильтр Чебышева II.

Предположим далее, что порядки фильтров Золотарева-Кауэра и Чебышева идентичны и условия (1) выполняются для фильтров Чебышева с некоторым запасом, а фильтры Баттерворта такого же порядка не удовлетворяют (1). Тогда область $S(\cdot)$ будет иметь вид как на рис. 1в, где можно видеть место фильтров Чебышева. Фильтры Чебышева I располагаются в плоскости $f_2 = 0,5$ с характерными точками F, F', F'', а фильтры Чебышева II соответствуют отрезку прямой, соединяющей две жирные точки D' и D'' на линии пересечения плоскостей $\Delta a = 0$ и $f_1 = 0$.

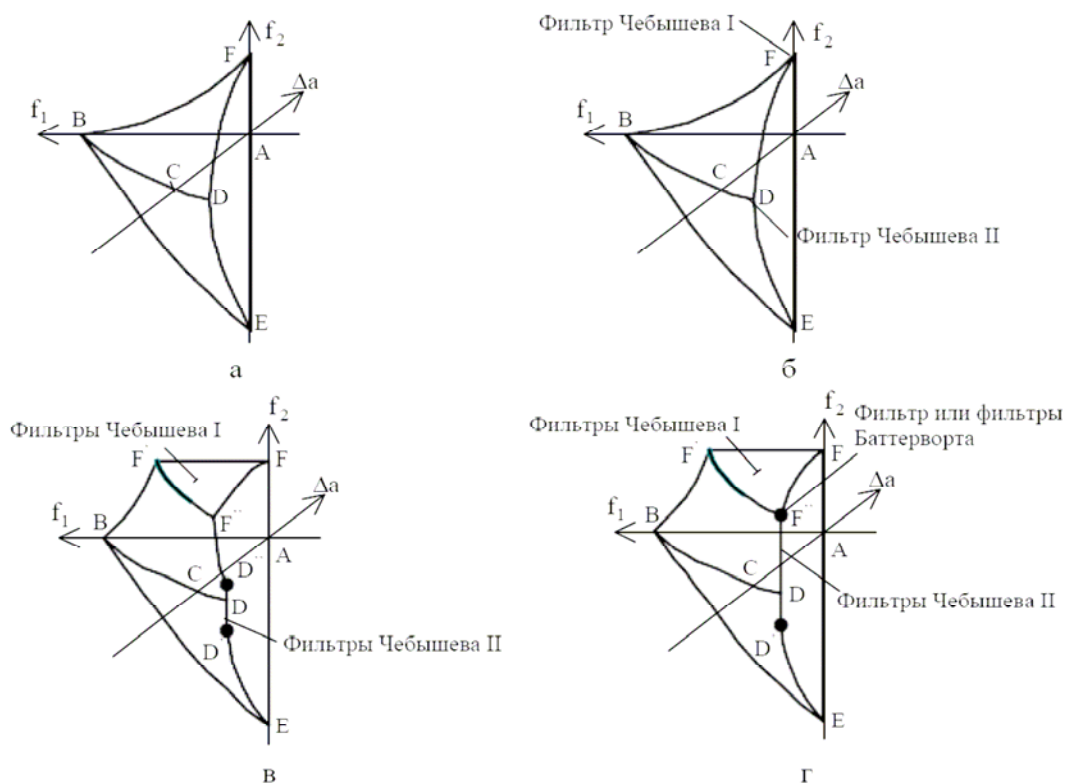


Рис.1 Варианты конфигурации области допустимых исходных параметров цифровых фильтров нижних частот Золотарева-Кауэра

Наконец предположим, что для всех обсуждаемых фильтров порядки идентичны и условия (1) выполняются. Тогда область $S(\cdot)$ примет вид как на рис. 1г, где можно видеть место трех других фильтров. Фильтры Чебышева I располагаются в плоскости $f_2 = 0,5$. Фильтры Баттерворта (или единственный фильтр, если в (1) имеют место строгие равенства для этих фильтров) соответствуют точке F'', где $\Delta a = f_1 = 0$, а фильтры Чебышева II - отрезку прямой, соединяющей точки D' и F'' на линии пересечения плоскостей $\Delta a = 0$ и $f_1 = 0$. В данном случае точка D'' совпадает с F'' и не показана.

Описание вариантов конфигурации области. Для описания представленных вариантов конфигурации области $S(\Delta a, f_1, f_2)$ на рис.1 нам потребуются характеристики ослабления $a_z(f, \Delta a, f_1, f_2)$ фильтров Золотарева-Кауэра и $a_{c1}(f, \Delta a, f_1)$, $a_{c2}(f, a_0, f_2)$ фильтров Чебышева I и II, а также соотношения для

определения порядков $N \geq \Phi_z(\Delta a, a_0, f_1, f_2)$ и $N \geq \Phi_c(\Delta a, a_0, f_1, f_2)$ этих фильтров. Отметим, что функции $a_z(\cdot)$, $a_{cl}(\cdot)$ и $a_{c2}(\cdot)$, как и область $S(\cdot)$ зависят и от N . Для упрощения записи приводимых ниже выражений введем параметры

$$\varepsilon_1^2 = 10^{0,1\Delta a} - 1, \quad \varepsilon_2^2 = 10^{0,1a_0} - 1.$$

Отметим, что максимальные и минимальные значения $\Delta a, a_0$ соответствуют аналогичным значениям $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Например, $\Delta a_{\max}$ соответствует $\varepsilon_{1\max}$.

Области $S(\Delta a, f_1, f_2)$ на рис. 1а и 1б определяются следующими неравенствами

$$\begin{aligned} \Delta a &\leq \Delta a_{\max}, \\ N &\geq \Phi_z(\Delta a, a_{0\min}, f_1, f_2), \\ a_z(f_{1n}, \Delta a, f_1, f_2) &\geq \Delta a_{\max}, \\ a_z(f_{2n}, \Delta a, f_1, f_2) &\geq a_{0\min}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\Phi_z(\cdot) = \frac{K(m) \cdot K(1-m')}{K(1-m) \cdot K(m')}$, $K(\cdot)$ – полный эллиптический интеграл 1-го рода,

$$m = \operatorname{tg}^2(\pi f_1) / \operatorname{tg}^2(\pi f_2), \quad m' = \varepsilon_1^2 / \varepsilon_{2\min}^2,$$

$$a_z(f, \Delta a, f_1, f_2) = 10 \lg[1 + \varepsilon_1^2 \Psi_z^2(f, f_1, f_2)],$$

$$\Psi_z(\cdot) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[4]{m''}} \prod_{i=1}^{N/2} \sqrt{m} \frac{\Omega^2 - \Omega_{0i}^2}{1 - m \Omega^2 \Omega_{0i}^2}, & N - \text{четное}, \\ \Omega \sqrt[4]{\frac{m}{m''}} \prod_{i=1}^{(N-1)/2} \sqrt{m} \frac{\Omega^2 - \Omega_{0i}^2}{1 - m \Omega^2 \Omega_{0i}^2}, & N - \text{нечетное}, \end{cases}$$

$$\Omega = \operatorname{tg}(\pi f) / \operatorname{tg}(\pi f_1), \quad \Omega_{0i} = \sqrt[4]{m} \cdot \operatorname{sn}\left(\frac{v}{N} K(m), m\right), \quad v = 2i - 1, N - \text{четное} \text{ и } v = 2i, N - \text{нечетное},$$

$$m'' = \begin{cases} \left[\prod_{i=1}^{N/2} m \cdot \operatorname{sn}^4\left(\frac{2i-1}{N} K(m), m\right) \right]^2, & N - \text{четное}, \\ m \left[\prod_{i=1}^{(N-1)/2} m \cdot \operatorname{cd}^4\left(\frac{2i}{N} K(m), m\right) \right]^2, & N - \text{нечетное}, \end{cases}$$

$\operatorname{sn}(\cdot)$ и $\operatorname{cd}(\cdot)$ – эллиптические функции Якоби. Здесь в отличие от описания в [1] выражение для функции $\Psi_z(\cdot)$ представлено в виде удобном для непосредственного использования в практических расчетах. Кроме того, для полной строгости, хотя, как правило, мало влияющей на точность расчетов, приведенное определение параметра m'' [4] соответствует точному равенству во втором соотношении (2).

Область $S(\Delta a, f_1, f_2)$ на рис. 1в определяется (2) и еще одним неравенством, а именно $f_2 \leq 0,5$. Область $S(\Delta a, f_1)$ фильтров Чебышева I на этом рисунке можно представить отдельно как

$$\begin{aligned} \Delta a &\leq \Delta a_{\max}, \\ N &\geq \Phi_c(\Delta a, a_{0\min}, f_1, f_{2n}), \\ a_{cl}(f_{1n}, \Delta a, f_1) &\leq \Delta a_{\max}, \end{aligned}$$

где $\Phi_c(\cdot) = \frac{\text{arch}(\varepsilon_{2\min} / \varepsilon_1)}{\text{arch}[\text{tg}(\pi f_{2n}) / \text{tg}(\pi f_1)]}$ и $a_{c1}(\cdot) = 10 \lg[1 + \varepsilon_1^2 \text{ch}^2(N \cdot \text{arch} \frac{\text{tg}(\pi f_{1n})}{\text{tg}(\pi f_1)})]$. Для полного описания области на рис.1в нам необходимо определить координаты f_2 для концов отрезка прямой $D'D''$. Координата f_2 для точки D' определяется из уравнения $N = \Phi_c(\Delta a_{\max}, a_{0\min}, f_{1n}, f_2)$ и равна

$$f_2 = \frac{1}{\pi} \arctg [\text{tg}(\pi \cdot f_{1n}) \cdot \text{ch}(\frac{1}{N} \text{arch} \frac{\varepsilon_{2\min}}{\varepsilon_{1\max}})].$$

Координата f_2 для точки D'' определяется решением системы уравнений

$$\begin{aligned} \Phi_c(\Delta a_{\max}, a_0, f_{1n}, f_2) &= \frac{\text{arch}(\varepsilon_2 / \varepsilon_{1\max})}{\text{arch}[\text{tg}(\pi f_2) / \text{tg}(\pi f_{1n})]} = N, \\ a_{c2}(f_{2n}, a_0, f_2) &= 10 \lg[1 + \varepsilon_2^2 / \text{ch}^2(N \cdot \text{arch} \frac{\text{tg}(\pi f_2)}{\text{tg}(\pi f_{2n})})] = a_{0\min}. \end{aligned}$$

После исключения параметра ε_2 эта система сводится к решению относительно искомой f_2 следующего уравнения

$$\varepsilon_{1\max} \text{ch}[N \cdot \text{arch} \frac{\text{tg}(\pi f_2)}{\text{tg}(\pi f_{1n})}] = \varepsilon_{2\min} \text{ch}[N \cdot \text{arch} \frac{\text{tg}(\pi f_2)}{\text{tg}(\pi f_{2n})}].$$

Область $S(\Delta a, f_1, f_2)$ на рис. 1г описывается также как и область на рис.1в за исключением того, что для точки D'' (обозначение опущено), совпадающей в данном случае с точкой F'' , координата $f_2 = 0,5$.

Заключение. Таким образом, мы представили возможные варианты конфигурации области допустимых исходных параметров фильтров Золотарева-Кауэра и дали их математические описания в явной и неявной форме. Эти описания могут быть использованы для построения конкретных областей с целью лучшего понимания проблемы выбора исходных параметров при проектировании цифровых фильтров.

Литература

1. Мингазин А.Т. Начальные приближения для синтеза цифровых фильтров с минимальной длиной слова коэффициентов. Электронная техника. 1983. Сер.10. № 6. Р. 3-8.
2. Савченко С.М., Смирнов Э.Е. Улучшение частотных характеристик эллиптических фильтров. Изв. вузов СССР. Сер. Радиоэлектроника. 1976. Т. XIX. № 6. С. 113-116.
3. Мингазин А.Т. Способ улучшения характеристик затухания фильтров. Радиотехника. 1985. № 9. С. 89-91.
4. Vlcek M., Unbehauen R. Degree, ripple and transition width of elliptic filters. IEEE Trans. 1989. CAS-36. № 3. Р. 469-472.
5. Мингазин А.Т. Экстремальные параметры аналоговых и цифровых фильтров. Электросвязь. 1999. № 1. С. 22-23.
6. Tosic D.V., Lutovac M. D., Evans B.L. Advanced digital IIR filter design. ECCTD. 1999. P.1323-1326.
7. Corral C.A., Lindquist C.S. Design for optimum classical filters. Proc. IEE Circuit Devices Syst. 2002. Vol. 149. № 5/6. P.291-301.
8. Алёшин Д.В., Мингазин А.Т. Программа для расчета экстремальных параметров цифровых и аналоговых фильтров и ее применение. Цифровая обработка сигналов. 2006. № 1. Р.45-49.
9. Dimopoulos H.G. Optimal use of some classical approximations in filter design. IEEE Trans. 2007. CAS-II. Vol. 54. № 9. P.780-784.
10. Мингазин А. Резервы классических аппроксимаций цифровых БИХ-фильтров. Современная электроника. 2012. № 9. С. 62 -71.
11. Мингазин А.Т. Синтез цифровых фильтров для высокоскоростных систем на кристалле. Цифровая обработка сигналов. 2004. № 2. Р. 14-23.