

ЗАМКНУТЫЙ АЛГОРИТМ СЛЕПОЙ синхронизации частоты и фазы КАМ-СИГНАЛОВ

асп. Петров А. В., к. т. н., доц. Сергиенко А. Б.

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» (СПбГЭТУ «ЛЭТИ»)

Введение

Системы частотной и фазовой синхронизации являются неотъемлемой частью систем, осуществляющих когерентную обработку сигналов с цифровой линейной модуляцией. При этом в ряде случаев необходимо осуществлять слепую оценку, так как в сигнале отсутствуют служебные фрагменты, известные на приемной стороне. Алгоритмы синхронизации можно разделить на два класса: “разомкнутые” алгоритмы, реализующие вычисление оценки искомого параметра по наблюдаемой выборке сигнала, и “замкнутые” алгоритмы, представляющие собой следящие системы с обратной связью. Для быстрой первоначальной оценки параметров, как правило, применяются “разомкнутые” методы. “Замкнутые” алгоритмы применяются для слежения за медленными изменениями параметров, при этом оценки, полученные с помощью “разомкнутых” алгоритмов, используются в качестве начальных для запуска следящих систем.

В [1] представлен алгоритм, управляемый решениями, который часто используется для замкнутой синхронизации. Недостатком этого алгоритма является возможная сходимость к неправильным значениям фазы, что зависит от сигнального созвездия. Слепая фазовая синхронизация для сигналов с фазовой манипуляцией, основанная на аппроксимации функции правдоподобия, также рассматривается в [1].

В статье [2] была предложена идея разложения логарифма функции правдоподобия (ЛФП) в ряд по угловым гармоникам для слепой (без использования данных) оценки фазового сдвига сигнала, затем этот подход был применен для оценки частоты [3] и совместной оценки частоты и фазы [4]. Эти работы показали перспективность использования комбинации двух угловых гармоник ЛФП. В [5] была рассмотрена оптимизация весовых функций для гармонического и бигармонического метода. В данной статье разложение ЛФП в ряд по угловым гармоникам применяется для замкнутого алгоритма синхронизации.

1. Постановка задачи

Задача слепой оценки может быть сформулирована следующим образом. Наблюдаемая выборка $\{\dot{x}(k)\}$ представляет собой последовательность отсчетов комплексной огибающей сигнала на выходе согласованного фильтра:

$$\dot{x}(k) = \dot{a}(k) \exp(j(\varphi_0 + k\varphi_f)) + \dot{n}(k), \quad k = 0, \dots, K-1, \quad (1)$$

где $\dot{a}(k)$ — информационные символы, независимо и равновероятно выбираемые из сигнального созвездия $\{\dot{C}_m\}$, $m = 1, \dots, M$ (M — размер созвездия), φ_0 — постоянный фазовый сдвиг, равномерно распределенный на интервале $0 \dots 2\pi$, $\varphi_f = 2\pi\Delta f T$ — межсимвольный фазовый набег из-за частотного сдвига Δf , T — длительность символа, $\dot{n}(k)$ — отсчеты комплексного дискретного белого гауссова шума, вещественная и мнимая составляющие которого имеют дисперсию, равную σ^2 . Уровни сигнала и шума известны. Отношение сигнал/шум (ОСШ) определяется как отношение мощности сигнала к мощности шума:

$$\text{SNR} = \frac{|\dot{a}(k)|^2}{2\sigma^2} = \frac{1}{2\sigma^2 M} \sum_{m=1}^M |\dot{C}_m|^2. \quad (2)$$

Требуется определить и компенсировать фазовый сдвиг φ_0 в следящей системе синхронизации в предположении, что информационные символы $\dot{a}(k)$ неизвестны.

Для замкнутой синхронизации обычно используется петля Костаса [1]. Схема такой следящей системы представлена на рис. 1. Для восстановления фазы используется петля первого порядка, для слежения за фазой и частотой необходимо использовать петлевой фильтр второго порядка. Эти фильтры описываются следующими рекурсивными уравнениями:

$$1\text{-й порядок астатизма: } \hat{\varphi}_0(k+1) = \hat{\varphi}_0(k) + \gamma e(k), \quad (3)$$

$$2\text{-й порядок астатизма: } \hat{\varphi}_0(k+1) = \hat{\varphi}_0(k) + \xi(k), \quad \xi(k) = \xi(k-1) + \gamma(1+\rho)e(k) - \gamma e(k-1), \quad (4)$$

где $e(k)$, $\hat{\varphi}_0(k)$ и $\xi(k)$ — соответственно, сигнал ошибки, оценка фазы и мгновенной угловой частоты, нормированной к символьной скорости, на k -м шаге, γ и ρ — параметры петлевого фильтра.

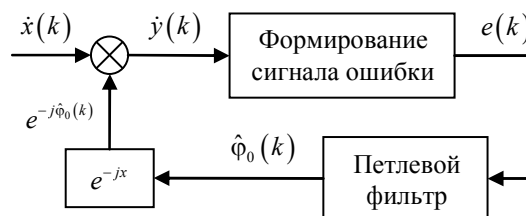


Рис. 1. Петля Костаса

Характеристики петли Костаса зависят от способа формирования сигнала ошибки, размера шага γ и коэффициента ρ , которые связаны с эквивалентной шумовой полосой петли BT следующим образом [1]:

$$1\text{-й порядок астатизма: } \gamma = 4BT/A, \quad (5)$$

$$2\text{-й порядок астатизма: } \gamma = 8BT/(3A), \quad \rho = 4BT/3, \quad (6)$$

где A — наклон S-кривой в начале координат. S-кривая представляет собой зависимость математического ожидания сигнала ошибки от значения ошибки и является важной характеристикой следящей системы. Значения γ и ρ для петли 2-го порядка астатизма приведены для рекомендованного при практическом использовании коэффициента демпфирования ζ , равного 0,7 [1].

К сигналу ошибки, используемому в замкнутых системах синхронизации, предъявляются следующие требования: он должен иметь нулевое математическое ожидание при отсутствии ошибки, а производная зависимости математического ожидания от значения ошибки при этом должна быть отлична от нуля. Позиция максимума ЛФП соответствует оценке параметра. В максимуме производная ЛФП равна нулю. По этой причине производная ЛФП может быть использована в качестве сигнала ошибки [1].

В следующем разделе кратко описывается вывод сигнала ошибки для петли Костаса.

2. Разложение ЛФП в ряд по угловым гармоникам и предлагаемый алгоритм

ЛФП для отсчета сигнала $\dot{x}$ — это логарифм нелинейной функции от значения этого отсчета:

$$\text{LLF}(\varphi_0 | \dot{x}) = \log(F(\varphi_0 | \dot{x})), \quad (7)$$

где $F(\varphi_0 | \dot{x})$ — функция плотности вероятности (ФПВ) отсчета $\dot{x}$, сдвинутого по фазе на φ_0 :

$$F(\varphi_0 | \dot{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2 M} \sum_{m=1}^M \exp\left(-\frac{|\dot{x}e^{-j\varphi_0} - \dot{C}_m|^2}{2\sigma^2}\right). \quad (8)$$

Представим отсчеты $\dot{x}$ в полярных координатах, выделив в них модуль $r = |\dot{x}|$ и фазу $\varphi = \arg \dot{x}$. Тогда ЛФП может быть разложен в ряд Фурье относительно фазы φ , что дает его представление в виде суммы угловых гармоник [6]:

$$\text{LLF}(\varphi_0 | re^{j\varphi}) = \frac{A_0(r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(r) \cos(n\varphi - n\varphi_0 + \theta_n(r)), \quad (9)$$

где $A_n(r)$ и $\theta_n(r)$ — амплитуда и фаза n -й гармоники ряда Фурье, зависящие от модуля отсчета сигнала r :

$$A_n(r)e^{j\theta_n(r)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \text{LLF}(0 | re^{j\varphi}) e^{-jn\varphi} d\varphi. \quad (10)$$

Следует отметить, что при определенном угловом положении используемых на практике сигнальных созвездий все комплексные коэффициенты ряда Фурье (10) оказываются вещественными, так что $\theta_n(r) = 0$ или π . В дальнейшем будем предполагать, что $\theta_n(r) = 0$, поэтому $A_n(r)$ могут быть отрицательными. Этот альтернативный вариант амплитуд гармоник $A_n(r)$ мы будем называть *весовыми функциями*.

Благодаря разложению Фурье поиск максимума ЛФП (7) сводится к максимизации полигармонической функции, содержащей бесконечное число гармоник (9). Этот факт приводит к идее усечения ряда Фурье, так как амплитуды гармоник убывают с увеличением их номера. Разомкнутые алгоритмы оценки фазы, основанные на усечении ряда Фурье, были исследованы в наших предыдущих работах [2]–[4].

Так как, благодаря угловой симметрии КАМ-созвездий, отличны от нуля только гармоники с номерами n , кратными 4, результирующая формула для ЛФП после усечения (9) принимает следующий вид:

$$\text{LLF}(\varphi_0 | \dot{x}) = \text{Re} \sum_{n=0}^N \dot{F}_{4n}(\dot{x}) e^{-j4n\varphi_0}, \quad (11)$$

где N — число используемых гармоник, и

$$\dot{F}_{4n}(\dot{x}) = A_{4n}(r) \exp(j4n\varphi) \quad (12)$$

есть нелинейно преобразованный отсчет сигнала.

Производная ЛФП (11) по фазе записывается следующим образом (слагаемое с номером $n = 0$ не зависит от фазы, поэтому его производная равна нулю):

$$\frac{\partial \text{LLF}(\varphi_0 | \dot{x})}{\partial \varphi_0} = \text{Im} \sum_{n=1}^N 4n \dot{F}_{4n}(\dot{x}) e^{-j4n\varphi_0}. \quad (13)$$

Применяя (13) к сигналу после коррекции фазы, мы получаем следующую формулу для сигнала ошибки в замкнутой системе синхронизации:

$$e(k) = \text{Im} \sum_{n=1}^N n \dot{F}_{4n}(\dot{x}(k)) \exp(-j4n\hat{\varphi}_0(k-1)). \quad (14)$$

Усеченный ряд Фурье дает глобальную аппроксимацию, которая минимизирует суммарную квадратическую ошибку, в то время как для уменьшения шума петли необходимо использовать локальную ап-

проксимацию ЛФП в окрестности максимума. Это приводит к идее оптимизации весовых функций для гармонического и бигармонического метода, которая была предложена в [5]. В следующем разделе мы кратко рассмотрим оптимизацию весовых функций для замкнутой системы синхронизации.

3. Оптимизация весовых функций путем минимизации дисперсии оценки

Дисперсия оценки может быть получена квадратичной аппроксимацией (т.е., усечением ряда Тейлора) ЛФП в окрестности истинного значения [7]. В [8] было показано, что для минимизации дисперсии оценки фазы и поиска оптимальных весовых функций необходимо решить следующую оптимизационную задачу:

$$\overline{X_1^2} / (\overline{X_2})^2 \rightarrow \min, \quad (15)$$

где X_1 и X_2 — соответственно, первая и вторая производные ЛФП. В случае замкнутой синхронизации X_1 соответствует математическому ожиданию сигнала ошибки, а X_2 — наклону S-кривой. Таким образом, в (15) минимизируется дисперсия оценки в петле синхронизации.

Оптимальные весовые функции были получены в [5] для гармонического метода ($N = 1$)

$$A_4(r) = -D_4(r) / (2N_4(r)) \quad (16)$$

и бигармонического метода ($N = 2$)

$$A_4(r) = \frac{N_{48}(r)D_8(r) - 2N_8(r)D_4(r)}{4N_4(r)N_8(r) - N_{48}^2(r)}, \quad A_8(r) = \frac{N_{48}(r)D_4(r) - 2N_4(r)D_8(r)}{4N_4(r)N_8(r) - N_{48}^2(r)}, \quad (17)$$

$$N_4(r) = 16 \int_0^{2\pi} \sin^2(4\varphi) p(r, \varphi) d\varphi, \quad N_8(r) = 64 \int_0^{2\pi} \sin^2(8\varphi) p(r, \varphi) d\varphi, \quad N_{48}(r) = 64 \int_0^{2\pi} \sin(4\varphi) \sin(8\varphi) p(r, \varphi) d\varphi, \quad (18)$$

$$D_4(r) = -16 \int_0^{2\pi} \cos(4\varphi) p(r, \varphi) d\varphi, \quad D_8(r) = -64 \int_0^{2\pi} \cos(8\varphi) p(r, \varphi) d\varphi. \quad (19)$$

Усреднение в (18)–(19) производится по ФПВ отсчета сигнала $\dot{x}$ в полярных координатах:

$$p(r, \varphi) = \frac{r}{2\pi\sigma^2 M} \sum_{m=1}^M \exp\left(-\frac{r^2 + r_m^2 - 2rr_m \cos(\varphi - \varphi_m)}{2\sigma^2}\right), \quad (20)$$

где $r_m = |\dot{C}_m|$ и $\varphi_m = \arg \dot{C}_m$.

4. Аналитическое выражение для S-кривой

Получим аналитическое выражение S-кривой для постоянной ошибки ϕ путем усреднения сигнала ошибки (14) по ФПВ (20), а также наклон S-кривой A дифференцированием полученной зависимости:

$$S(\phi) = E\{e(k)|\phi\}, \quad A = \frac{\partial S(\phi)}{\partial \phi} \Big|_{\phi=0}. \quad (21)$$

Для гармонического метода получаются следующие выражения:

$$S(\phi) = \sum_{m=1}^M H_{4m} \sin(4\varphi_m + 4\phi), \quad A = 4 \sum_{m=1}^M H_{4m} \cos(4\varphi_m), \quad H_{nm} = \frac{1}{\sigma^2 M} e^{-\frac{r_m^2}{2\sigma^2}} \int_0^\infty A_n(r) r e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} I_n\left(\frac{rr_m}{\sigma^2}\right) dr. \quad (22)$$

Для бигармонического метода имеем:

$$S(\phi) = \sum_{m=1}^M \{H_{4m} \sin(4\varphi_m + 4\phi) + 2H_{8m} \sin(8\varphi_m + 8\phi)\}, \quad A = 4 \sum_{m=1}^M \{H_{4m} \cos(4\varphi_m) + 4H_{8m} \cos(8\varphi_m)\}. \quad (23)$$

5. Результаты моделирования

Для оценки точностных характеристик предложенных методов с оптимизированными весовыми функциями было выполнено компьютерное моделирование. Для измерения дисперсии оценки фазы результат усреднялся по выборке длиной $K = 10^6$ символов. Начальное значение φ_0 было равно нулю (чтобы избежать переходных процессов в петле). Эквивалентная полоса петли ВТ выбиралась такой, чтобы эквивалентная длина выборки для разомкнутой оценки была равна 100 символам [1]. Наклон S-кривой A определялся по формулам (22) и (23), а значение γ — по формуле (5), результаты моделирования представлены только для петли 1-го порядка астатизма. Результирующие зависимости дисперсии оценки от ОСШ для созвездия КАМ-32 показаны на рис. 2 для следующих алгоритмов:

- “CHE1” — гармонический метод с весовыми функциями, зависящими от ОСШ (16).
- “CHE2” — бигармонический метод с весовыми функциями, зависящими от ОСШ (17).
- “CHE1, SNR = 25 дБ” — гармонический метод с фиксированными весовыми функциями.
- “CHE2, SNR = 25 дБ” — бигармонический метод с фиксированными весовыми функциями.
- “DD” — алгоритм, управляемый решениями.
- “MCRB” — модифицированная граница Крамера-Рао для оценки фазы [1].

Из графиков видно, что бигармонический метод дает результаты, близкие к алгоритму, управляемому решениями, и сходится к границе Крамера-Рао. Гармонический метод демонстрирует проигрыш до 9 дБ. Также на рис. 2 результаты представлены для упрощенной реализации гармонического и бигармонического методов с фиксированными весовыми функциями. Они показывают, что использование весовых функций, рассчитанных для некоторого среднего ОСШ (например, 25 дБ для КАМ-32), практически не приводит к заметным потерям. При практической реализации рекомендуется использовать весовые функции, рассчитанные для рабочего ОСШ.

На рис. 3 представлены S-кривые для рассмотренных алгоритмов. Анализ S-кривой даёт информацию о системе с точки зрения её сходимости. В частности, нули с положительным наклоном представляют устойчивые точки равновесия, с отрицательным — неустойчивые. Это означает, что диапазон захвата для алгоритма, управляемого решениями, составляет около 0,2 радиан, в то время как для гармонического и бигармонического алгоритма он равен полному диапазону ($\pm\pi/4$). Следует отметить, что для гармонического метода отсутствие ложных устойчивых точек гарантировано, а для бигармонического метода это зависит от весовых функций, так как сигнал ошибки формируется суммированием двух гармоник.

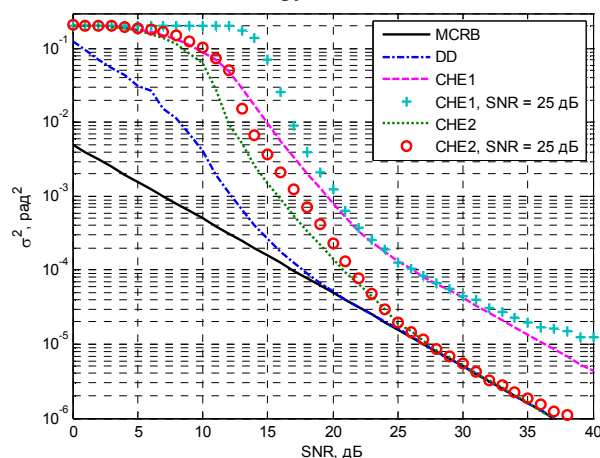


Рис. 2. Дисперсия оценки фазы для КАМ-32

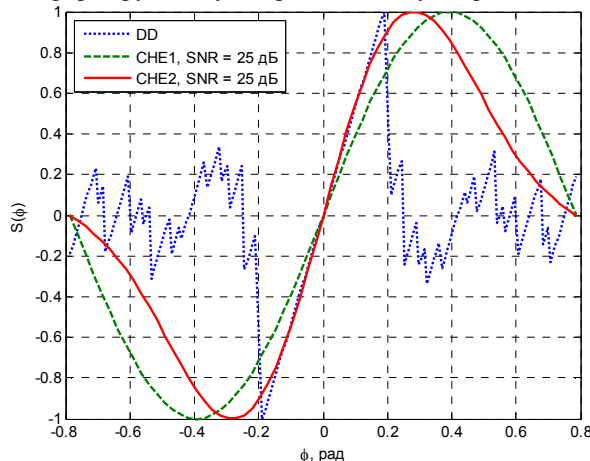


Рис. 3. S-кривые для КАМ-32

Заключение

Предложенный алгоритм замкнутой синхронизации демонстрирует хорошие характеристики. В частности, оптимальный бигармонический метод имеет дисперсию, близкую к алгоритму, управляемому решениями, и сходится к границе Крамера-Рао при высоких ОСШ. По сравнению с алгоритмом, управляемым решениями, рассмотренный метод обладает более широким диапазоном захвата (для гармонического метода отсутствие ложных точек равновесия гарантировано). Также преимущество алгоритма заключается в отсутствии необходимости принятия жестких решений, которые могут отсутствовать в детекторах с мягкими решениями. Для слежения за частотой необходимо вместо петли первого порядка (3) использовать петлю второго порядка астатизма (4). Разложение ЛФП в ряд по угловым гармоникам может быть легко применено к любой амплитудно-фазовой модуляции. Отличие будет заключаться только в симметрии сигнального созвездия, то есть в номерах используемых гармоник.

Литература

1. U. Mengali, A. D'Andrea, Synchronization techniques for digital receivers. Plenum Press, New York, 1997.
2. А. В. Петров, А. Б. Сергиенко, "Новый алгоритм слепой оценки фазового сдвига для КАМ-сигналов на основе аппроксимации функции правдоподобия," Цифровая обработка сигналов, №1, 2011, с. 28–32.
3. A. B. Sergienko, and A. V. Petrov, "Blind carrier frequency offset estimation for QAM signals based on weighted 4th power of signal samples," Proc. 8th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS 2010), St. Petersburg, September 17–20, 2010, pp. 278–281.
4. A. B. Sergienko, and A. V. Petrov, "Joint blind estimation of carrier phase and frequency offset for QAM signals using circular harmonic decomposition," Proc. 36th IEEE International Conference on Acoustic, Speech and Signal Processing (ICASSP 2011), Prague, May 22–27, 2011, pp. 3460–3463.
5. A. V. Petrov, and A. B. Sergienko. Optimal Blind Biharmonic Feedforward Phase Offset Estimation for QAM Signals. Proc. IEEE International Conf. on Commun. (ICC 2013), Budapest, June 9–13, 2013, pp. 3349–3353.
6. G. Jacovitti, and A. Neri, "Multiresolution circular harmonic decomposition," IEEE Trans. Signal Processing, Vol. 48, No. 11, Nov. 2000, pp. 3242–3247.
7. H. C. So, Y. T. Chan, K. C. Ho, and Y. Chen, "Simple Formulas for Bias and Mean Square Error Computation," IEEE Signal Processing Magazine, July 2013, pp. 162–165.
8. A. Petrov, and A. Sergienko, "Analytical Evaluation of Performance for Harmonic and Biharmonic Methods of Blind Phase Offset Estimation," Proc. 13th IEEE Int. Symp. on Problems of Redundancy in Information and Control Systems, Saint-Petersburg, September 5–10, 2012, pp. 57–61.

FEEDBACK BLIND FREQUENCY AND PHASE SYNCHRONIZATION ALGORITHM FOR QAM SIGNALS

Petrov A. V., Sergienko A. B.

St. Petersburg State Electrotechnical University «LETI», 5 Prof. Popov Street, St. Petersburg, 197376, Russia

The algorithm is presented for feedback blind frequency and phase synchronization for signals with quadrature amplitude modulation. The algorithm is based on a circular harmonic expansion (CHE) of log-likelihood function (LLF). Retaining one or two most significant terms in this series gives a harmonic or biharmonic circular decomposition of the LLF. Earlier this approach was presented by authors for feedforward blind phase and frequency estimation. In this paper we present the application of CHE of LLF to feedback synchronization. The main point is to employ the derivative of LLF approximation by CHE as an error signal for phase recovery loop. The simulation results show that optimal biharmonic method has such estimation variance that is close to decision-directed algorithm and approaches modified Cramer-Rao bound. The advantages of the algorithm are a wide acquisition range and no necessity of hard decisions that may be absent in soft-output detectors. CHE of LLF can be easily applied to any amplitude-phase shift keying modulation. The difference consists only in symmetry of constellation, i.e. in the numbers of used harmonics.