# СЕКЦИЯ

# МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАДИОФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Руководитель – д.ф.-м.н., профессор **КРАВЧЕНКО В.Ф.**

## ПРИМЕНЕНИЕ АТОМАРНЫХ ФУНКЦИЙ И R-ФУНКЦИЙ К ЗАДАЧЕ ВЫДЕЛЕНИЯ СЛОЖНЫХ КОНТУРНЫХ СИГНАЛОВ ИЗ ЗАШУМЛЕННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Чуриков Д.В.

Московский физико-технический институт (государственный университет)

1. Существует множество систем, обрабатывающих графическую информацию. К ним относятся системы машинного зрения, распознавания, слежения и обработки изображений. В работе [1] было показано, что наиболее информативными в задаче распознавания являются контуры объектов. Как можно увидеть, контурная информация оказывается полезной во всех устройствах обработки графической информации. Поэтому, для реализации эффективных алгоритмов обработки и анализа изображений, в том числе на основе R-функций, следует выделять границы объектов изображения (или элементов сцены). Затем необходимо формировать некоторые контурные сигналы соответствующие исходному изображению.

Цифровые изображения, в частности, радиолокационные, формируются на основе информации, поступающей от формирующих изображение элементов. Из этих сигналов, подверженных дискретизации и квантованию, формируются матрицы растровых изображений. В общем виде цифровое изображение – это одна или несколько прямоугольных матриц, имеющие размерность $N \times M$. Каждая ячейка матрицы полностью описывает некоторую точку цифрового изображения. Большинство технических систем работают в жестких эксплуатационных условиях и подвержены действию разнообразных неблагоприятных факторов. Это обуславливает появление искажений и ошибок в получаемой информации. Кроме того, на каждом этапе формирования дискретного изображения ошибки и искажения только увеличиваются. Это приводит к необходимости в корректировке сформированных цифровых изображений перед дальнейшим использованием.

2. Основные идеи работы основаны на теории контурного анализа [1] и атомарных функций (АФ). Теория АФ подробно изложена в монографии В.Ф. Кравченко [2]. Здесь использовались $up_m(x)$ и $fup_n(x)$ функции.

Итак, исходное изображение представляет собой матрицу яркостей $Im(i, j)$, где $i = 1, 2, .., M$, $j = 1, 2, .., N$, а $N \times M$ – размер изображения. Полученное цифровое изображение рассматривается как система связанных одномерных сигналов, сформированных по горизонтальной и вертикальной размерностям. Построение контурного изображения проводится с использованием различных подходов. Учитывая наличие в исходных изображениях значительных шумовых составляющих, можно сформулировать некоторые необходимые требования, предъявляемые к ним. Эти требования заключаются в следующем: необходимо обеспечить высокую помехоустойчивость и надежность вычислительных алгоритмов, а также минимизировать вычислительную сложность. Учитывая последнее, ясно, что предлагаемые алгоритмы должны быть с одной стороны основаны на применении функций с компактным носителем, а с другой обладать хорошими фильтрующими свойствами. Такими функциями являются АФ, вейвлеты и сплайны.

а) б) в) г)

Рис. 1. Тестовые изображения

В данной работе рассматриваются изображения одиночных объектов, порождающих односвязанные контуры. На рис. 1, а-г. изображены некоторые тестовые изображения. В качестве мешающего воздействия



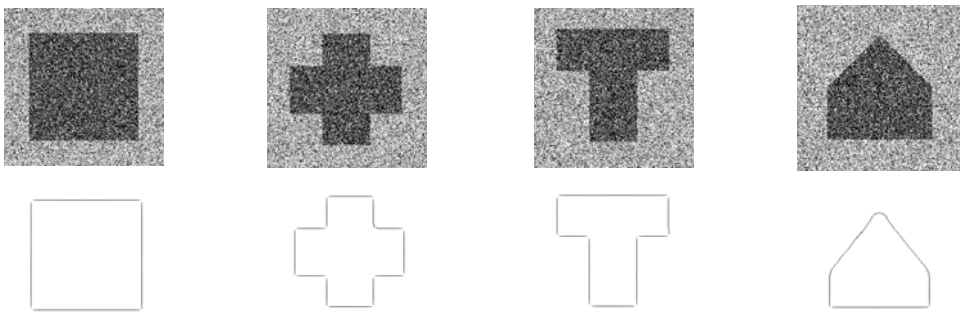
ЗАО АВТЭКС Санкт-Петербург тел/факс: 567-72-02 info@autex.spb.ru

выбран двумерный случайный процесс, плотность распределения которого подчиняется нормальному закону:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}} \quad (1)$$

в данном случае $m_X = 0$, а среднеквадратическое отклонение $\sigma_X$ выбирается таким образом, чтобы отношение энергии полезного сигнала и помехи было порядка нескольких децибел. Диапазон изменения значений яркости полезного изображения настраивается в пределах $[0,25\,;\,0,75]$.

На первом этапе работы алгоритма происходит выделение границ изображения на основе АФ [2,4] и с использованием вейвлет-анализа изображения [6,7]. В результате происходит формирование некоторой маски, на которой обозначены точки, принадлежащие к границам изображенного объекта. Исходные изображения и результат выделения границ для различных тестовых изображений приведены на рис. 2, а-г.



а) б) в) г)

Рис. 2. Результаты выделения контуров из зашумленных тестовых изображений

На следующем этапе алгоритма формируется контурный сигнал. Для того чтобы получить контурный сигнал, необходимо ввести процедуру нумерации граничных точек. Для этого можно применить несколько алгоритмов:

*а) Нумерация точек в системе отсчета с началом в центре тяжести.* Определяется цент тяжести $O$ множества точек контура. Затем строится пучок с полюсом, совмещенным с точкой $O$. Выбирается радиус вектор (РВ) с минимальным значением модуля и принимается за нулевой. В естественном порядке следования производится нумерация всех остальных радиус векторов. Выбор центра тяжести в качестве полюса зашумленного пучка оправдан тем, что дисперсия флуктуаций его положений в $n$ раз меньше дисперсии ошибки определения любой точки контура.

*б) Алгоритм нумерации точек контура «минимальное дерево».* Задачу упорядочивания множества точек контура можно рассматривать как задачу минимизации длины сети, связывающую заданное количество точек кабелем минимальной длины. В результате наблюдения $k$ точек производится их первичная нумерация и построена матрица расстояний $R_{k\times k}$. Элементами $l$-ой строки этой матрицы являются величинами расстояний между $l$-ой и всеми остальными точками контура в первичной нумерации:

$$R_{lj} = \left|\xi(l) - \xi(j)\right|, \; j = \overline{1,k} \quad (2)$$

где $\xi(j)$, $j = \overline{1,k}$ – точки контура к комплексном коде.

Построение минимального дерева может быть начато с любой точки контура. Упорядочение происходит путем поиска ближайшей точки к каждой последующей. Эта операция заключается в поиске наименьшего элемента в $l$-ой строке:

$$\upsilon = \arg\left\{\min_{j=\overline{1,k}}(R_{lj})\right\} \quad (3)$$

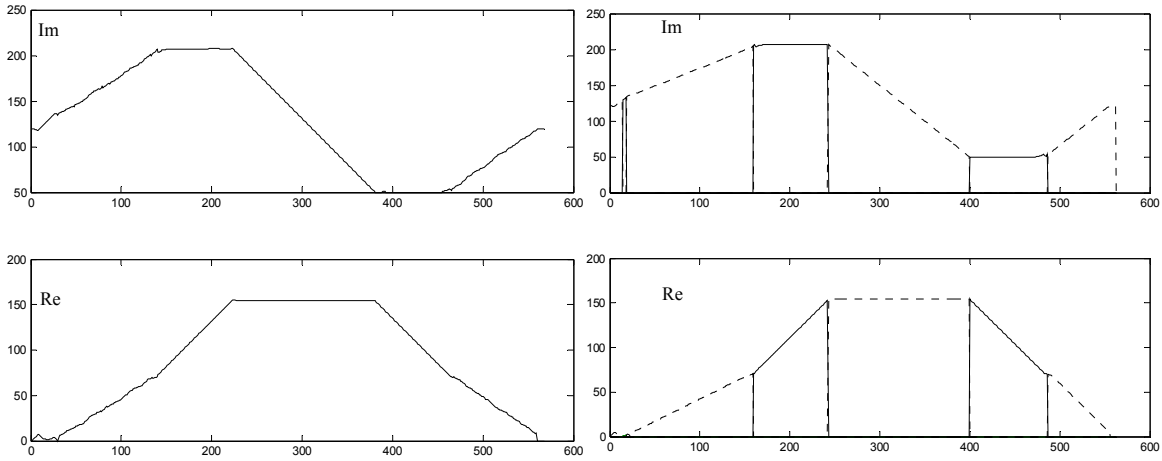
$\upsilon$ – номер следующей точки минимального дерева.

На следующем шаге полагается $l = \upsilon$, и происходит повторение цикла поиска до тех пор, пока не будут перебраны все точки контура или не будет принято решение о замыкании контура. Последняя ситуация возникает при наличии нескольких замкнутых контуров изображения.

Контурные сигналы могут задаваться различными способами. В их основе лежит разбиение исходного контура на более мелкие детали. В дискретном случае на отрезки, соединяющие соседние точки – элементарные вектора (ЭВ). В данной работе сформированные контурные сигналы представлены комплексным

кодом. Такое представление позволяет довольно гибко переходить от сигнальной формы к графической. Действительная и мнимая части контурного сигнала для тестового изображении (рис. 2, г) изображены на рис. 3,а.

Для повышения качества контурных сигналов проводится их фильтрационная обработка. Предполагается, что сложный контур может быть составлен из нескольких сегментов. Исходя из этого допущения, производится сегментация контурных сигналов. Процедура сегментация направлена на получение сегментов – более гладких, чем исходный сигнал. Контурный сигнал сегментируется на базе алгоритма из [4]. Затем происходит раздельная обработка этих сегментов. Для повышения качества полученных контурных сигналов проводится процесс фильтрации, а при необходимости и процесс интерполяции. Интерполяция помогает увеличить разрешение контурного изображения. Она проводится по алгоритму Чайкина, DLG [1] на основе АФ и сплайнов [2]. Отфильтрованные сегменты контурных сигналов представлены на рис. 3, б. На этом этапе проводится сжатие и минимизация полученной информации.




а) б)

Рис. 3. Выделенный контурный сигнал (а), отфильтрованные сегменты контурный сигнал (б)

Обработанные контурные сигналы преобразуются в замкнутые структуры, которые могут быть описаны на основе R-функций [3]. R-функции опираются на алгебру логики и позволяют описывать сложные контурные структуры единой аналитической формулой. Такое описание позволяет решать более широкий класс задач обработки изображений и сложных контурных сигналов, чем поточечное представление.

**Литература**

1. Введение в контурный анализ; приложения к обработке изображений и сигналов/ под ред. Я.А. Фурмана. – 2-е изд., – М.: Физматлит, 2003.
2. Кравченко В.Ф. Лекции по теории атомарных функций и некоторым их приложениям.– М.: Радиотехника, 2003.
3. Кравченко В.Ф., Басараб М.А. Булева алгебра и методы аппроксимации в краевых задачах электродинамики. М.: Физматлит, 2004.
4. Чуриков Д.В. Атомарные функции и комбинированный алгоритм фильтрации изображений в условиях помехи высокой интенсивности //Радиотехника. 2004. №9. С. 69-71.
5. Путятин Е.П., Аверин С.И. Обработка изображений в робототехнике. – М.: Машиностроение, 1990.
6. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. – М.: РХД, 2001.
7. Столниц Э., ДеРоуз Т., Салезин Д. Вейвлеты в компьютерной графике. Теория и их приложения. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.
8. Анисимов Б.В., Курганов В.Д., Злобин В.К. Распознавание и цифровая обработка изображений. – М.: Высш. шк., 1983.

Abstract: The new method of contour signals separation from noisy images is offered. The offered method is based on the theory of atomic functions [2] and the wavelets [6]. The algorithm considered in [4] is applied to allocation of borders of objects. The generated contour signals are exposed to segmentation and separate processing. Resulting complex contours can be described by R-functions.


ЗАО АВТЭКС Санкт-Петербург тел/факс: 567-72-02 info@autex.spb.ru

# КОМБИНИРОВАННАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АТОМАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Колпаков И.В.

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

Предложен алгоритм последовательной обработки двумерных сигналов на основе $\mathrm{LULU}$ -метода и двумерной B-сплайн-интерполяции с атомарными функциями в качестве базиса. Проведён численный эксперимент. Показана возможность повышения достоверности и гладкости сигнала.

Изображения, получаемые в задачах радиолокации, представляют собой дискретный сигнал, который может быть описан в виде одной из моделей [1]. В простейшем случае получается однобитный двумерный сигнал (чёрно-белое изображение), в других случаях – двумерный сигнал как функция от координат $x$ и $y$ - яркость или интенсивность (изображение в оттенках серого). Подобные сигналы часто содержат грубые ошибки (псевдообъекты) и случайные погрешности (шумовые искажения). Распространённые статистические методы обработки сигналов не всегда могут быть применены из-за невозможности повторения эксперимента (динамического характера сигнала), недостаточности статической информации о сигнале и других причин. В настоящей работе предлагается метод детерминированного устранения грубых ошибок и сглаживания случайных погрешностей. Удаление грубых ошибок основано на получившем широкое применение $\mathrm{LULU}$ -методе, а сглаживание случайных погрешностей – на двумерной атомарной сплайн-интерполяции.

Операторы $\mathrm{L}$ (“lower”) и $\mathrm{U}$ (“upper”) вводятся следующим образом. В одномерном случае для трёхточечной фильтрации: $\mathrm{L}x_i = \max\left\{\min\left\{x_{i-1}x_i\right\}\min\left\{x_i x_{i+1}\right\}\right\}$, $\mathrm{U}x_i = \min\left\{\max\left\{x_{i-1}x_i\right\},\max\left\{x_i,x_{i+1}\right\}\right\}$. Двойные операторы $\mathrm{LU}$ и $\mathrm{UL}$ вводятся аналогично: $\mathrm{LU}x_i = \max\left\{\min\left\{\mathrm{U}x_{i-1},\mathrm{U}x_i\right\},\min\left\{\mathrm{U}x_i,\mathrm{U}x_{i+1}\right\}\right\}_i$, $\mathrm{UL}x_i = \min\left\{\max\left\{\mathrm{L}x_{i-1},\mathrm{L}x_i\right\},\max\left\{\mathrm{L}x_i,\mathrm{L}x_{i+1}\right\}\right\}_i$. В качестве оператора фильтрации принимается оператор $Sx_i = \frac{1}{2}\left(\mathrm{LU}x_i + \mathrm{UL}x_i\right)$. Значения на краях доопределяются как $\mathrm{L}x_0 = x_0$, $\mathrm{U}x_0 = x_0$, $\mathrm{L}x_N = x_N$, $\mathrm{U}x_N = x_N$. Величины $\mathrm{LU}x_0$, $\mathrm{LU}x_N$, $\mathrm{UL}x_0$, $\mathrm{UL}x_N$ определяются аналогично. Данный метод позволяет удалить единичные грубые ошибки. Действие данного $\mathrm{LULU}$ оператора схоже с действием медианного фильтра с апертурой равной 3. Операторы $\mathrm{L}$ и $\mathrm{U}$ обладают следующими свойствами [2]:

- Результат действия оператора “lower” всегда не больше результата действия оператора “upper”: $\mathrm{L}x_i \le \mathrm{U}x_i$, причём $\mathrm{L}x_i = \mathrm{U}x_i$ тогда и только тогда, когда $x_{i-1}$, $x_i$, $x_{i+1}$ - монотонная последовательность.

- Многократное последовательное применение операторов не приводит к новым результатам: $\mathrm{U}^n = \mathrm{U}$, $\mathrm{L}^n = \mathrm{L}$, $\left(\mathrm{LU}\right)^n = \mathrm{LU}$, $\left(\mathrm{UL}\right)^n = \mathrm{UL}$, то есть, эти операторы идемпотентны.

- Результат действия суперпозиции операторов $\mathrm{LU}$ всегда не меньше результата действия суперпозиции операторов $\mathrm{UL}$: $\mathrm{LU}x_i \ge \mathrm{UL}x_i$.

Подавление грубых ошибок происходит так. Пусть в точке $i$, $i = 2..N-1$ значение функции $x_i$ содержит грубую ошибку, а в соседних точках $i-1$, $i-1$, $i+1$, грубая ошибка отсутствует, то есть, $\hat{x}_i = x_i + \delta_g$. Предположим, что грубая ошибка $\delta_g$ достаточно большая по амплитуде, чтобы выполнялось условие $x_i > x_{i\pm j}$, $j = 1,2$. Тогда $\mathrm{LU}x_i = \max\left(\min\left(\mathrm{U}x_{i-1},\mathrm{U}x_i\right),\min\left(\mathrm{U}x_i,\mathrm{U}x_{i+1}\right)\right) = \max\left(\min\left(\mathrm{U}x_{i-1},x_i\right),\min\left(x_i,\mathrm{U}x_{i+1}\right)\right)$ $= \max\left(\max\left(x_{i-2},x_{i-1}\right),\max\left(x_{i+1},x_{i+2}\right)\right) = \max\left(x_{i-2},x_{i-1},x_{i+1},x_{i+2}\right)$, т.е. $\mathrm{LU}x_i$ не зависит от $x_i$. Аналогично доказывается, что $\mathrm{UL}x_i = \max\left(x_{i-1},x_{i+1}\right)$ тоже не зависит от $x_i$. Результирующая величина $Sx_i$ также не зависит от $x_i$. Другими словами, значение $x_i$, полученное с грубой ошибкой, исключается из рассмотрения и в дальнейшем не учитывается.

Можно использовать также пятиточечный метод, операторы которого вводятся следующим образом:

$\mathrm{L}x_i = \max(\min\left(x_{i-2},x_{i-1},x_i\right),\min\left(x_i,x_{i+1},x_{i+2}\right))$, $i = 2..N-2$

$\mathrm{U}x_i = \min(\max(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i), \max(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}))$, $i = 2..N-2$;

Остальные операторы определяются аналогично. Достоинством данного метода является возможность устранять две подряд идущие грубые ошибки. Три резких отклонения сигнала подряд считаются полезным сигналом. Предложенный метод является корректным [2]. Рассмотренный оператор $\mathrm{S}$ является локально постоянным, центрированным, локальным и ограниченным. Метод фильтрации не зависит от конкретной шкалы измерения: $\mathrm{S}(Cx) = C\mathrm{S}(x)$, где $C$ - постоянная величина. Для обработки изображения используют горизонтальное и/или вертикальное сканирование с использованием скользящего окна. Удаление псевдо-объектов происходит в предположении о минимальном размере объекта [1, 7]. Также учитывается используемая модель представления изображения (насыщенность или яркость). С математической точки зрения это означает предположение об ограниченности первой производной сигнала (с физической точки зрения: реальный сигнал не может возрастать со скоростью больше заданной, с точки зрения изображения: реальные тени не могут быть слишком резкими). Для повышения качества обработки можно исходить из предположения о том, что реальные объекты должны иметь относительно симметричные детали [2, 7], то есть, наличие трёх и более «всплесков» сигнала (полезный сигнал с точки зрения $\mathrm{LULU}$-метода) при горизонтальном сканировании и отсутствие сравнимого количества «всплесков» при вертикальном сканировании считается грубой ошибкой. Применение данного метода визуально выглядит как удаление с изображения единичных точек и продольных/поперечных полос, не являющихся реальными объектами с учётом сделанных предположений.

Сглаживание случайных погрешностей производится с использованием двумерной B-сплайн-интерполяции [5]. В качестве базисных сплайн-функций берутся атомарные функции (АФ) [3]. Выбор АФ в качестве базисных функций обусловлен их бесконечной дифференцируемостью при хороших интерполирующих свойствах. Бесконечная дифференцируемость может потребоваться при дальнейшей обработке сигнала и его восстановлении. Используемые B-сплайны имеют прямоугольную опорную область [3], т.е. образуются прямым произведением $\varphi(x, y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)$. Дискретный сигнал можно считать заданным таблично на сетке с равноотстоящими узлами $f(x, y)$, $f_{i,j} = f(x_i, y_j)$, $i, j = 0,1,...,N$. Строится пространственная сетка [5]. Сглаживание достигается, если в качестве исходных значений использовать не весь набор точек, а только часть их [6], а также использовать систему пересекающихся B-сплайнов. В качестве системы B-сплайнов берётся система [6], гарантирующая наилучшую точность приближения по порядку. Для одномерного случая: $B(x) = \sum_{i=0}^{m+1} \alpha_i b_i(x)$, где $\alpha_i = \frac{4}{3} f(x_i) - \frac{1}{6} f(x_{i-1}) - \frac{1}{6} f(x_{i+1})$, $b_i = \varphi(x - i)$, для двумерного случая – аналогично. Для построения системы B-сплайнов одними из лучш[illegible]и $N = 2, 3$, которые сходны по своим свойствам с классическими B-сплайнам[illegible]ифференцируемыми. Оценки погрешности интерполяции аналогичны оценкам[illegible]гаемое сглаживание случайных погрешностей эквивалентно уменьшению ко[illegible]счёт потери мелких деталей. С физической точки зрения это означает предполо[illegible]бъекты имеют достаточно гладкие границы.

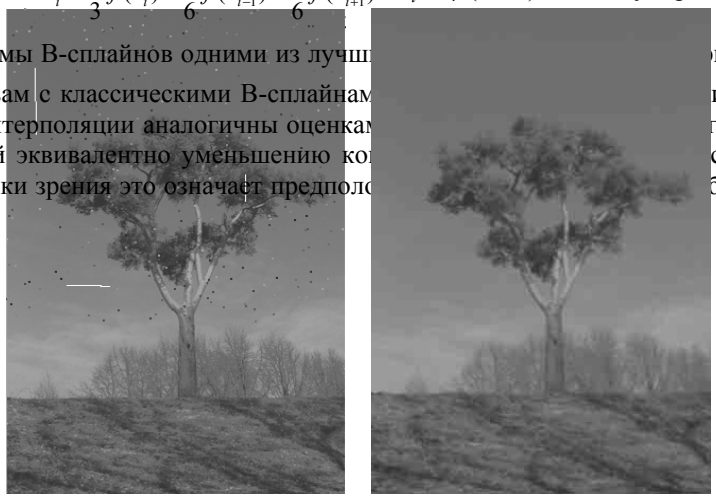


Рис.1. Рисунки до обработки (слева) и после обработки (справа)

По предложенным алгоритмам проведён численный эксперимент. В качестве примера изображения использован файл формата bitmap с зашумлением на основе радиолокационной модели. Изображение пред-


ЗАО АВТЭКС Санкт-Петербург тел/факс: 567-72-02 info@autex.spb.ru

ставлено в виде оттенков серого. После подавления грубых ошибок из изображения удаляются вертикальные полосы и пятна. После сглаживания случайных погрешностей изображение становится более «ровным». Анализ рис.1 показывает, что у обработанного изображения снижается контрастность (исчезают самые мелкие детали), а грубые ошибки полностью удаляются.

**Литература**


1. Д. Роджерс. Алгоритмические основы машинной графики. Пер. с англ. С.А. Вичеса, Г.В. Олохтоновой и П.А. Монахова, под ред. Ю.М.Баяковского, В.А. Галактионова. М.: Мир, 1989, 504 с.
2. C.H. Rowher. Idempotent One-Sided Approximation of Median Smoothers. Journal of Approximation Theory, 1989, vol. 58, no 2, p. 151-163.
3. В.Ф. Кравченко. Лекции по теории атомарных функций и некоторым их приложениями. М.: Радиотехника, 2003, 512с.
4. И.В. Колпаков, В.Ф. Кравченко, М.А. Басараб. Атомарные функции и их применение в задачах сплайн-интерполяциии. Электромагнитные волны и электронные системы. 2002, т.7, №1, с.32-40.
5. В.М. Вержбицкий. Основы численных методов. – М.:Высшая школа, 2002, 840 с.
6. Н.П. Корнейчук. Точные константы в теории приближения. - М.:Наука, 1987.
7. В.Г. Радзиевский, А.А. Сирота. Теоретические основы радиоэлектронной разведки. – М.: Радиотехника, 2004, 432с.


In the given work the combined method of processing of images is offered. The method includes removal of gross blunders and smoothing of casual errors. Gross blunders leave by means of a LULU-method, the further smoothing of random errors is made by means of bidimentional splines-approximation by atomic functions.

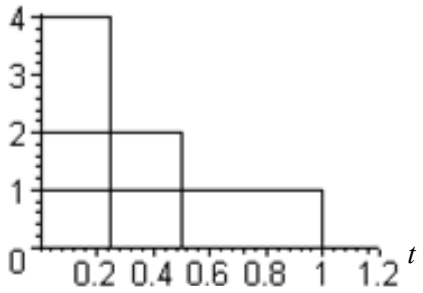
## ВРЕМЕННЫЕ ВЕСОВЫЕ ФУНКЦИИ КРАВЧЕНКО В ЗАДАЧАХ РАДИОЛОКАЦИИ

Колпаков И.В.

Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана

Предложен и обоснован метод описания атомарных функций (весовых функций Кравченко) на основе преобразования Лапласа. Проведён анализ применения полученных результатов в задачах обработки сигналов. Показана возможность использования данных функций в классе задач теории автоматического управления

Атомарные функции (АФ) используются в задачах цифровой обработки сигналов в качестве оконных функций. АФ также имеют большое значение в задачах цифровой радиолокации. Простейшие АФ задаются как свёртка прямоугольных импульсов различной ширины и высоты [1 - 4]. Например, т.н. материнская АФ $up(x)$ задаётся своим спектром Фурье в виде: $up(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(j\omega x)\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(\omega 2^{-k})}{\omega 2^{-k}}d\omega$. Представляет интерес применение АФ в задачах обработки сигналов, когда имеется математическая модель динамического процесса в классе задач теории автоматического управления. К таким задачам относятся многие радиолокационные задачи. В этом случае желательно иметь аналитическое описание АФ на основе операционного исчисления. В настоящей работе предлагается метод описания АФ с использованием преобразования Лапласа на основе их физической природы (свёрток прямоугольных импульсов и сумм импульсов). Рассмотрим систему импульсов для построения АФ на примере $up(t)$. Импульсы $f_k(t)$ имеют вид $f_k(t)=2^{k-1}\left(H(t)-H\left(t-2^{1-k}\right)\right)$, где $H(t)$ - функция Хевисайда рис. 1. В отличие от импульсов, определяющих $up(x)$, система импульсов $up(t)$ является несимметричной.

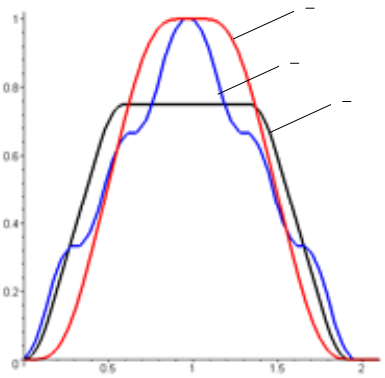




ЗАО АВТЭКС Санкт-Петербург тел/факс: 567-72-02 info@autex.spb.ru

Рис. 1. Импульсы, образующие функцию $up(t)$.

Использование симметричной системы аналогично [1, 6] со сдвигом по оси абсцисс приведёт к зависимости расположения функции от количества импульсов. Изображение по Лапласу импульса рис. 1. записывается как $\mathrm{L}(f_k(t)) = \int_0^\infty f_k(t)\exp(-st)dt = 2^{k-1}\frac{1-\exp(-2^{1-k}s)}{s}$. Согласно теореме о свёртке, произведение изображений импульсов $f_k(t)$ образует изображение АФ $up(t)$, из которого можно найти саму функцию $up(t)$ путём обращения График АФ $up(t)$ приведён на рис. 2. Функция $up(t)$ удовлетворяет функционально-дифференциальному уравнению $up'(t) = 2up(2t) - 2up(2t-2)$. Анализ данного выражения указывает на его сходство с уравнением для материнской функции [1]. Отличие состоит в сдвиге аргумента по оси абсцисс на половину ширины носителя вправо, то есть, на величину $t = 1$. Другая АФ, часто используемая в задачах обработки сигналов (фильтрации, цифровой радиолокации и обработки речи) $\hat{h}_a(t)$ является обобщением $up(t)$ [2 - 3]. Импульсы, составляющие $\hat{h}_a(t)$, имеют вид $f_k = \frac{a^k}{2(a-1)}\left(H(t) - H\left(t - 2\frac{a-1}{a^k}\right)\right)$, а их изображение задаётся как $\mathrm{L}\{f_k\} = \frac{a^k}{2(a-1)}\left(\frac{1}{s} - \frac{\exp\left(-2\frac{a-1}{a^k}s\right)}{s}\right)$. АФ, полученная после обращения этого выражения, удовлетворяет функционально-дифференциальному уравнению, которое также получается сдвигом вправо аргумента уравнения для $h_a(x)$. Ещё одна функция, применяемая в задачах синтеза антенн, $up_m(t)$ определяется системой сумм импульсов прямоугольной формы. Количество импульсов в суммарном импульсе равно порядку функции $m$. В качестве примера рассмотрим следующую систему: $f^1{}_{m,k} = \frac{H\left(t - \frac{2k-1}{2m}\right) - H\left(t - 2 + \frac{2k-1}{2m}\right)}{m}$. Изображение по Лапласу таких импульсов имеет вид: $\mathrm{L}\{f^1{}_{m,k}\} = \frac{1}{m}\frac{-\exp\left(-\frac{2k-1}{2m}s\right) + \exp\left(\left(-2 + \frac{2k-1}{2m}\right)s\right)}{s}$. Функция $up_m(x)$ - симметричный аналог $up_m(t)$ - удовлетворяет функционально-дифференциальному уравнению вида $up'_m(x) = 2\sum_{k=1}^{m}\left(up_m(2mx + 2m - 2k + 1) - up_m(2mx - 2k + 1)\right)$. Сдвиг аргумента вправо для получения функционально-дифференциального уравнения $up_m(t)$, составит величину $2m - 1$, например, для $m = 3$ уравнение имеет




вид $up'_m(x) = 2\sum_{k=1}^{m}\left(up_m(2mx + 2m - 2k - 4) - up_m(2mx - 2k - 4)\right)$. В практических целях (из-за особенности описания) можно искусственно ограничивать слева указанные функции умножением на $H(t)$. Количество импульсов, составляющих АФ, $k$ выбирается, исходя из требований к дифференцируемости функции и на практике обычно лежит в пределах $4..10$,

Рис. 2. Графики атомарных функций 1. $up(t)$; 2. $up_m(t)$, $m = 3$; 3. $\hat{h}_a(t)$, $a = 3$.


ЗАО АВТЭКС Санкт-Петербург тел/факс: 567-72-02 info@autex.spb.ru

Данные функции обладают всеми свойствами АФ. Основными свойствами являются:

- финитность. Носителем этих функций является отрезок $[0,2]$;
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) = 1$, где $f(t)$ - АФ.
- производная этих функций подобна самой функции [1 - 4];
- указанные функции являются решениями функционально-дифференциальных уравнений, аналогичным уравнениям своих симметричных аналогов ($up(x)$, $h_a(x)$ и $up_m(x)$) со смещением аргумента вправо.

Полученные функции могут использоваться в качестве самостоятельного класса атомарных функций, удовлетворяющих своим функционально-дифференциальным уравнениям, а могут использоваться в качестве варианта описания обычных АФ, задаваемых спектром Фурье, в тех задачах, где требуется получить АФ, расположенную в правой полуплоскости.

Примерами применения указанных функций являются КИХ и БИХ фильтры [6], где АФ используются в качестве передаточных функций.

**Выводы**.

Предложенный метод описания АФ позволяет получить класс функций, сходных по свойствам с функциями, задаваемыми спектром Фурье. Описание на основе операционного исчисления существенно упрощает численную реализацию методов при использовании АФ для расчёта фильтров и антенн. Данные функции обладают всеми свойствами классических атомарных функций и являются решениями функционально-дифференциальных уравнений, сходных со своими симметричными аналогами со сдвигом аргумента.

**Литература**

1. Кравченко В Ф. Лекции по теории атомарных функций и некоторым их приложениями. М.: Радиотехника, 2003, 512с.

2. Кравченко В.Ф. Новые синтезированные окна. ДАН РАН, 2002, т.382, №2, с. 190-198.

3. Колпаков И.В., Кравченко В.Ф., Басараб М.А.. Атомарные функции и их применение в задачах сплайн-интерполяциии. – Электромагнитные волны и электронные системы, 2002, т.7, №1, с.32-40.

4. Кравченко В.Ф., Пустовойт В.И. Новый класс весовых функций и их спектральные свойства. — ДАН РАН, 2002, т. 386, №1, с. 38–42.

5. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. – М.:Высшая школа, 2002, 840 с.

6. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 3-х т. Т.2 / Под ред. Н.Д. Егупова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2000, 736с.

7. Слока В.К. Вопросы обработки радиолокационных сигналов. – М.: Советское радио, 1970.

In the given work the method of the description of atomic functions with the help of Laplace-transformation is offered and proved. The received functions may be used as an independent class of atomic functions in problems of a window-filtration, processing of signals and in the theory of automatic control.

## ВЕСОВАЯ ОБРАБОТКА ЗОНДИРУЮЩИХ СИГНАЛОВ ФУНКЦИЯМИ КРАВЧЕНКО-РВАЧЕВА В РАДИОЛОКАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ

Смирнов Д.В.

Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана

Построены функции неопределенности (ФН) дискретно-кодированных сигналов (ДКС) при весовой обработке. Предложены оптимальные частотные весовые функции для взвешивания амплитуд ДКС, построенные на основе атомарных функций Кравченко-Рвачева. Проведен анализ полученных результатов при различных сечениях функции неопределенности. Показана возможность значительного снижения уровня боковых лепестков ФН при высокой разрешающей способности по задержке и частоте.

**Введение.**

С широким применением на практике цифровых методов формирования и обработки радиолокационных сигналов получили развитие вопросы синтеза и анализа использования дискретно-кодированных сигналов. Для повышения надежности обнаружения слабых сигналов на фоне помех используются сложные зондирующие сигналы. При этом для удовлетворения требований, предъявляемых к современным радиолокаци-

онным станциям (РЛС), они должны обладать функциями неопределенности определенного вида, а также обеспечивать низкий уровень боковых лепестков и высокую разрешающую способность по задержке и частоте [1]. С целью обеспечения необходимых конструктивных требований к РЛС используется метод весовой обработки. Одной из перспективных в этом направлении является теория атомарных функций (АФ) [2-6], которая используется в данной работе. Одним из возможных путей повышения надежности обнаружения слабых сигналов при наличии шумов и помех является использование сложных зондирующих сигналов. Сложные или энергоемкие сигналы позволяют разрешать противоречивые требования повышения дальности обнаружения и разрешающей способности. В настоящее время широко используются два вида сложных сигналов: линейно-частотно-модулированные (ЛЧМ) и дискретно-кодированные (ДКС). Такие сигналы обеспечивают высокую совместную разрешающую способность по задержке и частоте и низкий уровень боковых лепестков.

**Дискретно-кодированные по частоте сигналы (ДКЧС).** Методы весовой обработки с целью уменьшения уровня боковых лепестков могут быть основаны на амплитудном взвешивании огибающей передаваемого сигнала или частотного отклика согласованного фильтра приемника. Комплексная огибающая сложного дискретно-кодированного по частоте сигнала может быть представлена в виде

$$U(t)=\begin{cases}\sum_{n=0}^{N-1}A_n rect(t-nT)\exp[j2\pi f_n(t-nT)+j\varphi_n],0\le t\le(N-1)T,\\ 0,t>(N-1)T\end{cases}, \tag{7}$$

где $A_n$ - амплитуда парциального прямоугольного импульса; $\varphi_n$ - начальная фаза сигнала; $f_n$ - частотно-временной код, который задается в виде числовой последовательности $N_{f_n}$ из $N$ целых чисел без повторений: $f_n=N'_{f_n}\Delta f$; $N'_{f_n}=N_{f_n}-1$; $N$ - размерность кода. Функция неопределенности сигнала представляет собой модуль его автокорреляционного интеграла

$$\left|\chi(\tau,\Omega)\right|=\frac{1}{2E}\left|\int_{-\infty}^{\infty}U^*(t)U(t-\tau)\exp(j2\pi\Omega t)dt\right|, \tag{8}$$

где $E$ - полная энергия сигнала. Полагая, что начальная фаза $\varphi_n=0$, получаем выражение

$$U(t)=\begin{cases}\sum_{n=0}^{N-1}A_n rect(t-nT)\exp[j2\pi f_n(t-nT)],0\le t\le(N-1)T,\\ 0,t>(N-1)T\end{cases}. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (8), переходя к дискретному времени $\tau$ и осуществляя замену переменных, после выполнения алгебраических преобразований фазовых множителей, получаем полное выражение ФН ДКЧС

$$\left|\chi(\tau,\Omega)\right|=Z\left|(1-\tau')\sum_{n=0}^{N-k-1}\chi_1(\tau,\Omega)+\tau'\sum_{n=0}^{N-k-2}\chi_2(\tau,\Omega)\right|, \tag{10}$$

где

$$\chi_1(\tau,\Omega)=A_nA_{n+k}\left[\frac{\sin\pi\alpha(1-\tau')}{\pi\alpha(1-\tau')}\right]\exp\left\{j\pi\left[\alpha(2n+2k+1+\tau')-2N'_{f_n}\tau'\right]\right\},$$

$$\chi_2(\tau,\Omega)=A_nA_{n+k}\left[\frac{\sin\pi\beta\tau'}{\pi\beta\tau'}\right]\exp\left\{j\pi\left[\beta(2n+2k+2+\tau')-2N'_{f_n}\tau'\right]\right\},$$

$$\alpha=N'_{f_n}-N'_{f_n+k}+\nu,\ \beta=N'_{f_n}-N'_{f_n+k+1}+\nu,\ Z=\left[\sum_{n=0}^{N-1}A_n^2\right]^{-1},$$

$$\tau'=\frac{\delta}{T},\ \nu=\frac{\Omega}{\Delta f},\ \Delta fT=1,\ \tau=kT+\delta,\ 0\le\delta\le T,\ k=0,1,2,....,N-1.$$

Для модулированных по частоте сигналов коррекция спектра может осуществляться методом весовой обработки во временной области, поскольку временной и частотный параметры в данном случае связанны. Следовательно, первоначально выбирается частотная весовая функция, распространяющаяся на область занятую сеткой кодовых частот и определяющая частичное снижение уровня тех компонент, которые расположены на краях указанной области.

**Дискретно-кодированные по фазе сигналы (ДКФС).** Чаще других используются ДКФС или, так называемые фазо-кодо-модулированные (ФКМ) и фазоманипулированные (ФМ) сигналы. Для увеличения коэффициента сжатия $K=T_c/\tau_k$ и улучшения разрешения целей по дальности и скорости, а также для сни-


ЗАО АВТЭКС Санкт-Петербург тел/факс: 567-72-02 info@autex.spb.ru

жения УБЛ применяются линейные рекуррентные кодовые последовательности, которые не имеют ограничений по длительности кода. В качестве рекуррентных кодовых последовательностей часто используют М-последовательности или коды максимальной длины, образующиеся с помощью рекуррентных соотношений. Для таких сигналов УБЛ по мощности при нулевой расстройке по частоте постоянный и равный $1/N^2$ ( $N$ - число элементов последовательности. При разрешении ФМ сигналами пространственно-протяженных целей, важно знать УБЛ по всей плоскости “время запаздывания – частота”. Разрешающая способность когерентного радиолокатора характеризуется ДКФ зондирующего сигнала, показывающей с каким весом воспринимается энергия отраженного сигнала при заданном времени запаздывания и доплеровском смещении частоты. Эта функция определяется видом модуляции и процедурой обработки отраженного сигнала. Для периодического фазоманипулированного $(0,\pi)$ сигнала, ДКФ в точках, отстоящих по оси времени на значение, кратное длительности элементарного импульса, имеет вид

$$\rho(\tau,f)=\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\theta_n\theta_{n+k}\cos 2\pi nf\Delta T\right)^2+\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\theta_n\theta_{n+k}\sin 2\pi nf\Delta T\right)^2\right]\frac{\sin^2 M\pi fT_M}{M^2\sin^2\pi fT_M}, \qquad (15)$$

где $\tau$ и $f$ - отклонения запаздывания и доплеровского смещения отраженного сигнала от задержки и смещения частоты опорного колебания: $\tau=\tau_0-\tau_i(=k\Delta T)$, $f=f_0-f_k$, $\theta_n$ - элементарный импульс длительностью $\Delta T$, $T_M$ - период модуляции, $M=\vartheta/T_M$ - число периодов модуляции в интервале когерентной обработки $\vartheta$. Из выражения (15) следует, что ДКФ сигнала, содержащего $M$ периодов, представляет собой произведение ДКФ одного периода сигнала $\rho_1(\tau,f)$ и множителя периодичности. ДКФ одного периода фазоманипулированного сигнала имеет вид

$$\rho_1(k,m)=\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\theta_n\theta_{n+k}\cos 2\pi\frac{nm}{NM}\right)^2+\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\theta_n\theta_{n+k}\sin 2\pi\frac{nm}{NM}\right)^2, \qquad (16)$$

где $n/N$ - расстройка по времени запаздывания в долях периода; $m/M$ - расстройка по частоте в долях величины обратной длительности периода.

**Анализ результатов численного эксперимента.** Рассмотрим применение атомарных функций (АФ) Кравченко-Рвачева [2-6] в качестве весовых функций (окон) при формировании вектора $[A_n]$. Для сравнения выберем функцию косинус на пьедестале $p+(1-p)\cos^n(\pi x/2)$, где параметр $p$ [7] выбран равным $0.3$, так как для данного значения самое лучшее снижение боковых лепестков по задержке –32дБ. Согласно [7] УБЛ по задержке при прямоугольной огибающей ( $p=1$) равен –14 дБ. УБЛ по частоте при изменении параметра $p$ с 1 до 0.3 изменяется в пределах: от –13 дБ до –8 дБ. Коэффициент расширения главного лепестка по задержке $Kp(\tau)$ повышается в 1.9 раза, а по частоте $Kp(\Omega)$ постоянен и равен $1$. При использовании АФ $up(x)$ УБЛ по задержке составляет –29дБ, что приближается к лучшему результату для функции косинус на пьедестале, а по частоте равен –6дБ. Коэффициенты расширения главного лепестка $Kp(\tau)=2.8$. При рассмотрении АФ $fup_n(x)$ наилучшие результаты были получены при $n=10$. Использование АФ $fup_{10}(x)$ для формирования весовой последовательности позволяет снизить уровень бокового лепестка до –32дБ, при этом уровень первого бокового лепестка по частоте повышается на 4 дБ и составляет –11дБ. Одновременно разрешающая способность ДКЧС по задержке (дальности) ухудшается (по сравнению с невзвешенным сигналом) в 1.4 раза, а по частоте (скорости) не изменяется. Для АФ $h_a(x)$ при увеличении параметра $a$ весовая функция приближается к прямоугольной, что позволяет найти оптимальное соотношение по УБЛ по задержке, частоте и разрешающей способности. Например, использование весовой функции $h_{2.1}(x)$ позволяет снизить УБЛ по задержке до –22.5дБ. При этом УБЛ по частоте равен –9.5дБ, а разрешающая способность по задержке ухудшается в 1.37 раз. Исследуем весовую функцию (окно) параболического вида $1-(1-\Delta)2t^2$, при $\Delta=0.5$. УБЛ по задержке составляет –32дБ. Этот результат можно сравнить с физическими параметрами функции косинус на пьедестале и АФ $fup_{10}(x)$. В данном случае УБЛ по частоте равен –7.1дБ, а разрешающая способность ДКЧС по задержке ухудшается в 2.1 раза.

Таблица 1. Значение уровня первого бокового лепестка и коэффициента расширения $Kp(\tau)$ для оптимальных весовых функций (окон).

| Вид огибающей | УБЛ по $\tau$, дБ | УБЛ по $\Omega$, дБ | $Kp(\tau)$ |
|---|---|---|---|
| $p+(1-p)\cos^n(\pi x/2)$ при $p=0.3$ | -32 | -8 | 1.9 |
| $1-(1-\Delta)2t^2$, при $\Delta=0.5$ | -32 | -7.1 | 2.071 |
| $up(x)$ | -29 | -6 | 2.8 |
| $fup_n(x)$ при $n=10$ | -32 | -10.4 | 1.345 |
| $h_a(x)$ при $a=2.1$ | -22 | -9.34 | 1.375 |

Оценим УБЛ при ненулевой расстройке по частоте и среди М-последовательностей одной длины $N=127$. Критерием качества служит минимум суммы боковых лепестков по мощности. Рассматривается М-последовательность 3, для которой коэффициенты равны 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1. Исследуем ДКФ для обычного сигнала, то есть в виде (16). В главном сечении (при $k=0$) функция имеет вид $\sin x^2/x^2$. В боковых лепестках она возрастает от $1/127^2$, достигая своего максимума между значениями $m=10$ и $m=20$, а далее колеблется около величины $1/127$. Кривые сходятся к значению $0.0078$ при $m=20$. Большое значение УБЛ равное $0.0305$ наблюдается при $k=7$. Рассмотрим поведение взвешенных фазоманипулированных сигналов и определим зависимость УБЛ при различных параметрах весовых функций (окон). Проанализируем поведение известной весовой функции вида $p+(1-p)\cos^n(\pi x/2)$. Определим среднее значение, у которого колеблются все кривые $Kcp$ и коэффициент расширения главного лепестка $Kp$. Как видно из полученных результатов при изменении параметра весовой функции можно достигнуть УБЛ в 8.4 раза ниже. Однако при этом происходит расширение главного лепестка в 1.425 раза, что ухудшает разрешающую способность. Рассмотрим весовые функции, построенные на основе АФ. Будем использовать АФ $fup_n(x)$, $h_a(x)$. Лучшие результаты приведены в таблице 2.

Таблица 2. Значение уровня первого бокового лепестка и коэффициента расширения $Kp(\tau)$ для оптимальных весовых функций (окон).

| Весовая функция | УБЛ | $Kcp$ | $Kp$ |
|---|---|---|---|
| - | 0.0305 | 0.0078 | 1.0000 |
| $p+(1-p)\cos^n(\pi x/2)$ при $p=0.3$ | 0.0063 | 0.0042 | 1.4250 |
| $1-(1-\Delta)2t^2$, при $\Delta=0.5$ | 0.0058 | 0.0043 | 1.4417 |
| $fup_n(x)$ при $n=3$ | 0.0052 | 0.0042 | 1.3725 |
| $h_a(x)$ при $a=2.1$ | 0.0137 | 0.0063 | 1.1325 |

**Выводы.**

Анализ полученных результатов расчета сечений ФН дискретно-кодированных сигналов при нулевом доплеровском сдвиге частоты и нулевой задержке с различными физическими параметрами весовых функций показал возможность существенного снижения УБЛ ФН при высокой разрешающей способности по задержке и частоте. Такой подход позволяет повысить надежность обнаружения слабых сигналов на фоне помех и показывает значительное преимущество.

**Литература**

1. Слока В.К. Вопросы обработки радиолокационных сигналов. – М.: Советское радио, 1970.

2. Кравченко В.Ф. Лекции по теории атомарных функций и некоторым их приложениям. – М.: Радиотехника, 2003.

3. Кравченко В.Ф., Басараб М.А. Булева алгебра и методы аппроксимации в краевых задачах электродинамики.– М.: Физматлит, 2004.

4. Гуляев Ю.В., Кравченко В.Ф., Атомарные функции в цифровой обработке сигналов различной физической природы. 5-я Международная конференция и выставка. Цифровая обработка сигналов и её применение. 12-14 марта 2003, Москва, с. 3-4

5. Гуляев Ю.В., Кравченко В.Ф., Смирнов Д.В., Новые временные весовые функции для обработки сигналов в устройствах на поверхностных акустических волнах. – Успехи современной радиотехники, 2003, №8, с. 3-7


ЗАО АВТЭКС Санкт-Петербург тел/факс: 567-72-02 info@autex.spb.ru

6. Кравченко В.Ф., Пустовойт В.И. Новый класс весовых функций и их спектральные свойства. — ДАН РАН, 2002, т. 386, №1, с. 38–42.

7. Пленкин В.Я., Нгуен Тхань Хынг, Формирование функции неопределенности дискретно-кодированных по частоте сигналов с заданными свойствами. – Радиоэлектроника, №1, 2004.

Ambiguity functions of weighted discrete-coded signals are constructed. The optimal weighted functions, based on Kravchenko-Rvachev`s atomic functions, for signal processing are offered. Their efficiency applied to the problems of side-lobe reduction of ambiguity function is shown.

## ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ОЦЕНКИ ДВУМЕРНОЙ ФУНКЦИИ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ В ЗАДАЧАХ СЕЛЕКЦИИ РАДИОЛОКАЦИОННЫХ ОБЪЕКТОВ ПО ПОЛЯРИЗАЦИОННЫМ ПРИЗНАКАМ

Рыжаков В.В.

Сургутский государственный университет

При решении задач селекции радиолокационных объектов по поляризационным признакам возникает проблема оценки многомерных функций плотности вероятности $w(x_1, x_2, \ldots, x_n | S_j)$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – параметры функции распределения плотности вероятности, представляющие собой поляризационные признаки радиолокационных объектов $S_j$, j = 1 … M. Исходными данными для получения выражений функций плотности вероятности являются совокупности выборочных значений, полученных в результате радиолокационного зондирования селектируемых целей.

Обычный способ [1 – 3] получения подобных оценок заключается в построении гистограмм по сформированным совокупностям выборочных значений и последующем подборе аналитического выражения, аппроксимирующего с той или иной степенью точности функцию плотности вероятности радиолокационных параметров цели.

Как указывалось в [1], подобный способ имеет ряд недостатков.

Во-первых, использование гистограммы снижает точность полученной оценки функции плотности вероятности, поскольку при увеличении количества выборочных значений должна увеличиваться точность оценки, т.е. оценка должна сходиться к самой функции плотности вероятности. Однако в случае использования гистограмм при увеличении количества выборочных значений сходимость можно утверждать только для интеграла оценки, который сходится к интегралу функции плотности вероятности.

Вторым существенным недостатком являются трудности, возникающие при построении многомерных гистограмм с их последующей аппроксимацией в виде какой-либо многомерной функции, особенно в тех случаях, когда параметры распределения подчиняются разным законам, или их вероятностные характеристики вообще не имеют аналитического представления.

Выходом из этой ситуации является независимая оценка каждого из радиолокационного параметра отдельно. Однако использование подобного подхода увеличивает вероятность неправильного принятия решения, при его реализации в виде конкретного устройства селекции радиолокационных объектов [4].

В [1] для преодоления этих проблем предлагается метод получения оценки, названный методом операторной оценки. Суть его заключается в использовании известной связи между многомерной функцией распределения вероятности $F(x_1, x_2, \ldots, x_n | S_j)$ и функции плотности вероятности $w(x_1, x_2, \ldots, x_n | S_j)$:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n \,|\, S_j) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\ldots\int_{-\infty}^{x_n} w(y_1, y_2, \ldots, y_n \,|\, S_j)\cdot dy_1 \cdot dy_2 \cdot \ldots \cdot dy_n, \tag{1}$$

$$w(x_1, x_2, \ldots, x_n \,|\, S_j) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n \,|\, S_j)}{\partial x_1 \cdot \partial x_2 \cdot \ldots \cdot \partial x_n}. \tag{2}$$

Перепишем (2) в эквивалентном виде, применяемом на практике для вычисления функции плотности вероятности по функции распределения вероятности [5 – 8]:

$$w(x_1, x_2, \ldots, x_n \,|\, S_j) = \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\left(\ldots\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F(x_1, x_2, \ldots, x_n \,|\, S_j)}{\partial x_1}\right)\right)\ldots\right)\right). \tag{3}$$


ЗАО АВТЭКС Санкт-Петербург тел/факс: 567-72-02 info@autex.spb.ru

Рассмотрение формулы (3) показывает, что получение n-мерной функции плотности вероятности заключается в n-кратном дифференцировании n-мерной функции распределения вероятности по всем n параметрам этой функции.

Для n = 2 получим:

$$w(x_1, x_2 \mid S_j) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F(x_1, x_2 \mid S_j)}{\partial x_1}\right). \tag{4}$$

В [1] предлагается заменить оператор дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x}$ линейным оператором q, представляющим собой ланейную аппроксимацию оператора дифференциорования.

В этом случае оценка функция плотности вероятности $\hat{w}(x_1, x_2 \mid S_j)$ может быть аппроксимирована с помощью конечных разностей вида:

$$q_2\left(q_1 \hat{F}(x_1, x_2 \mid S_j)\right) = q_2\left(\frac{\hat{F}\left(x_{min1} + t_1' \cdot (2 \cdot h_1), x_2 \mid S_j\right) - \hat{F}\left(x_{min1} + t_1'' \cdot (2 \cdot h_1), x_2 \mid S_j\right)}{2 \cdot h_1 \cdot k_1^*}\right) =$$

$$= \frac{\hat{F}\left(x_{min1} + t_1' \cdot (2 \cdot h_1), x_{min2} + t_2' \cdot (2 \cdot h_2) \mid S_j\right) - \hat{F}\left(x_{min1} + t_1' \cdot (2 \cdot h_1), x_{min2} + t_2'' \cdot (2 \cdot h_2) \mid S_j\right)}{2 \cdot h_1 \cdot k_1^* \cdot 2 \cdot h_2 \cdot k_2^*} -$$

$$- \frac{\hat{F}\left(x_{min1} + t_1'' \cdot (2 \cdot h_1), x_{min2} + t_2' \cdot (2 \cdot h_2) \mid S_j\right) - \hat{F}\left(x_{min1} + t_1'' \cdot (2 \cdot h_1), x_{min2} + t_2'' \cdot (2 \cdot h_2) \mid S_j\right)}{2 \cdot h_1 \cdot k_1^* \cdot 2 \cdot h_2 \cdot k_2^*}, \tag{5}$$

$t_i', t_i'' = \ldots, -1, 0, 1, \ldots, t_i' > t_i''$, (i = 1…2), $k_1^* = t_1' - t_1''$, $k_2^* = t_2' - t_2''$, в точках $(x_{min1} + t_1 \cdot h_1, x_{min2} + t_2 \cdot h_2)$, $t_1, t_2 = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$

В этой формуле $\hat{F}(x_1, x_2 \mid S_j)$ представляет собой оценку функции распределения вероятности, определяемую следующим образом:

$$\hat{F}(x_1, x_2 \mid S_j) = \begin{cases} 0, & \text{если} \bigcup_{i=1}^{2}\left(x_i < x_{i(1)}\right), \\ F_{t_1, t_2} = \frac{K_{t_1, t_2}}{p}, & \text{если} \bigcap_{i=1}^{2}\left(x_i < x_{i(t_i+1)}\right), \\ 1 & \text{если} \bigcap_{i=1}^{2}\left(x_i \geq x_{i(N)}\right), \end{cases} \tag{6}$$

где $F_{t_1, t_2}$ – значение функции распределения в точке $\left(x_{1(t_1)}, x_{2(t_1)}\right)$; $K_{t_1, t_2}$ – количество точек совокупности выборочных значений, попадающих в область $\bigcap_{i=1}^{2}\left(x_i < x_{i(t_i+1)}\right)$; p – общее число выборочных значений, используемых для построения оценки $\hat{w}(x_1, x_2 \mid S_j)$; N – количество отрезков по каждому из параметров $x_i$, используемых для построения эмпирической функции распределения $\hat{F}(x_1, x_2 \mid S_j)$; $h_1$, $h_2$ – величина отрезков; а $x_{min1}, x_{min2}$ – минимальные значения параметров $x_1$ и $x_2$ в исходной совокупности выборочных значений.

В этом случае операторная оценка функции плотности вероятности может быть представлена в следующим виде:

$$\hat{w}(x_1, x_2 \mid S_j) = \eta \cdot \hat{w}\left(x_{min1} + t_1 \cdot h_1, x_{min2} + t_2 \cdot h_2 \mid S_j\right) +$$
$$+ (1 - \eta) \cdot \hat{w}\left(x_{min1} + t_1 \cdot h_1 + h_1, x_{min2} + t_2 \cdot h_2 + h_2 \mid S_j\right), \tag{7}$$

$$\left(x_1 \in [x_{min1} + t_1 \cdot h_1, x_{min1} + t_1 \cdot h_1 + h_1)\right) \bigcap \left(x_2 \in [x_{min2} + t_2 \cdot h_2, x_{min2} + t_2 \cdot h_2 + h_2)\right).$$

Полученное выражение является зависимым от следующих величин:


ЗАО АВТЭКС Санкт-Петербург тел/факс: 567-72-02 info@autex.spb.ru

$h_1$, $h_2$ – фактически они определяют точность аппроксимции функции плотности вероятности в условиях непараметрической априорной неопределенности;

p – влияет на точность значений функции распределения (и, соответственно, функции плотности вероятности) на границах областей $\bigcap_{i=1}^{2}\left(x_i < x_{i(t_i+1)}\right)$.

$k_1^*, k_2^*$ – полуразмах аппроксимации операторов $q_1$ и $q_2$. При построении операторной оценки по выражению (7) необходим такой подбор величин $k_1^*, k_2^*$, который бы давал наилучшее приближение операторной оценки $\hat{w}(x_1, x_2 | S_j)$ к априорно неизвестной функции плотности вероятности $w(x_1, x_2 | S_j)$;

η – весовой коэффициент операторной аппроксимации.

Величины $h_1$, $h_2$, $k_1^*, k_2^*$ и η не имеют функциональной связи со свойствами поляризационных признаков $x_1$ и $x_2$. Поэтому возникает проблема поиска их оптимального сочетания, позволяющего получить наилучшее приближение $\hat{w}(x_1, x_2 | S_j)$ к функции $w(x_1, x_2 | S_j)$.

В данной работе предлагается использовать следующий способ определения этих параметров.

Величины отрезков разбиения по каждому из параметров предлагается определять как:

$$h_i = \frac{x_{max\,i} - x_{min\,i}}{N}, \tag{8}$$

где $x_{max\,i}$ – максимальное значение i-го параметра в совокупности. Причем количество отрезков разбиения предлагается принимать равным N = p – 1.

Весовой коэффициент принимается равным фиксированному значению η = 0,5, поскольку влияние этого параметра на оценку $\hat{w}(x_1, x_2 | S_j)$ снижается при увеличении значения p.

Что касается величин $k_1^*, k_2^*$, то их значение, для получения более точной оценки, желательно принимать как можно большим. Однако при этом должно сохраняться условие линейности операторов $q_1$ и $q_2$.

Можно показать, что максимальная дисперсия оценки $\hat{F}(x_1, x_2 | S_j)$ определяется выражением:

$$D_r = \frac{0,25}{p}. \tag{9}$$

Это позволяет определить правило поиска оптимального значения параметров $k_1^*$ и $k_2^*$.

Определив наиболее вероятные отклонения оценки $\hat{F}(x_1, x_2 | S_j)$ как $\sqrt{D_r}$, можно провести две плоскости, одна из которых лежит выше точки $(x_1, x_2)$, в которой определяется значение оценки $\hat{w}(x_1, x_2 | S_j)$, а другая ниже этой точки на величину $\sqrt{D_r}$.

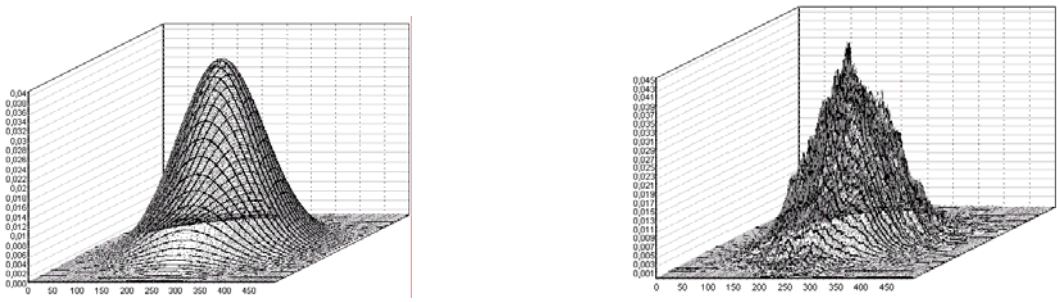
При выборе $k_1^*$ и $k_2^*$ следует их выбирать как можно больше, т.е. брать величны оценок $\hat{F}(x_1, x_2 | S_j)$, используемые в выражении (5) как можно дальше отстящими друг от друга, но при условии, что все промежутоные $\hat{F}(x_1, x_2 | S_j)$, лежащие между крайними значениями этих оценок, будут заключены между этими двумя плоскостями.

Использование данного подхода требует очень большого количества вычислительных операций, что сильно увеличивает время расчета операторной оценки $\hat{w}(x_1, x_2 | S_j)$.

Для сокращения этого времени предлагается осуществлять проверку попадания значений оценки $\hat{F}(x_1, x_2 | S_j)$ только для оценок $\hat{F}(x_1, x_2 | S_j)$, попадающих на диагонали, соединяющие крайние значения из всех проверяемых.

Для примера, на рис.1 приведена реальная функция плотности вероятности (а) и ее операторная оценка (б), полученная описанным выше способом, для случая двумерной функции плотности вероятности при p = 5000 и η = 0,5.

При этом предполагалась статистическая независимость каждого из параметров. Параметры подчинялись нормальному закону распределения с дисперсией, равной 2 и среднем значением, равным 1, для каждого из параметров.



а) б)

Рис.1. Двумерная функция плотности вероятности (а) и ее операторная оценка (б) в случае нормального закона распределения статистически независимых поляризационных параметров радиолокационной цели при p = 5000, η = 0,5.

Максимальное отклонение оценки от реальной функции плотности вероятности составило – 0,0125, а среднее – 0,0006.

**Литература**

1. Фомин, Я.А. Статистическая теория распознавания образов / Я.А. Фомин, Г.Р. Тарловский. – М.: Радио и связь, 1986. – 264 с.

2. Селекция и распознавание на основе локационной информации / Горелик А.Л., Барабаш Ю.Л., Кривошеев О.В., Эпштейн С.С.: Под ред. Горелика А.Л. – М.: Радио и связь, 1990. – 240 с.

3. Кораблев, А.Ю. Метода поляризационной селекции в радиолокационных системах. Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук /А.Ю. Кораблев. – М.: Издательский отдел Московского государственного технического университета, 2003. – 301 с.

4. Бадулин, Н.Н. Оптимальное обнаружение радиолокационных целей по нескольким поляризационным признакам. Труды IX международной научно-технической конференции «Радиолокация, навигация, связь», 22-24 апреля 2003 г / Н.Н. Бадулин, В.В. Рыжаков Издатель: НПФ «САКВОЕ» ООО, Том 3, стр. 1735 – 1745.

5. Горяинов, В.Т. Примеры и задачи по статистической радиотехнике / В.Т. Горяинов, А.Г. Журавлев, В.И. Тихонов. – Изд-во «Советское радио», 1970. – 600 с.

6. Уилкс, С. Математическая статистика / С. Уилкс. – М.: Издательство «Наука», 1967. – 632 с.

7. Крамер, Г. Математические методы статистики / Г. Крамер. – М.: Издательство «Мир», 1975. – 648 с.

8. Боровков А.А. Математическая статистика / А.А. Боровков. – Новосибирск: Наука; Издательство Института математики, 1997. – 772 с.

In this work practical realization of a method of the operational estimation used for reception of estimations of bidimentional functions of density of probability is considered. Estimations received at it then can be used for creation of devices of selection of radar objects.

## КОМБИНИРОВАННАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АТОМАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Колпаков И.В.

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

Предложен алгоритм последовательной обработки двумерных сигналов на основе $LULU$-метода и двумерной B-сплайн-интерполяции с атомарными функциями в качестве базиса. Проведён численный эксперимент. Показана возможность повышения достоверности и гладкости сигнала.

Изображения, получаемые в задачах радиолокации, представляют собой дискретный сигнал, который может быть описан в виде одной из моделей [1]. В простейшем случае получается однобитный двумерный сигнал (чёрно-белое изображение), в других случаях – двумерный сигнал как функция от координат $x$ и $y$ -


ЗАО АВТЭКС Санкт-Петербург тел/факс: 567-72-02 info@autex.spb.ru

яркость или интенсивность (изображение в оттенках серого). Подобные сигналы часто содержат грубые ошибки (псевдообъекты) и случайные погрешности (шумовые искажения). Распространённые статистические методы обработки сигналов не всегда могут быть применены из-за невозможности повторения эксперимента (динамического характера сигнала), недостаточности статической информации о сигнале и других причин. В настоящей работе предлагается метод детерминированного устранения грубых ошибок и сглаживания случайных погрешностей. Удаление грубых ошибок основано на получившем широкое применение $\mathrm{LULU}$-методе, а сглаживание случайных погрешностей – на двумерной атомарной сплайн-интерполяции.

Операторы $\mathrm{L}$ (“lower”) и $\mathrm{U}$ (“upper”) вводятся следующим образом. В одномерном случае для трёхточечной фильтрации: $\mathrm{L}x_i = \max\left\{\min\left\{x_{i-1}x_i\right\}\min\left\{x_i x_{i+1}\right\}\right\}$, $\mathrm{U}x_i = \min\left\{\max\left\{x_{i-1}x_i\right\},\max\left\{x_i,x_{i+1}\right\}\right\}$. Двойные операторы $\mathrm{LU}$ и $\mathrm{UL}$ вводятся аналогично: $\mathrm{LU}x_i = \max\left\{\min\left\{\mathrm{U}x_{i-1},\mathrm{U}x_i\right\},\min\left\{\mathrm{U}x_i,\mathrm{U}x_{i+1}\right\}\right\}_i$, $\mathrm{UL}x_i = \min\left\{\max\left\{\mathrm{L}x_{i-1},\mathrm{L}x_i\right\},\max\left\{\mathrm{L}x_i,\mathrm{L}x_{i+1}\right\}\right\}_i$. В качестве оператора фильтрации принимается оператор $Sx_i = \frac{1}{2}\left(\mathrm{LU}x_i + \mathrm{UL}x_i\right)$. Значения на краях доопределяются как $\mathrm{L}x_0 = x_0$, $\mathrm{U}x_0 = x_0$, $\mathrm{L}x_N = x_N$, $\mathrm{U}x_N = x_N$. Величины $\mathrm{LU}x_0$, $\mathrm{LU}x_N$, $\mathrm{UL}x_0$, $\mathrm{UL}x_N$ определяются аналогично. Данный метод позволяет удалить единичные грубые ошибки. Действие данного $\mathrm{LULU}$ оператора схоже с действием медианного фильтра с апертурой равной 3. Операторы $\mathrm{L}$ и $\mathrm{U}$ обладают следующими свойствами [2]:

- Результат действия оператора “lower” всегда не больше результата действия оператора “upper”: $\mathrm{L}x_i \le \mathrm{U}x_i$, причём $\mathrm{L}x_i = \mathrm{U}x_i$ тогда и только тогда, когда $x_{i-1}$, $x_i$, $x_{i+1}$ - монотонная последовательность.

- Многократное последовательное применение операторов не приводит к новым результатам: $\mathrm{U}^n = \mathrm{U}$, $\mathrm{L}^n = \mathrm{L}$, $\left(\mathrm{LU}\right)^n = \mathrm{LU}$, $\left(\mathrm{UL}\right)^n = \mathrm{UL}$, то есть, эти операторы идемпотентны.

- Результат действия суперпозиции операторов $\mathrm{LU}$ всегда не меньше результата действия суперпозиции операторов $\mathrm{UL}$: $\mathrm{LU}x_i \ge \mathrm{UL}x_i$.

Подавление грубых ошибок происходит так. Пусть в точке $i$, $i = 2..N-1$ значение функции $x_i$ содержит грубую ошибку, а в соседних точках $i-1$, $i-1$, $i+1$, грубая ошибка отсутствует, то есть, $\hat{x}_i = x_i + \delta_g$. Предположим, что грубая ошибка $\delta_g$ достаточно большая по амплитуде, чтобы выполнялось условие $x_i > x_{i\pm j}$, $j = 1,2$. Тогда $\mathrm{LU}x_i = \max\left(\min\left(\mathrm{U}x_{i-1},\mathrm{U}x_i\right),\min\left(\mathrm{U}x_i,\mathrm{U}x_{i+1}\right)\right) = \max\left(\min\left(\mathrm{U}x_{i-1},x_i\right),\min\left(x_i,\mathrm{U}x_{i+1}\right)\right)$ $= \max\left(\max\left(x_{i-2},x_{i-1}\right),\max\left(x_{i+1},x_{i+2}\right)\right) = \max\left(x_{i-2},x_{i-1},x_{i+1},x_{i+2}\right)$, т.е. $\mathrm{LU}x_i$ не зависит от $x_i$. Аналогично доказывается, что $\mathrm{UL}x_i = \max\left(x_{i-1},x_{i+1}\right)$ тоже не зависит от $x_i$. Результирующая величина $Sx_i$ также не зависит от $x_i$. Другими словами, значение $x_i$, полученное с грубой ошибкой, исключается из рассмотрения и в дальнейшем не учитывается.

Можно использовать также пятиточечный метод, операторы которого вводятся следующим образом:

$\mathrm{L}x_i = \max(\min\left(x_{i-2},x_{i-1},x_i\right),\min\left(x_i,x_{i+1},x_{i+2}\right))$, $i = 2..N-2$

$\mathrm{U}x_i = \min(\max\left(x_{i-2},x_{i-1},x_i\right),\max\left(x_i,x_{i+1},x_{i+2}\right))$, $i = 2..N-2$;

Остальные операторы определяются аналогично. Достоинством данного метода является возможность устранять две подряд идущие грубые ошибки. Три резких отклонения сигнала подряд считаются полезным сигналом. Предложенный метод является корректным [2]. Рассмотренный оператор $\mathrm{S}$ является локально постоянным, центрированным, локальным и ограниченным. Метод фильтрации не зависит от конкретной шкалы измерения: $\mathrm{S}\left(Cx\right) = C\mathrm{S}\left(x\right)$, где $C$ - постоянная величина. Для обработки изображения используют горизонтальное и/или вертикальное сканирование с использованием скользящего окна. Удаление псевдообъектов происходит в предположении о минимальном размере объекта [1, 7]. Также учитывается используемая модель представления изображения (насыщенность или яркость). С математической точки зрения это означает предположение об ограниченности первой производной сигнала (с физической точки зрения: реальный сигнал не может возрастать со скоростью больше заданной, с точки зрения изображения: реальные тени не могут быть слишком резкими). Для повышения качества обработки можно исходить из предположения о том, что реальные объекты должны иметь относительно симметричные детали [2, 7], то есть, наличие трёх и более «всплесков» сигнала (полезный сигнал с точки зрения $\mathrm{LULU}$-метода) при горизонтальном сканировании и отсутствие сравнимого количества «всплесков» при вертикальном сканировании считается грубой ошибкой. Применение данного метода визуально выглядит как удаление с изображения единичных

точек и продольных/поперечных полос, не являющихся реальными объектами с учётом сделанных предположений.

Сглаживание случайных погрешностей производится с использованием двумерной B-сплайн-интерполяции [5]. В качестве базисных сплайн-функций берутся атомарные функции (АФ) [3]. Выбор АФ в качестве базисных функций обусловлен их бесконечной дифференцируемостью при хороших интерполирующих свойствах. Бесконечная дифференцируемость может потребоваться при дальнейшей обработке сигнала и его восстановлении. Используемые B-сплайны имеют прямоугольную опорную область [3], т.е. образуются прямым произведением $\varphi(x,y)=\varphi_1(x)\varphi_2(y)$. Дискретный сигнал можно считать заданным таблично на сетке с равноотстоящими узлами $f(x,y)$, $f_{i,j}=f(x_i,y_j)$, $i,j=0,1,...,N$. Строится пространственная сетка [5]. Сглаживание достигается, если в качестве исходных значений использовать не весь набор точек, а только часть их [6], а также использовать систему пересекающихся B-сплайнов. В качестве системы B-сплайнов берётся система [6], гарантирующая наилучшую точность приближения по порядку. Для одномерного случая: $B(x)=\sum_{i=0}^{m+1}\alpha_i b_i(x)$, где $\alpha_i=\frac{4}{3}f(x_i)-\frac{1}{6}f(x_{i-1})-\frac{1}{6}f(x_{i+1})$, $b_i=\varphi(x-i)$, для двумерного случая – аналогично. Для построения системы B-сплайнов одними из лучших являются АФ $fup_N(x)$ при $N=2,3$, которые сходны по своим свойствам с классическими B-сплайнами, но являются бесконечно дифференцируемыми. Оценки погрешности интерполяции аналогичны оценкам для B-сплайнов [6]. Предлагаемое сглаживание случайных погрешностей эквивалентно уменьшению контрастности изображения за счёт потери мелких деталей. С физической точки зрения это означает предположение о том, что реальные объекты имеют достаточно гладкие границы.

Рис.1. Рисунки до обработки (слева) и после обр

По предложенным алгоритмам проведён численный эксперимент. В ния использован файл формата bitmap с зашумлением на основе радиолокац е представлено в виде оттенков серого. После подавления грубых ошибок из тикальные полосы и пятна. После сглаживания случайных погрешностей изобр вным». Анализ рис.1 показывает, что у обработанного изображения снижается ые мелкие детали), а грубые ошибки полностью удаляются.

**Литература**

1. Д. Роджерс. Алгоритмические основы машинной графики. Пер. с оновой и П.А. Монахова, под ред. Ю.М.Баяковского, В.А. Галактионова. М.: Мир, 1989, 504 с.

2. C.H. Rowher. Idempotent One-Sided Approximation of Median Smoothers. Journal of Approximation Theory, 1989, vol. 58, no 2, p. 151-163.


ЗАО АВТЭКС Санкт-Петербург тел/факс: 567-72-02 info@autex.spb.ru