

## МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ

### METHOD OF MODELING OF ELECTROSTATIC TRANSDUCERS

С.Петербург, С.Петербургский государственный технический университет  
St.Petersburg, St.Petersburg State Technical University

Рассмотрена задача об изгибе неоднородной подвижной системы (ПС) консольного типа под воздействием электростатических усилий системы неподвижных электродов. Исследованы условия сходимости решения. Получены зависимости точности вычисления вектора упругой линии ПС и критических параметров от степени дискретизации расчетной схемы.

We looked at the task that deal with the screwing of heterogeneous moving system of console type which is influenced by electrostatic system of electrodes. The possibilities of solving this system were studied. As a result, we got the function of precision of calculation the elastic vector of moving system and some critical parameters (i.e. driving voltage). The argument of the function is the value of the discrete step that is used for calculation of this function.

Доклад посвящен численному моделированию задачи об изгибе неоднородной подвижной системы (ПС) консольного типа под воздействием электростатических сил, создаваемых системой неподвижных электродов. Подобные задачи возникают, например, при экспериментальных исследованиях частотных характеристик ПС емкостных интегральных акселерометров методом электростатического возбуждения вынужденных колебаний [1-2], расчете электростатических микроманипуляторов и измерительных механизмов [3].

В качестве объекта моделирования выберем емкостной дифференциальный акселерометр (рис.1), к неподвижным электродам 1 и 2 которого относительно ПС 3 приложены напряжения  $U_1$  и  $U_2$ . Математическую формулировку задачи о равновесной форме упругой линии  $H(x)$  ПС в этом случае удобно представить в виде интегрального уравнения:

$$H(x) = \int_0^L G(x, s) \cdot f(s) \cdot ds \quad (1)$$

Функция распределения электростатических усилий вдоль ПС имеет вид:

$$f(s) = \begin{cases} 0 & 0 \leq s < L_2 \\ \frac{\varepsilon \cdot b}{2} \cdot \left( \frac{U_1^2}{(H_1 - H(s))^2} - \frac{U_2^2}{(H_2 + H(s))^2} \right) & s > L_2 \end{cases} \quad (2)$$

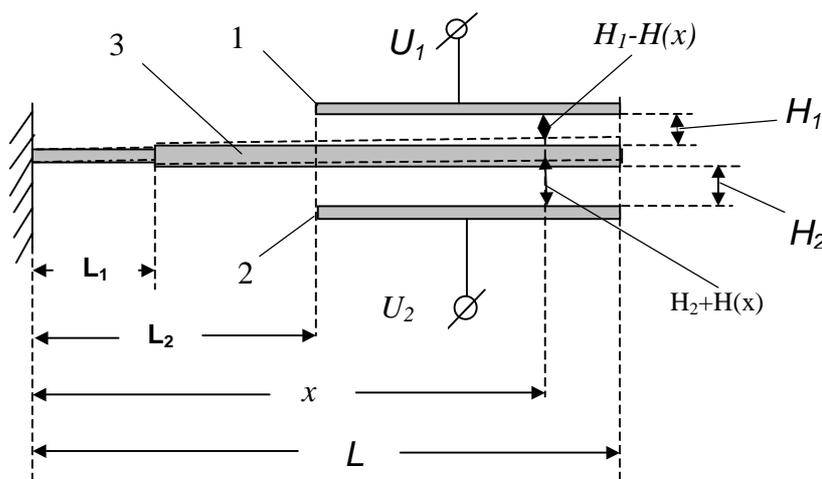


Рис.1 Дифференциальный электростатический преобразователь  
Fig.1 Differential electrostatic transducer

где:  $H_1$  и  $H_2$  – толщины воздушных зазоров между электродами 1,2 и ПС соответственно,  $b$  – ширина электродов,  $\varepsilon$  – абсолютная диэлектрическая проницаемость воздуха. Ядром уравнения (1) является  $G(x,s)$  – функция Грина задачи об изгибе балки. Она характеризует податливость ПС и численно

равна перемещению точки  $x$  при воздействии единичной силы в точке  $s$ . Функция Грина ПС (рис.1) для  $x \geq s$ ;  $L_2 \leq s \leq L$  имеет вид:

$$G(x, s) = \frac{I}{E} \cdot \left( \int_0^{L_1} \frac{(x-u)(s-u)}{J_1(u)} du + \int_{L_1}^{L_2} \frac{(x-u)(s-u)}{J_2(u)} du + \int_{L_2}^s \frac{(x-u)(s-u)}{J_2(u)} du \right) \quad (3)$$

В последнем выражении  $E$  - модуль Юнга,  $J_1(x)$ ;  $J_2(x)$ -текущие значения моментов инерции поперечных сечений подвеса и инерционной массы ПС, которые для повышения механической прочности и коррекции степени успокоения обычно профилируют (на рис.1 не показано). Таким образом уравнение (1) позволяет моделировать упругую линию существенно неоднородных ПС, например, с криволинейными обводами подвеса по толщине и по ширине. Уравнение (1) аппроксимировалось системой нелинейных алгебраических уравнений:

$$H_i = \sum_0^{n-1} G_{i,j} \cdot F_j \quad (4)$$

Для этого задавалась сетка значений  $x_i$  и  $s_j$  с равномерным шагом  $\Delta=L/n$ , где  $n$ -число узлов сетки, и вычислялись массивы значений  $G_{i,j}=G(x_i, s_j)$ ;  $F_j=f(s_j) \cdot \Delta$ . Из (4) нетрудно получить рекуррентное соотношение для вычисления вектора  $\delta=H/H_0$  нормированной упругой линии ПС:

$$\delta^{(k)} = A \cdot \frac{g}{n} \cdot \left[ \left( \frac{I}{(I-a-\delta^{(k-1)})^2} - \frac{\left(\frac{U_2}{U_1}\right)^2}{(I+a+\delta^{(k-1)})^2} \right) \cdot I \right] \quad (5)$$

В качестве нормирующего принято номинальное значение воздушных зазоров акселерометра  $H_0=(H_1+H_2)/2$ . Кроме того, в выражении (5) обозначено:  $g_{ij} = (EJ_1/L^3)G_{ij}$  - относительная (безразмерная) функция влияния, где  $J_1$  - минимальное значение  $J_1(u)$  на  $(0, L_1)$ ,  $L$  - длина ПС;  $a = (H_2-H_1)/2H_0$  - относительная асимметрия зазоров;  $I$  - вектор, элементы которого равны нулю для узлов с координатами  $s_j < L_2$  и единице в противном случае. Стрелка над квадратной скобкой в выражении (5) обозначает процедуру векторизации системы Mathcad 7 Pro, в среде которой проводилось моделирование. Решение уравнения (5) обладает значительной степенью общности, т.к. большинство конструктивных параметров акселерометра входят в состав безразмерного комплекса  $A$ , являющегося по существу критерием подобия:

$$A = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{b \cdot L^4}{H_0^3 \cdot E \cdot J_1} \cdot U_1^2 \quad (6)$$

Итерационная процедура (5) сходится в диапазоне  $0 < A < A_{max}$ , где  $A_{max}$  -критическое значение параметра  $A$ . Параметр  $A$  удобно также представить в виде  $A=B \cdot U_1^2$ , где  $B$  конструктивный параметр ПС. Тогда критическое значение управляющего напряжения  $U_{max} = (A_{max}/B)^{0.5}$ . Упомянутые критические величины и вектор решения  $\delta$  зависят также от асимметрии управляющих напряжений  $U_2/U_1$ , от степени асимметрии зазоров  $a$  и неоднородности ПС (зависимости элементов матрицы  $g$  от  $J_1(x)/J_1$ ,  $J_2(x)/J_1$ ).

Приводимые ниже результаты моделирования получены для ПС с обводами прямоугольной формы и параметрами  $B=6.03 \cdot 10^{-4} B^2$ ,  $J_1(x)/J_1=1$ ,  $J_2(x)/J_1=63$ ,  $L_1=L_2=1.16$  мм,  $L=4.16$  мм и  $H_0=6$  мкм. На рис.2 приведена зависимость скорости сходимости итерационной процедуры (5) для нескольких возрастающих значений  $U_1$ . Эти зависимости получены при  $U_2/U_1=1$  и  $a=0.025$ . По оси ординат на рис.2 отложена величина относительной погрешности:

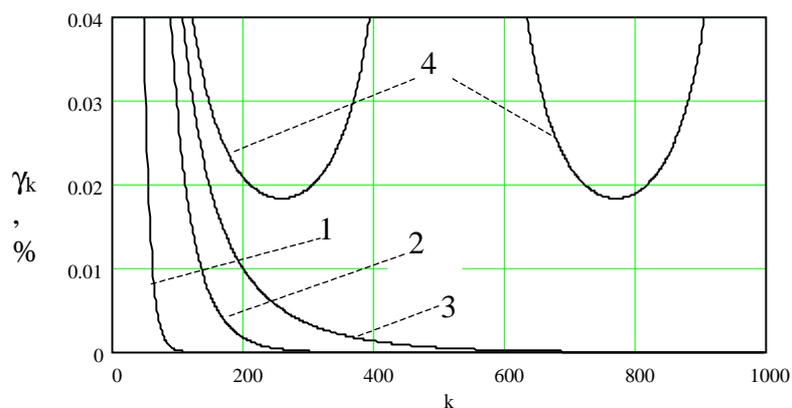


Рис.2 Зависимость  $\gamma_k$  (%) от напряжения  $U$  (В) ( $U=U_1=U_2$ ;  $a=0.025$ ):  
1- 74.00; 2- 74.45; 3- 74.48; 4- 74.49 В

Fig.2 The function  $\gamma_k$  (%) in terms of argument  $U$  (V) ( $U=U_1=U_2$ ;  $a=0.025$ ):  
1- 74.00; 2- 74.45; 3- 74.48; 4- 74.49 В

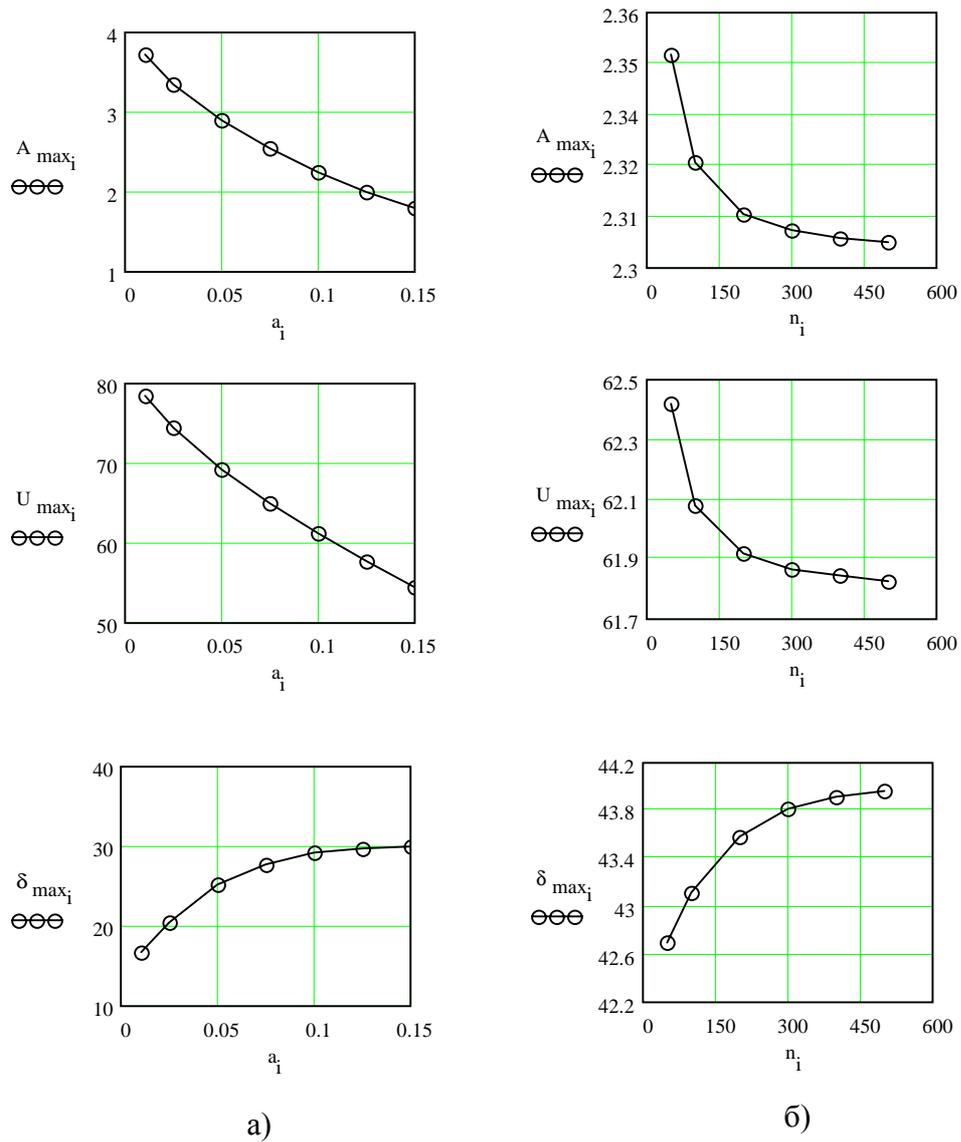


Рис.3 Зависимость критических параметров  $A_{\max}$ ,  $U_{\max}(B)$ ,  $\delta_{\max}(\%)$ :

а) от асимметрии зазоров  $a$ ; б) от числа узлов  $n$

Fig.3 The function of critical parameters in terms of arguments:  $A_{\max}$ ,

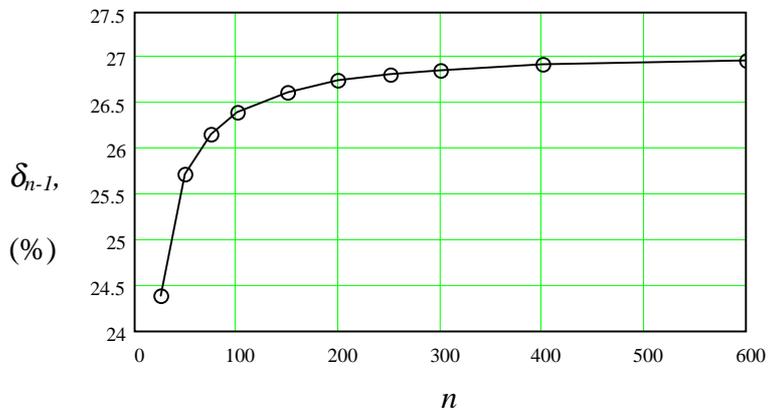


Рис.4 Зависимость оценки вектора упругой линии от числа узлов

$n$ .

$$\gamma_k = \frac{(\delta^{(k-1)})_{n-1} - (\delta^{(k)})_{n-1}}{(\delta^{(k)})_{n-1}} \cdot 100 \% \quad (7)$$

где  $k$ - номер шага итерационной процедуры. Кривые 1,2,3 соответствуют значениям  $U_1=74; 74.45; 74.48$  В, при которых сходимость итерационного процесса замедляется, но он еще остается устойчивым. При  $U_1=74.49$  В, как видно из кривой 4, итерационная процедура уже расходится. Следует отметить весьма высокую чувствительность формы упомянутых кривых к величинам  $U_1$  и  $A$  при их приближении к критическим значениям  $U_{max}$  и  $A_{max}$ . В качестве иллюстрации возможностей предлагаемой методики моделирования на рис.3а представлены зависимости критических величин  $A_{max}$ ,  $U_{max}$ , а также критического отклонения  $\delta_{max}$  свободного конца ПС от степени асимметрии  $a$  воздушных зазоров. При симметрии зазоров ( $a=0$ ), критическое напряжение максимально и приближается к 80 В. Однако критическое отклонение свободного конца ПС не превышает 15 % от  $H_0$ . При асимметрии  $a=0.15$  ( $H_1 \approx 5$  мкм,  $H_2 \approx 7$  мкм)  $A_{max}$ ,  $U_{max}$  снижаются почти вдвое, а запас устойчивости по перемещению ПС увеличивается до 30%.

Реальная точность оценок критических значений  $A_{max}$ ,  $U_{max}$ ,  $\delta_{max}$ , как и искомого вектора упругой линии  $\delta$  определяется главным образом числом узлов  $n$  дискретной сетки, характеризующим степень адекватности (1) и (4). На рис.3б показана зависимость результатов вычисления упомянутых критических величин от числа узлов  $n$  (для несимметричного режима возбуждения  $U_2=0$ , что равносильно  $H_1=6$  мкм,  $H_2=\infty$ ). Как видно из рис.3а, при изменении  $n$  от 50 до 500, критические параметры  $A_{max}$ ,  $U_{max}$ ,  $\delta_{max}$  изменяют свои значения не более чем на 2%. Следует отметить, что в этом режиме возбуждения исследуемая конструкция имеет  $A_{max}=2.3$ ,  $U_{max}=61.8$  В, а запас устойчивости по перемещению достигает 44%. На рис.4 приведена зависимость результата вычисления  $\delta_{n-1}$  (отклонения свободного конца ПС) от степени дискретизации расчетной схемы для  $A=2.0$ . Из рис.5 следует, что для оценки компонент вектора упругой линии  $\delta$  с точностью 1% необходимо соблюдать условие  $n>200$ .

**Литература:**

1. Э.А.Кудряшов, Хун-Ляньцзинь «Стенд для исследования газового демпфирования емкостных дифференциальных акселерометров» // Диагностика, информатика, метрология, экология, безопасность-96 / Тез. докл. междунар. научн.-техн. конф., С.Петербург, 1996, с.154-156
2. Э.А.Кудряшов, Хун-Ляньцзинь «О выборе напряжения поляризации электростатических преобразователей» // Физмет-96 / Тез. докл. второй междунар. научн.-техн. конф. по проблемам физической метрологии, С. Петербург, 1996, с.111-113.
3. К.Э.Петерсон «Кремний - как конструкционный материал», ТИИЭР, т.70, № 5, с.5-49