CHAPTER

10

Fourier Transform Properties
Свойства преобразования Фурье

The time and frequency domains are alternative ways of representing signals. The Fourier transform is the mathematical relationship between these two representations. If a signal is modified in one domain, it will also be changed in the other domain, although usually not in the same way. For example, it was shown in the last chapter that *convolving* time domain signals results in their frequency spectra being *multiplied.* Other mathematical operations, such as addition, scaling and shifting, also have a matching operation in the opposite domain. These relationships are called *properties* of the Fourier Transform, how a mathematical change in one domain results in a mathematical change in the other domain.

Домены времени и частоты - альтернативные пути представления сигналов. Преобразование Фурье - математические отношения между этими двумя представлениями. Если сигнал изменяется в одном домене, это будет также изменено в другом домене, хотя обычно не таким же образом. Например, это показывалось в прошлой главе, что скручивание сигналов домена времени приводит к их умноженным частотным спектрам. Другие математические операции, типа сложения, масштабирования и смещения, также имеют операцию соответствия в противоположном домене. Эти отношения называются свойствами преобразований Фурье, как математическое изменение в одном домене приводит к математическому изменению в другом домене.

Linearity of the Fourier Transform
Линейность преобразования Фурье

The Fourier Transform is *linear,* that is, it possesses the properties of *homogeneity* and *additivity*. This is true for all four members of the Fourier transform family (Fourier transform, Fourier Series, DFT, and DTFT).

Преобразование Фурье линейно, то есть обладает свойствами *однородности(гомогенности)* и *аддитивности*. Это истинно для всех четырех членов семейства преобразования Фурье (преобразование Фурье, Ряд Фурье, ДПФ, и DTFT).

Figure 10-1 provides an example of how homogeneity is a property of the Fourier transform. Figure (a) shows an arbitrary time domain signal, with the corresponding frequency spectrum shown in (b). We will call these two signals: $x[\ ]$ and $X[\ ]$, respectively. *Homogeneity* means that a change in amplitude in one domain produces an identical change in amplitude in the other domain. This should make intuitive sense: when the amplitude of a time domain waveform is changed, the amplitude of the sine and cosine waves making up that waveform must also change by an equal amount.

Рисунок 10-1 обеспечивает пример того, как однородность является свойством преобразования Фурье. Рисунок (a) показывает произвольный сигнал домена времени, с соответствующим спектром частот, показанным в (b). Мы назовем эти два сигнала: $x[\ ]$ и $X[\ ]$, соответственно. *Однородность* означает, что изменение в амплитуде в одном домене производит идентичное изменение в амплитуде в другом домене. Это должно делать интуитивный смысл: когда амплитуда формы волны домена времени изменена, амплитуда волны синуса, и волны косинуса, составляющих ту форму волны должны также измениться равным количеством.

In mathematical form, if $x[\ ]$ and $X[\ ]$ are a Fourier Transform pair, then $k\,x[\ ]$ and $k\,X[\ ]$ are also a Fourier Transform pair, for any constant k. If the frequency domain is represented in *rectangular* notation, $k\,X[\ ]$ means that both the real part and the imaginary part are multiplied by k. If the frequency domain is represented in *polar* notation, $k\,X[\ ]$ means that the magnitude is multiplied by k, while the phase remains unchanged.

В математической форме, если $x[\ ]$ и $X[\ ]$ - пара преобразований Фурье, то $k\,x[\ ]$ и $k\,X[\ ]$ - также пара преобразований Фурье, для любой константы k. Если частотный домен представлен в прямоугольной системе обозначений, $k\,X[\ ]$ означает, что и вещественная часть и мнимая(несобственная) часть умножена на k. Если частотный домен представлен в полярной системе обозначений, $k\,X[\ ]$означает, что величина - умноженная k, в то время как фаза остается неизменяемой.

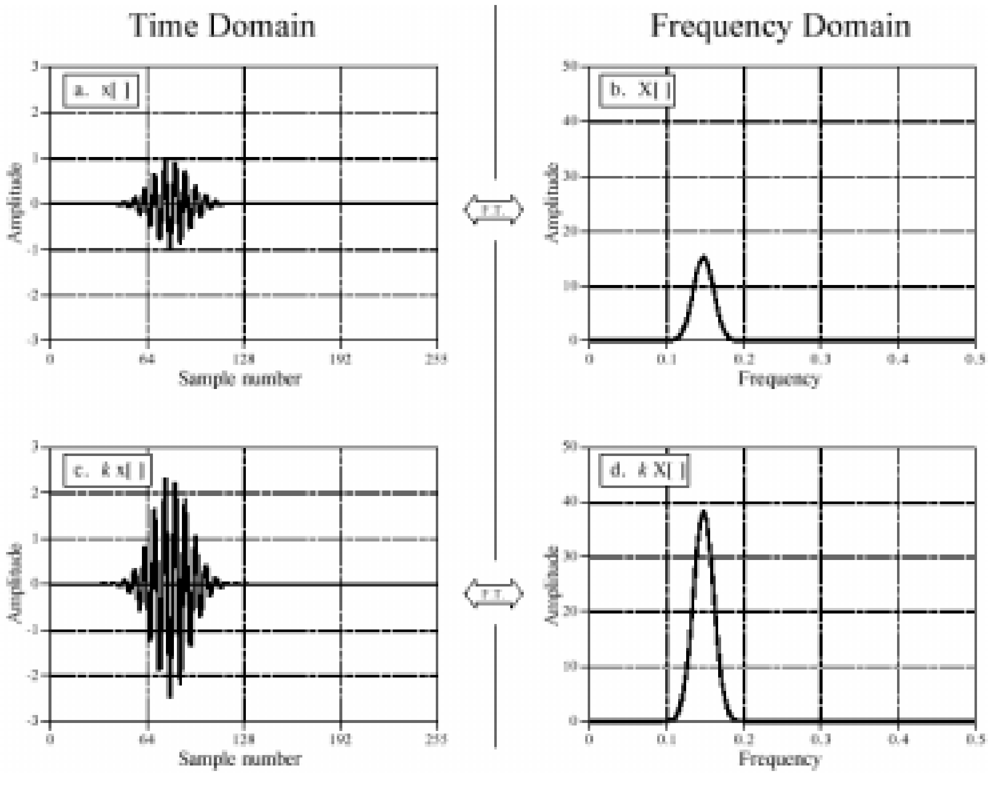

FIGURE 10-1
Homogeneity of the Fourier transform. If the amplitude is changed in one domain, it is changed by the same amount in the other domain. In other words, *scaling* in one domain corresponds to *scaling* in the other domain.

РИСУНОК 10-1. Однородность(гомогенность) преобразования Фурье. Если амплитуда изменена в одном домене, это изменено тем же самым количеством в другом домене. Другими словами, *масштабирование* в одном домене соответствует масштабированию в другом домене.

Additivity of the Fourier transform means that *addition* in one domain corresponds to *addition* in the other domain. An example of this is shown in Fig. 10-2. In this illustration, (a) and (b) are signals in the time domain called $x_1[\ ]$ and $x_2[\ ]$, respectively. Adding these signals produces a third time domain signal called $x_3[\ ]$, shown in (c). Each of these three signals has a frequency spectrum consisting of a real and an imaginary part, shown in (d) through (i). Since the two time domain signals *add* to produce the third time domain signal, the two corresponding spectra *add* to produce the third spectrum. Frequency spectra are added in rectangular notation by adding the real parts to the real parts and the imaginary parts to the imaginary parts. If: $x_1[n] + x_2[n] = x_3[n]$, then: $ReX_1[f\,] + ReX_2[f\,] = ReX_3[f\,]$ and $ImX_1[f\,] + ImX_2[f\,] = ImX_3[f\,]$. Think of this in terms of cosine and sine waves. All the cosine waves add (the real parts) and all the sine waves add (the imaginary parts) with no interaction between the two.

Аддитивность преобразования Фурье(трансформанты Фурье) означает, что *сложение* в одном домене соответствует *сложению* в другом домене. Пример этого показывается на рис. 10-2. В этой иллюстрации, (a) и (b) - сигналы в домене времени, называемые $x_1[\ ]$ и $x_2[\ ]$, соответственно. Сложение этих сигналов производит третий сигнал домена времени, называемый $x_3[\ ]$, показанный в (c). Каждый из этих трех сигналов имеет спектр частот, состоящий из реальной(вещественной) и мнимой(несобственной) части, показанный в рис. от (d) до (i). Так как два сигнала домена времени складываясь, производят третий сигнал домена времени, два соответствующих спектра складываясь, производят третий спектр. Частотные спектры сложены в прямоугольной системе обозначений, прибавляя вещественные части к вещественным частям и мнимые(несобственные) части к мнимым(несобственным) частям. Если: $x_1[n] + x_2[n] = x_3[n]$, тогда: $ReX_1[f\,] + ReX_2[f\,] = ReX_3[f\,]$ и $ImX_1[f\,] + ImX_2[f\,] = ImX_3[f\,]$. Думайте о этом в терминах волн синуса и косинуса. Все волны косинуса складываются (вещественные части) и все волны синуса складываются (мнимые(несобственные) части) без взаимодействия между двумя(попарно).

Frequency spectra in polar form cannot be directly added; they must be converted into rectangular notation, added, and then reconverted back to polar form. This can also be understood in terms of how sinusoids behave. Imagine adding two sinusoids having the same frequency, but with different amplitudes (A_1 and A_2) and phases (ϕ_1 and ϕ_2). If the two phases happen to be same ($\phi_1 = \phi_2$), the amplitudes will add ($A_1 + A_2$) when the sinusoids are added. However, if the two phases happen to be exactly opposite ($\phi_1 = -\phi_2$), the amplitudes will *subtract* ($A_1 - A_2$) when the sinusoids are added. The point is, when sinusoids (or spectra) are in polar form, they *cannot* be added by simply adding the magnitudes and phases.

Частотные спектры в полярной форме не могут быть непосредственно сложены; они должны быть преобразованы в прямоугольную систему обозначений, сложены, и затем повторно преобразованы назад к полярной форме. Это может также быть понято в терминах того, как синусоиды ведут себя. Вообразите сложение двух синусоид, имеющих ту же самую частоту, но различные амплитуды (A_1 и A_2) и фазы (ϕ_1 and ϕ_2). Если эти две фазы, (ϕ_1 and ϕ_2), случается, совпадают(те же самые), амплитуды *складываются* ($A_1 + A_2$) когда синусоиды сложены. Однако, если эти две фазы, случается, противоположны, (ϕ_1 and ϕ_2) амплитуды *вычитаются*, ($A_1 - A_2$) когда синусоиды сложены. Есть особенность(пункт), когда синусоиды (или спектры) находятся в полярной форме, они *не могут быть* сложены, просто складывая величины и фазы.

In spite of being linear, the Fourier transform is *not* shift invariant. In other words, a shift in the time domain *does not* correspond to a shift in the frequency domain. This is the topic of the next section.

Будучи линейным, Преобразование Фурье(трансформанта Фурье) - *не*, сдвигаются инвариантно. Другими словами, сдвиг в домене времени *не соответствует* сдвигу в частотном домене. Это - тема следующего раздела.

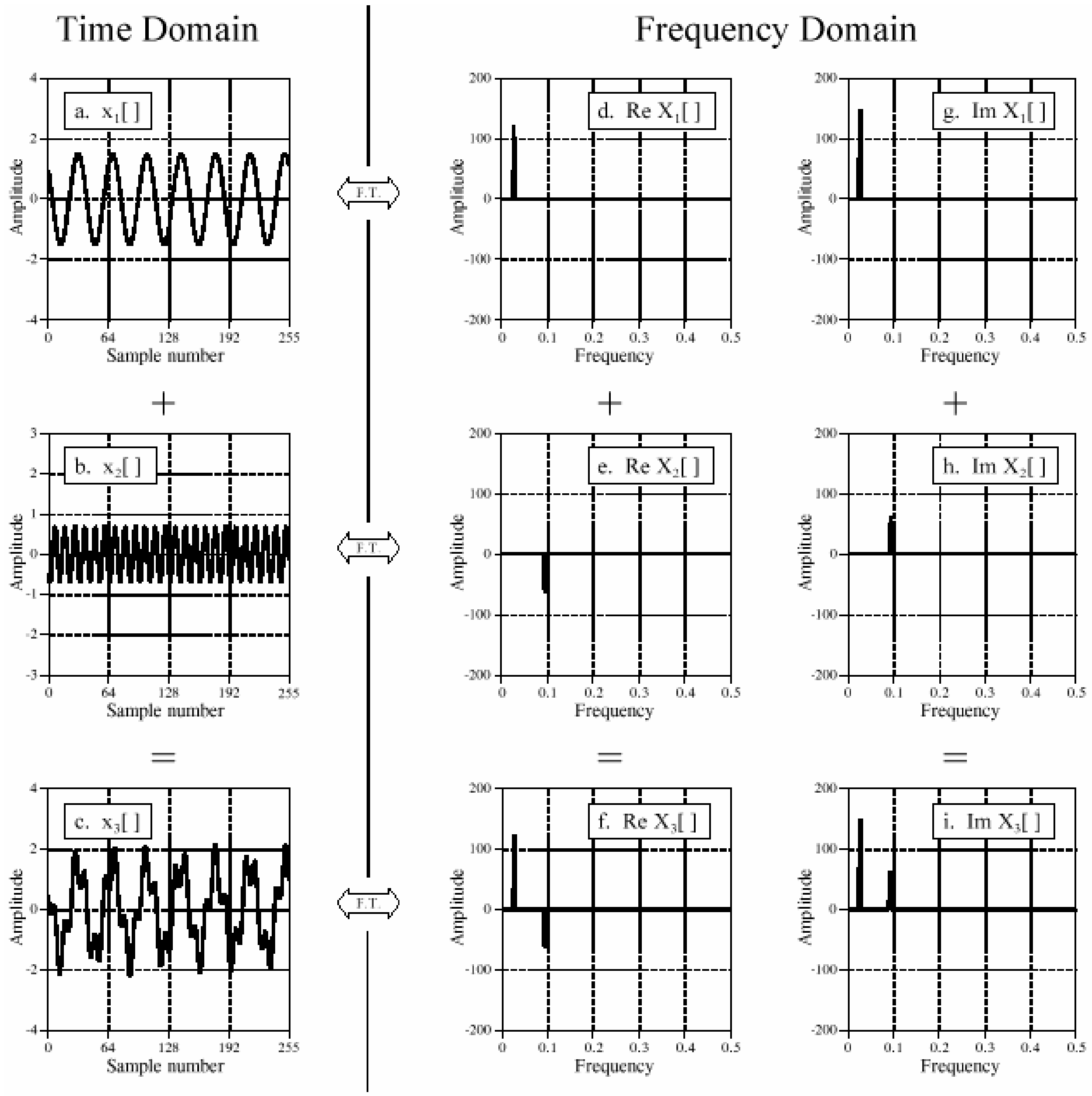

Figure 10-2. Additivity of the Fourier transform.
Adding two or more signals in one domain results in the corresponding signals being added in the other domain. In this illustration, the time domain signals in (a) and (b) are added to produce the signal in (c). This results in the corresponding real and imaginary parts of the frequency spectra being added.

Рисунок 10-2.
Аддитивность преобразования Фурье.
Сложение двух или больше сигналов в одном домене приводит к соответствующим сигналам, складываемых в другом домене. В этой иллюстрации, сигналы домена времени в (a) и (b) сложены, чтобы произвести сигнал в (c). Это приводит к соответствующим реальным(вещественным) и мнимым(несобственным) частям складываемых частотных спектров.

Characteristics of the Phase
Характеристики Фазы

In mathematical form: if $x[n] \leftrightarrow Mag\ X[f]$ and $Phase\ X[f]$ then a shift in the time domain results in:: $x[n + s] \leftrightarrow Mag\ X[f]$ and $PhaseX[f] + 2\pi sf$, (where: f is expressed as a fraction of the sampling rate, running between 0 and 0.5). In words, a shift of s samples in the time domain leaves the magnitude unchanged, but adds a linear term to the phase, $2\pi sf$. Let's look at an example of how this works.

В математической форме: если $x[n] \leftrightarrow Mag\ X[f]$ и $Phase\ X[f]$ тогда сдвиг в домене времени приводит к : $x[n + s] \leftrightarrow Mag\ X[f]$ and $PhaseX[f] + 2\pi sf$, (где: f выражен как дробь(доля) частоты выборки, выполняющейся между 0 и 0.5). В словах, сдвиг выборок s в домене времени оставляет величину, неизменяемой, но прибавляет линейный член; (член первой степени) к фазе, $2\pi sf$. Давайте посмотрим пример того, как это работает.

Figure 10-3 shows how the phase is affected when the time domain waveform is shifted to the left or right. The magnitude has not been included in this illustration because it isn't interesting; it is not changed by the time domain shift. In Figs. (a) through (d), the waveform is gradually shifted from having the peak centered on sample 128, to having it centered on sample 0. This sequence of graphs takes into account that the DFT views the time domain as *circular*; when portions of the waveform exit to the right, they reappear on the left.

Рисунок 10-3 показывает, как на фазу воздействует, когда форма волны домена времени сдвинута влево или вправо. Величина не была включена в эту иллюстрацию, потому что это не интересно; это не изменено сдвигом домена времени. В рис. (a) - (d), форма волны постепенно сдвинута от наличия пика, центрированного на выборке 128, к наличию центрированного на выборке 0. Эта последовательность графиков принимает во внимание, что ДПФ рассматривает домен времени как *циркулярный* (*циклический*, *круговой*); когда части формы волны выходят справа, они вновь появляются слева.

The time domain waveform in Fig. 10-3 is symmetrical around a vertical axis, that is, the left and right sides are mirror images of each other. As mentioned in Chapter 7, signals with this type of symmetry are called *linear phase*, because the phase of their frequency spectrum is a *straight line*. Likewise, signals that don't have this left-right symmetry are called *nonlinear phase*, and have phases that are something other than a straight line. Figures (e) through (h) show the phase of the signals in (a) through (d). As described in Chapter 7, these phase signals are *unwrapped*, allowing them to appear without the discontinuities associated with keeping the value between π and $-\pi$.

Форма волны домена времени в рис. 10-3 симметрическая вокруг вертикальной оси, то есть левые и правые стороны - зеркальные изображения друг друга. Как упомянуто в главе 7, сигналы с этим типом симметрии называются *линейной фазой*, потому что фаза их спектра частот - *прямая линия*. Аналогично, сигналы, которые не имеют эту лево - правую симметрию, называются *нелинейной фазой*, и имеют фазы, которые являются кое-чем другим, чем прямая линия. Рисунки (e) через (h) показывают фазу сигналов в (a) через (d). Как описано в Главе 7, эти фазовые сигналы развернуты, позволяя им появиться без разрывов, связанных с хранением значения между π и $-\pi$

When the time domain waveform is shifted to the right, the phase remains a straight line, but experiences a *decrease* in slope. When the time domain is shifted to the left, there is an *increase* in the slope. This is the main property you need to remember from this section; a shift in the time domain corresponds to changing the slope of the phase.

Когда форма волны домена времени сдвинута направо, фаза остается прямой линией, но испытывает уменьшение в наклоне. Когда домен времени сдвинут налево, имеется увеличение в наклоне. Это - основное свойство, которое Вы должны помнить от этого раздела; сдвиг в домене времени соответствует изменению наклона фазы.

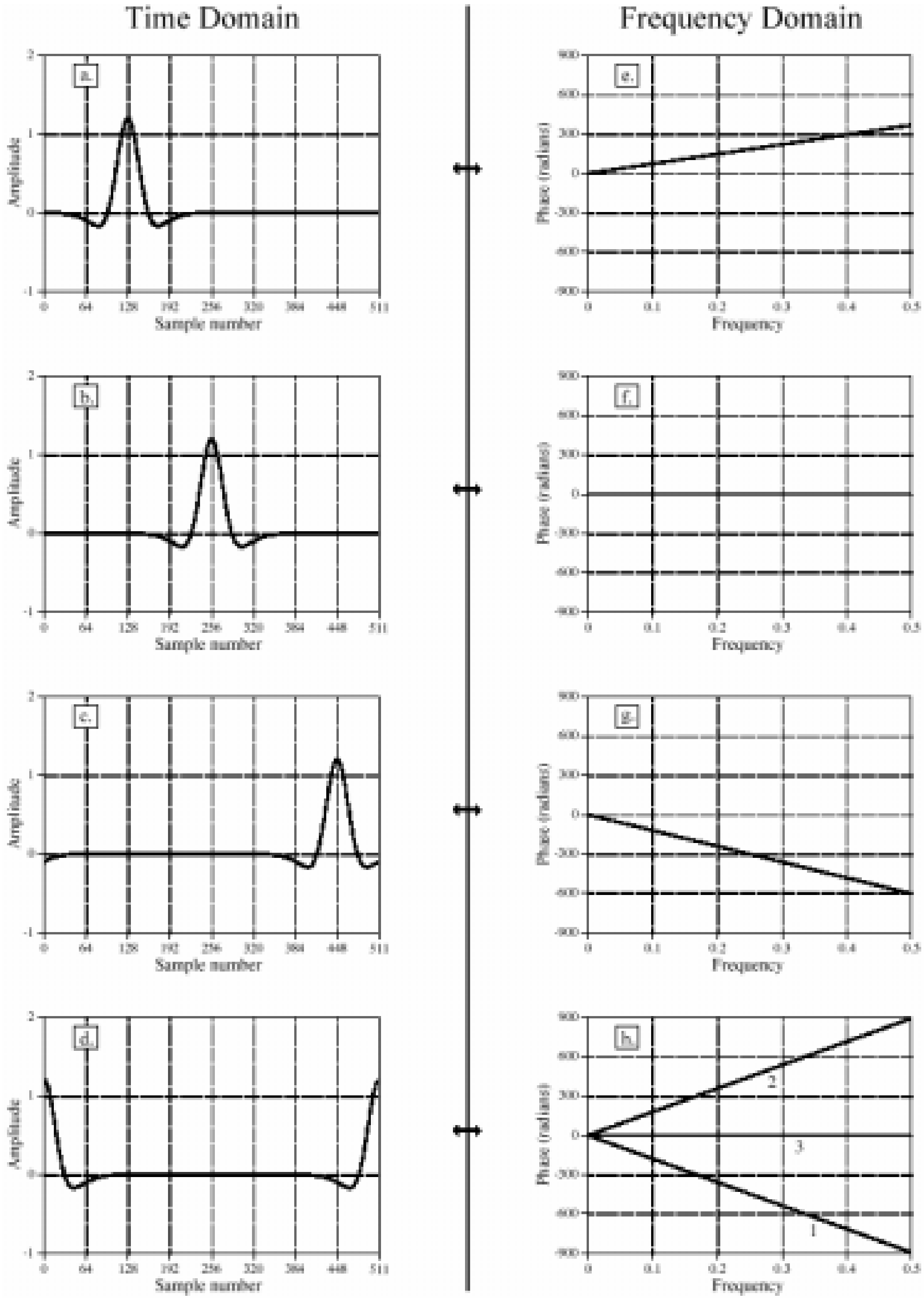

FIGURE 10-3
Phase changes resulting from a time domain shift.

РИСУНОК 10-3.
Изменения фазы следующие из сдвига домена времени.

Figures (b) and (f) display a unique case where the phase is entirely zero. This occurs when the time domain signal is *symmetrical* around sample *zero*. At first glance, this symmetry may not be obvious in (b); it may appear that the signal is symmetrical around sample 256 (i.e., $N/2$) instead. Remember that the DFT views the time domain as circular, with sample zero inherently connected to sample N-1. Any signal that is symmetrical around sample zero will also be symmetrical around sample $N/2$, and vice versa. When using members of the Fourier Transform family that do not view the time domain as periodic (such as the DTFT), the symmetry must be around sample zero to produces a zero phase.

Рисунки (b) и (f) отображают уникальный случай, где фаза полностью нулевая. Это происходит, когда сигнал домена времени *симметрический* вокруг выборки *нуля*. На первый взгляд, эта симметрия не может быть очевидна в (b); может казаться, что сигнал симметрический, вокруг выборки 256 (то есть, $N/2$) вместо этого. Помните, что ДПФ рассматривает домен времени как циклический, с нулевой выборкой, неотъемлемо связанной с выборкой N-1. Любой сигнал, который является симметрическим вокруг выборки нуль, будет также симметрический, вокруг выборки $N/2$, и наоборот. При использовании членов семейства Преобразования Фурье(трансформанты Фурье), которые не рассматривают, домен времени как периодический (типа DTFT), симметрия должна быть вокруг выборки нуль к производству нулевой фазы(фазы нуля).

Figures (d) and (h) shows something of a riddle. First imagine that (d) was formed by shifting the waveform in (c) slightly more to the right. This means that the phase in (h) would have a slightly more negative slope than in (g). This phase is shown as line 1. Next, imagine that (d) was formed by starting with (a) and shifting it to the left. In this case, the phase should have a slightly more positive slope than (e), as is illustrated by line 2. Lastly, notice that (d) is symmetrical around sample $N/2$, and should therefore have a zero phase, as illustrated by line 3. Which of these three phases is correct? They all are, depending on how the π and 2π phase ambiguities (discussed in Chapter 8) are arranged. For instance, every sample in line 2 differs from the corresponding sample in line 1 by an integer multiple of 2π, making them equal. To relate line 3 to lines 1 and 2, the π ambiguities must also be taken into account.

Рисунки (d) и (h) показывают кое-что загадочное. Во первых вообразите, что (d) был сформирован, сдвигая форму волны в (c) слегка больше направо Это означает, что фаза в (h) имела бы слегка больший отрицательный наклон чем в (g). Эта фаза показывается как линия 1. Затем, вообразите, что (d) был сформирован, начинаясь с (a) и сдвигая это влево. В этом случае, фаза должна иметь слегка более положительный наклон, чем (e), как иллюстрирована линией 2. Наконец, обратите внимание, что (d) симметрический, вокруг выборки $N/2$, и поэтому должен иметь нулевую фазу, как иллюстрировано линией 3. является ли какая либо из этих трех фаз правильной? Они все, в зависимости от того, как размещаются фазовые неоднозначности π и 2π (обсужденные в главе 8). Например, каждая выборка в линии 2 отличается от соответствующей выборки по линии 1 кратным 2π, делая их равными. Связывая линию 3 с линиями 1 и 2, неоднозначности π должны также быть приняты во внимание.

To understand why the phase behaves as it does, imagine shifting a waveform by *one* sample to the right. This means that all of the sinusoids that compose the waveform must also be shifted by *one* sample to the right. Figure 10-4 shows two sinusoids that might be a part of the waveform. In (a), the sine wave has a very low frequency, and a one sample shift is only a small fraction of a full cycle. In (b), the sinusoid has a frequency of one-half of the sampling rate, the highest frequency that can exist in sampled data. A one sample shift at this frequency is equal to an entire 1/2 cycle, or π radians. That is, when a shift is expressed in terms of a phase change, it becomes *proportional* to the frequency of the sinusoid being shifted.

Чтобы понимать, почему фаза ведет себя, как это делает, вообразите сдвигать форму волны одной выборкой направо. Это означает, что все синусоиды, которые составляют форму волны, должны также быть сдвинуты одной выборкой направо. Рисунок 10-4, показывает две синусоиды, которые могли бы быть частью формы волны. В (а), волна синуса имеет очень низкую частоту, и одну выборку сдвига - только маленькая дробь(доля, часть) полного цикла(периода). В (b), синусоида имеет частоту половины частоты выборки, самая высокая частота, которая может существовать в произведенных выборках данных(выборочных данных, дискретных данных). Одна выборка в этой частоте равна полному циклу(периоду) 1/2, или π радиан. То есть когда сдвиг выражен в терминах изменения фазы, это становится *пропорциональным* к частоте сдвигаемой синусоиды.

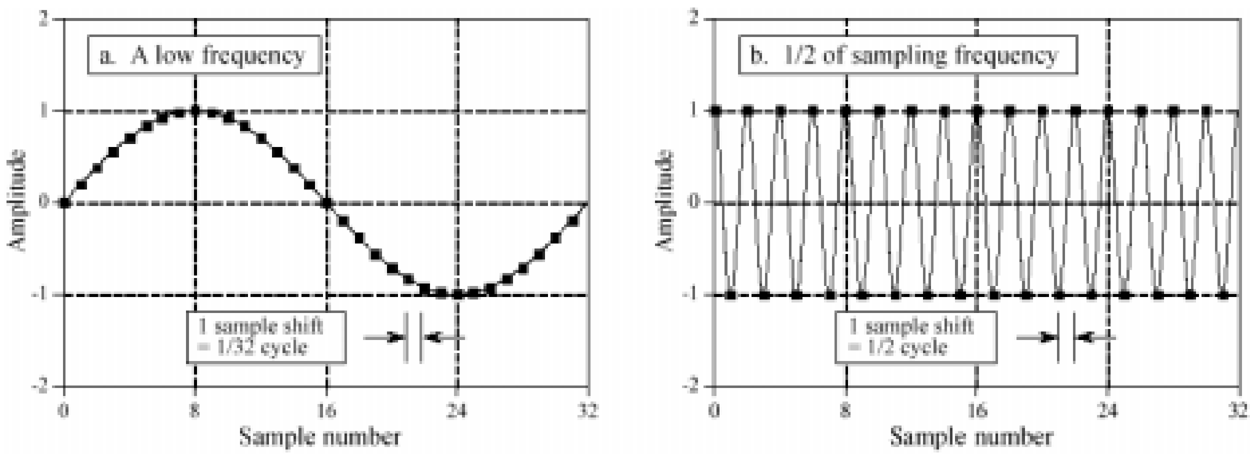

FIGURE 10-4. The relationship between samples and phase.
Figures (a) and (b) show low and high frequency sinusoids, respectively. In (a), a one sample shift is equal to 1/32 of a cycle. In (b), a one sample shift is equal to 1/2 of a cycle. This is why a shift in the waveform changes the phase more at high frequencies than at low frequencies.

For example, consider a waveform that is symmetrical around sample zero, and therefore has a zero phase. Figure 10-5a shows how the phase of this signal changes when it is shifted left or right. At the highest frequency, one-half of the sampling rate, the phase increases by π for each one sample shift to the left, and decreases by π for each one sample shift to the right. At zero frequency there is no phase shift, and all of the frequencies between follow in a straight line.

Например, рассмотрите форму волны, которая является симметрической вокруг выборки нуль, и поэтому имеет нулевую фазу. Рисунок 10-5а показывает, как фаза этого сигнала изменяется, когда это сдвинуто влево или вправо. В самой высокой частоте, половина частоты выборки, увеличения фазы π для каждой одной выборки сдвинутой налево, и уменьшений π для каждого одной выборки сдвинутой направо В нулевой частоте не имеется никакого сдвига фаз, и все частоты между следуют в прямой линии.

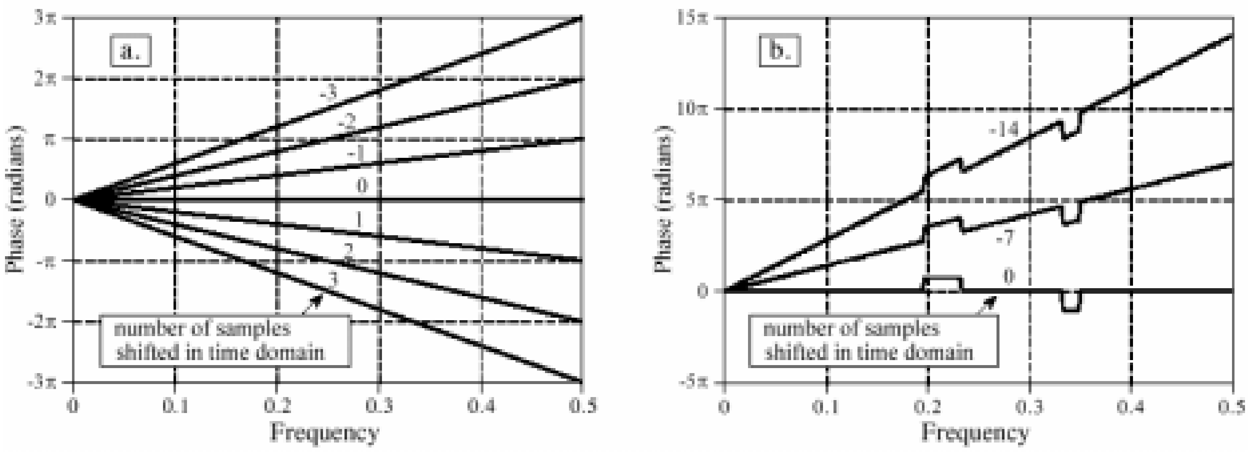

FIGURE 10-5. Phases resulting from time domain shifting.
For each sample that a time domain signal is shifted in the positive direction (i.e., to the right), the phase at frequency 0.5 will decrease by **B** radians. For each sample shifted in the negative direction (i.e., to the left), the phase at frequency 0.5 will increase by **B** radians. Figure (a) shows this for a linear phase (a straight line), while (b) is an example using a nonlinear phase.

All of the examples we have used so far are *linear* phase. Figure 10-5b shows that *nonlinear* phase signals react to shifting in the same way. In this example the nonlinear phase is a straight line with two rectangular pulses. When the time domain is shifted, these nonlinear features are simply superimposed on the changing slope.

Все примеры, которые мы использовали пока(до сих пор) - *линейная* фаза. Рисунок 10-5b показывает, что нелинейные фазовые сигналы реагируют на смещение таким же образом. В этом примере нелинейная фаза - прямая линия с двумя прямоугольными импульсами. Когда домен времени сдвинут, эти нелинейные особенности просто сложены на изменяющемся наклоне.

What happens in the *real* and *imaginary parts* when the time domain waveform is shifted? Recall that frequency domain signals in rectangular notation are nearly impossible for humans to understand. The real and imaginary parts typically look like random oscillations with no apparent pattern. When the time domain signal is shifted, the wiggly patterns of the real and imaginary parts become even more oscillatory and difficult to interpret. Don't waste your time trying to understand these signals, or how they are changed by time domain shifting.

Что случается в *реальных*(вещественных) и *мнимых*(несобственных) частях, когда форма волны домена времени сдвинута? Вспомните, что сигналы частотного домена в прямоугольной системе обозначений почти невозможны для людей, чтобы понять. Реальные(вещественные) и мнимые(несобственные) части типично напоминают беспорядочные колебания без очевидного образца. Когда сигнал домена времени сдвинут, волнистые(новые) образцы реальных(вещественных) и мнимых(несобственных) частей станут четными более монотонно колебательными и трудными для интерпретации. Не тратьте впустую ваше время, пробуя понять эти сигналы, или как они изменены смещением домена времени.

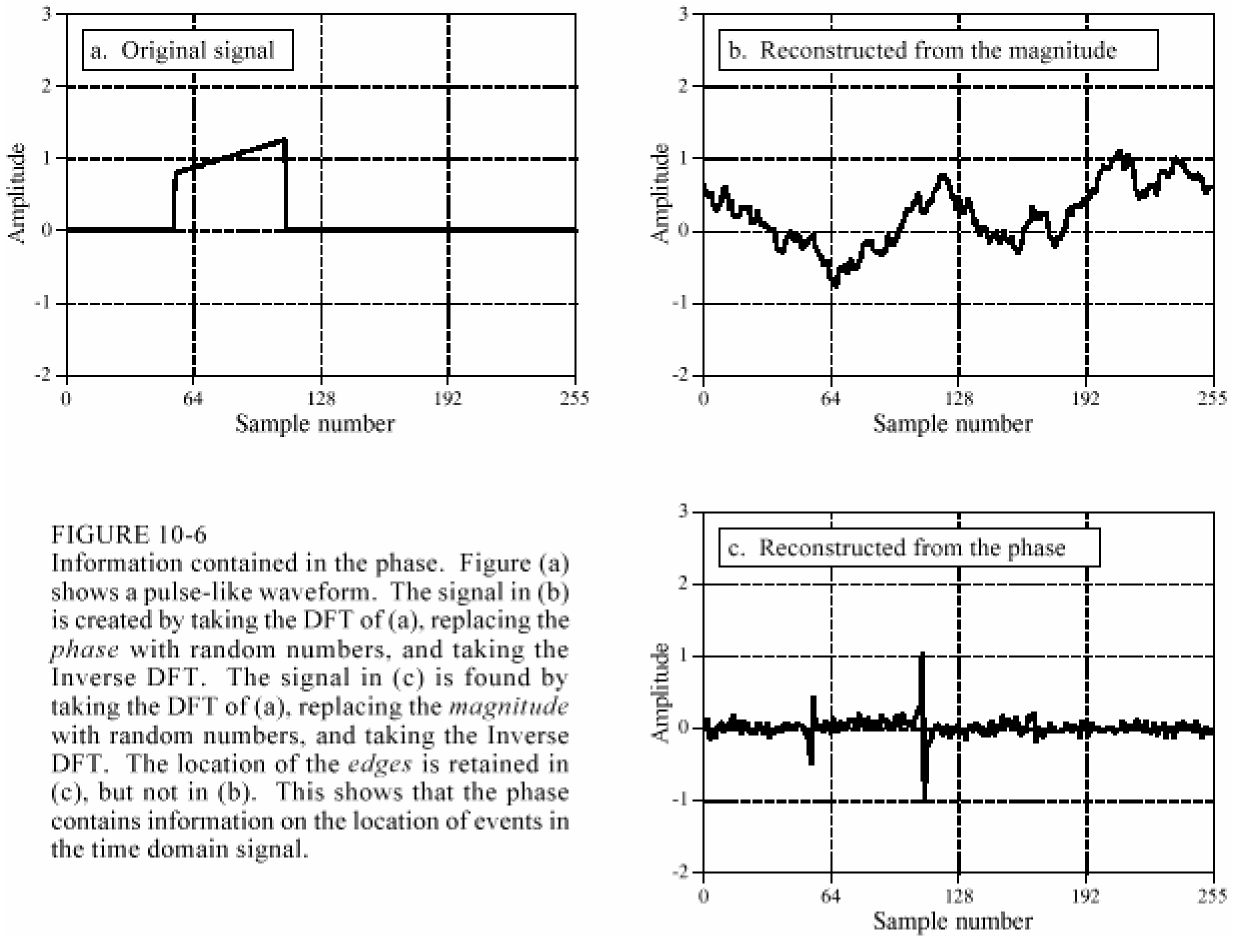

FIGURE 10-6
Information contained in the phase. Figure (a) shows a pulse-like waveform. The signal in (b) is created by taking the DFT of (a), replacing the *phase* with random numbers, and taking the Inverse DFT. The signal in (c) is found by taking the DFT of (a), replacing the *magnitude* with random numbers, and taking the Inverse DFT. The location of the *edges* is retained in (c), but not in (b). This shows that the phase contains information on the location of events in the time domain signal.

РИСУНОК 10-6. Информация, содержащаяся в фазе.
Рисунок (a) показывает пульс-подобную форму волны. Сигнал в (b) создан, беря ДПФ (a), заменяя *фазу* случайными числами, и беря Обратный ДПФ. Сигнал в (c) найден, беря ДПФ (a), заменяя *величину* случайными числами, и беря Обратный ДПФ. Расположение *граней(фронтов)* сохранено в (c), но не в (b). Это показывает, что фаза содержит информацию относительно расположения событий в сигнале домена времени.

Figure 10-6 is an interesting demonstration of what information is contained in the *phase*, and what information is contained in the *magnitude*. The waveform in (a) has two very distinct features: a rising edge at sample number 55, and a falling edge at sample number 110. Edges are very important when information is encoded in the *shape* of a waveform. An edge indicates *when* something happens, dividing whatever is on the left from whatever is on the right. It is time domain encoded information in its purest form. To begin the demonstration, the DFT is taken of the signal in (a), and the frequency spectrum converted into polar notation. To find the signal in (b), the phase is replaced with random numbers between -π and π, and the inverse DFT used to reconstruct the time domain waveform. In other words, (b) is based only on the information contained in the *magnitude*. In a similar manner, (c) is found by replacing the magnitude with small random numbers before using the inverse DFT. This makes the reconstruction of (c) based solely on the information contained in the *phase*.

Рисунок 10-6 - интересная демонстрация, какая информация содержится в *фазе*, и какая информация содержится в *величине*. Форма волны в (a) имеет две очень отличительных особенности: повышающийся фронт в выборке 55, и понижающийся фронт в выборке 110. Фронты очень важны, когда информация закодирована в *форме* формы волны. Фронт указывает, *когда* кое-что случается, разделяя все что есть слева от того, что находится справа. Это - домен времени закодированная информация в ее самой чистой форме. Чтобы начинать демонстрацию, принят(взят) ДПФ сигнала в (a), и спектр частот, преобразованный в полярную систему обозначений. Чтобы находить сигнал в (b), фаза заменена случайными числами между -π и π, и обратный ДПФ используемый для восстановления формы волны домена времени. Другими словами, (b) использует только информацию, содержащуюся в *величине*. Подобным способом, найден (c), заменяя величину маленькими случайными числами перед использованием обратного ДПФ. Это делает реконструкцию из (c), основанной исключительно на информации, содержащейся в *фазе*.

The result? The locations of the edges are clearly present in (c), but totally absent in (b). This is because an edge is formed when many sinusoids *rise* at the same location, possible only when their *phases* are coordinated. In short, much of the information about the shape of the time domain waveform is contained in the *phase*, rather than the *magnitude*. This can be contrasted with signals that have their information encoded in the frequency domain, such as audio signals. The magnitude is most important for these signals, with the phase playing only a minor role. In later chapters we will see that this type of understanding provides strategies for designing filters and other methods of processing signals. Understanding how information is represented in signals is always the first step in successful DSP.

Результат? Расположения фронтов - ясно представлены в (c), но полностью отсутствуют в (b). Это - то, потому что фронт сформирован, когда много синусоид *повышаются(возрастают)* в том же самом расположении, возможном только, когда их *фазы* скоординированы. Короче говоря, многое из информации относительно формы формы волны домена времени содержится в *фазе*, скорее чем *величина*. Это может быть противопоставлено с сигналами, которые кодируют их информацию в частотном домене, типа звуковых сигналов. Величина наиболее важна для этих сигналов, фаза, играет только незначительную(второстепенную) роль. В более поздних главах мы будем видеть, что этот тип понимания обеспечивает стратегию для проектирования фильтров и других методов обработки сигналов. Понимание, как информация представлена в сигналах является всегда первым шагом в успешной ЦОС.

Why does left-right symmetry correspond to a zero (or linear) phase? Figure 10-7 provides the answer. Such a signal can be decomposed into a left half and a right half, as shown in (a), (b) and (c). The sample at the center of symmetry (zero in this case) is divided equally between the left and right halves, allowing the two sides to be perfect mirror images of each other. The magnitudes of these two halves will be *identical*, as shown in (e) and (f), while the phases will be opposite in sign, as in (h) and (i). Two important concepts fall out of this. First, every signal that is symmetrical between the left and right will have a linear phase *because* the nonlinear phase of the left half exactly cancels nonlinear phase of the right half.

Почему лево - правая симметрия передает нуль (или линейную) фазу? Рисунок 10-7 обеспечивает ответ. Такой сигнал может быть декомпозирован(разложен) на левую половину и правую половину, как показано в (a), (b) и (c). Выборка в центре симметрии (нуль в этом случае) разделена одинаково между левыми и правыми половинами, позволяя этим двум сторонам, быть совершенными зеркальными изображениями друг друга. Величины этих двух половин будут *идентичны*, как показано в (e) и (f), в то время как фазы будут противоположны по знаку, как в (h) и (i). Две важных концепции вытекают из этого. Во первых, каждый сигнал, который является симметрическим между левым и правым, будет иметь линейную фазу, *потому что* нелинейная фаза левой половины точно отменяет нелинейную фазу правой половины.

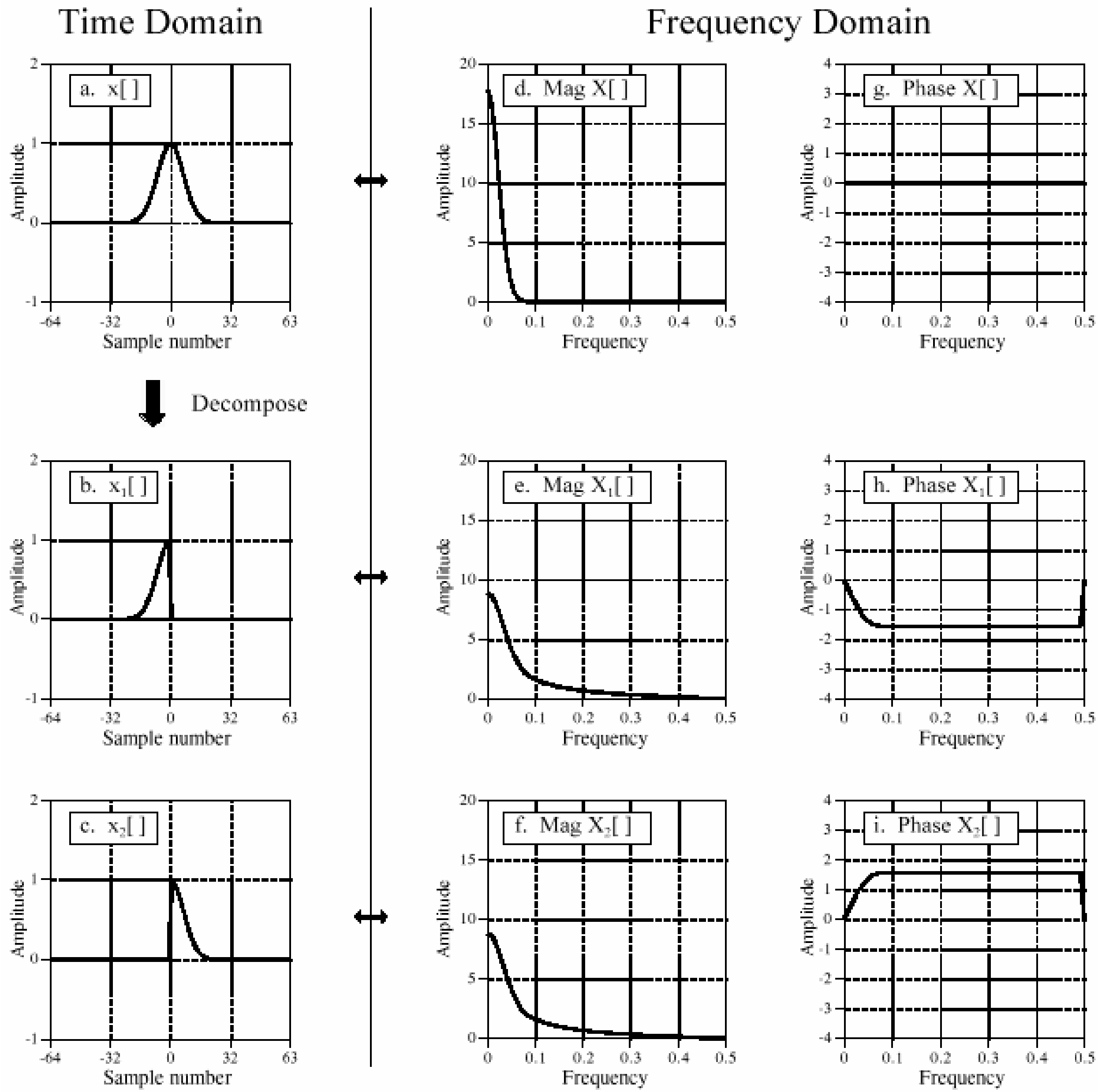

FIGURE 10-7
Phase characteristics of left-right symmetry. A signal with left-right symmetry, shown in (a), can be decomposed into a right half, (b), and a left half, (c). The magnitudes of the two halves are identical, (e) and (f), while the phases are the negative of each other, (h) and (i).

РИСУНОК 10-7. Фазовые характеристики лево - правой симметрии.
Сигнал с лево - правой симметрией, показанный в (a), может быть декомпозирован(разложен) на правую половину, (b), и левую половину, (c). Величины этих двух половин идентичны, (e) и (f), в то время как фазы - противоположны друг другу, (h) и (i).

(c) АВТЭКС, Санкт-Петербург, http://www.autex.spb.ru, e-mail: info@autex.spb.ru

Second, imagine flipping (b) such that it becomes (c). This left-right flip in the time domain does nothing to the magnitude, but changes the sign of every point in the phase. Likewise, changing the sign of the phase flips the time domain signal left-for-right. If the signals are continuous, the flip is around zero. If the signals are discrete, the flip is around sample zero *and* sample $N/2$, simultaneously.

Во вторых, вообразите зеркальное отражение(переворот) (b) таким, что это становится (c). Этот лево - правый зеркальное отражение в домене времени, не ничто к величине, но изменяет знак каждой точки в фазе. Аналогично, изменяя знак фазы зеркально отраженный сигнал домена времени, слева - направо. Если сигналы непрерывны, зеркальное отражение - вокруг нуля. Если сигналы дискретны, зеркальное отражение - вокруг выборки нуль *и* выборки $N/2$, одновременно.

Changing the sign of the phase is a common enough operation that it is given its own name and symbol. The name is **complex conjugation**, and it is represented by placing a star to the upper-right of the variable. For example, if $X[f]$ consists of *Mag* $X[f]$ and *Phase* $X[f]$, then $X^*[f]$ is called the *complex conjugate* and is composed of *Mag* $X[f]$ and -*Phase* $X[f]$. In rectangular notation, the complex conjugate is found by leaving the real part alone, and changing the sign of the imaginary part. In mathematical terms, if $X[f]$ is composed of $ReX[f]$ and $ImX[f]$, then $X^*[f]$ is made up of $ReX[f]$ and $-ImX[f]$.

Изменение знака фазы - достаточно обычная операция, которой дано ее собственное название и символ. Название - **комплексное сопряжение**, и это представлено, помещая звездочку справа вверху над переменной. Например, если $X[f]$, состоит из *Mag* $X[f]$ и *Phase* $X[f]$, то $X^*[f]$ называется комлексно сопряженным и составлен из *Mag* $X[f]$ and -*Phase* $X[f]$. В прямоугольной системе обозначений, комлексно сопряженный(элемент) найден, оставляя вещественную часть без изменения, и изменяя знак мнимой части. В математических терминах, если $X[f]$ составлен из $ReX[f]$ и $ImX[f]$, тогда $X^*[f]$ составлен из $ReX[f]$ and $-ImX[f]$.

Here are several examples of how the complex conjugate is used in DSP. If $x[n]$ has a Fourier transform of $X[f]$, then $x[-n]$ has a Fourier transform of $X^*[f]$. In words, flipping the time domain left-for-right corresponds to changing the sign of the phase. As another example, recall from Chapter 7 that correlation can be performed as a convolution. This is done by flipping one of the signals left-for-right. In mathematical form $a[n] * b[n]$, is convolution, while $a[n] * b[-n]$ is correlation. In the frequency domain these operations correspond to $A[f] \times B[f]$ and $A[f] \times B^*[f]$, respectively. As the last example, consider an arbitrary signal, $x[n]$, and its frequency spectrum, $X[f]$. The frequency spectrum can be changed to *zero phase* by multiplying it by its complex conjugate, that is, $X[f] \times X^*[f]$. In words, whatever phase $X[f]$ happens to have will be canceled by adding its opposite (remember, when frequency spectra are multiplied, their phases are added). In the time domain, this means that $x[n] * x[-n]$ (a signal convolved with a left-right flipped version of itself) will have left-right symmetry around sample zero, regardless of what $x[n]$ is.

Имеются несколько примеров того, как комлексно сопряженный(элемент) используется в ЦОС. Если $x[n]$ имеет преобразование Фурье(трансформанту Фурье) $X[f]$, то $x[-n]$ имеет преобразование Фурье(трансформанту Фурье) $X^*[f]$. В словах, зеркально отраженный(перевернутый) слева - направо домен времени, соответствует изменению знака фазы. Как другой пример, обратитесь к главы 7, что корреляция может быть выполнена как скручивание. Это сделано, зеркально отражая(переворачивая) один из сигналов слева - направо. В математической форме $[n] * b[n]$, является скручиванием, в то время как $[n] * b[-$

n] - корреляция. В частотном домене эти операции соответствуют [*f*] x *B*[f] и [*f*] x *B** [*f*], соответственно. Как последний пример, рассмотрите произвольный сигнал, *x*[*n*], и его частотный спектр, *X*[*f*]. Спектр частот может быть изменен, к нулевой фазе, умножая это на ее комлексно сопряженный(элемент), то есть *X*[*f*] x *X** [*f*]. В словах, независимо от того, что фаза *X*[*f*], случается, имеет, будет отменен, прибавляя ее напротив (помните, когда частотные спектры умножены, их фазы сложены). В домене времени, это означает, что *x*[*n*]* *x*[-*n*] (сигнал, скрученный с лево - правой зеркально отраженной версией себя) будет иметь лево - правую симметрию вокруг выборки нуля, независимо от того, что *x*[*n*].

To many engineers and mathematicians, this kind of manipulation *is* DSP. If you want to be able to communicate with this group, get used to using their language.

Многим инженерам и математикам, этот вид манипуляции – ЦОС. Если Вы хотите быть способными общаться с этой группой(инженеров и математиков), привыкайте к использованию их языка.

Periodic Nature of the DFT
Периодический Характер(природа) ДПФ

Unlike the other three Fourier Transforms, the DFT views *both* the time domain and the frequency domain as *periodic*. This can be confusing and inconvenient since most of the signals used in DSP are *not* periodic. Nevertheless, if you want to use the DFT, you must conform with the DFT's view of the world.

В отличие от других трех преобразований Фурье(трансформант Фурье), ДПФ рассматривает, и домен времени и частотный домен как периодический. Это может быть запутывающее и неудобно, так как большинство сигналов, используемых в ЦОС не периодически. Однако, если Вы хотите использовать ДПФ, Вы должны подчинятся всемирному(мировому) взгляду(виду) ДПФ.

Figure 10-8 shows two different interpretations of the time domain signal. First, look at the upper signal, the time domain viewed as *N* points. This represents how digital signals are typically acquired in scientific experiments and engineering applications. For instance, these 128 samples might have been acquired by sampling some parameter at regular intervals of *time*. Sample 0 is distinct and separate from sample 127 because they were acquired at *different* times. From the way this signal was formed, there is no reason to think that the samples on the left of the signal are even related to the samples on the right.

Рисунок 10-8 показывает две различных интерпретации сигнала домена времени. Во первых, смотрите на верхний сигнал, домен времени, просмотренный как точки *N*. Это представляет, как цифровые сигналы типично приобретаются в научных экспериментах и технических приложениях. Например, эти 128 выборок могли бы быть приобретены, производя выбор некоторого параметра равномерно *времени*. Выборка 0 отлична и отдельная от выборки 127, потому что они были приобретены в *разное* время. От пути(способа) которым этот сигнал был сформирован, не имеется никакой причины думать, что выборки слева сигнала даже связаны с выборками справа.

Unfortunately, the DFT doesn't see things this way. As shown in the lower figure, the DFT views these 128 points to be a single period of an infinitely long periodic signal. This means that the left side of the acquired signal is connected to the right side of a duplicate signal. Likewise, the right side of the acquired signal is connected to the left side of an identical period. This can also be thought of as the right side of the acquired signal wrapping around and connecting to its left side. In this view, sample 127 occurs next to sample 0, just as sample 43 occurs next to sample 44. This is referred to as being **circular**, and is identical to viewing the signal as being *periodic*.

К сожалению, ДПФ не видит вещи этим путем(способом). Как показано в более низком рисунке, ДПФ рассматривает эти 128 точек, чтобы быть единственным(отдельным) периодом бесконечно длинного периодического сигнала. Это означает, что левая сторона приобретенного сигнала связана с правой стороной второго сигнала. Аналогично, правая сторона приобретенного сигнала связана с левой стороной идентичного периода. О этом можно также думать как правой стороне приобретенного сигнала перенесенного вокруг и присоединенного к его левой стороне. В этом представлении(виде), выборка 127, происходит, рядом с выборкой 0, также, как выборка 43, происходит, рядом с выборкой 44. Это упомянуто как являющийся круговым(циркулярным, циклическим), и идентично просмотру сигнала как будто он *периодический*.

The most serious consequence of time domain periodicity is **time domain aliasing.** To illustrate this, suppose we take a time domain signal and pass it through the DFT to find its frequency spectrum. We could immediately pass this frequency spectrum through an Inverse DFT to reconstruct the original time domain signal, but the entire procedure wouldn't be very interesting. Instead, we will modify the frequency spectrum in some manner before using the Inverse DFT. For instance, selected frequencies might be deleted, changed in amplitude or phase, shifted around, etc. These are the kinds of things routinely done in DSP. Unfortunately, these changes in the frequency domain can create a time domain signal that is too long to fit into a single period. This forces the signal to spill over from one period into the adjacent periods. When the time domain is viewed as *circular*, portions of the signal that overflow on the right suddenly seem to reappear on the left side of the signal, and vice versa. That is, the overflowing portions of the signal *alias* themselves to a new location in the time domain. If this new location happens to already contain an existing signal, the whole mess adds, resulting in a loss of information. Circular convolution resulting from frequency domain multiplication (discussed in Chapter 9), is an excellent example of this type of aliasing.

Наиболее серьезное последствие периодичности домена времени - **наложение спектров домена времени**. Чтобы иллюстрировать это, предположите, что мы берем сигнал домена времени и передаем это через ДПФ, чтобы найти его спектр частот. Мы могли немедленно передавать этот спектр частот через Обратный ДПФ, чтобы восстановить первоначальный сигнал домена времени, но полная процедура не будет очень интересна. Вместо этого, мы изменим спектр частот некоторым способом перед использованием Обратного ДПФ. Например, отобранные частоты могли бы быть удалены, изменены в амплитуде или фазе, сдвинуты вокруг, и т.д. Они - виды вещей, обычно сделанных в ЦОС. К сожалению, эти изменения в частотном домене могут создавать сигнал домена времени, который слишком длинный, чтобы вписаться в единственный период. Это вынуждает сигнал проливать с одного периода в смежные периоды. Когда домен времени просмотрен как *круговой*(циклический), части сигнала, что переполнение справа внезапно(скачкообразно), кажется, вновь появляется слева от сигнала, и наоборот. То есть переполняющиеся части *псевдонима* сигнала самостоятельно к новому расположению в домене времени. Если это новое расположение, случается, уже содержит существующий сигнал, целый беспорядок добавляется, приводя к потере информации. Круговое(циклическое) скручивание(свертка), следующее из умножения частотных доменов (обсужденный в главе 9), является превосходным примером этого типа наложения спектров(псевдонима).

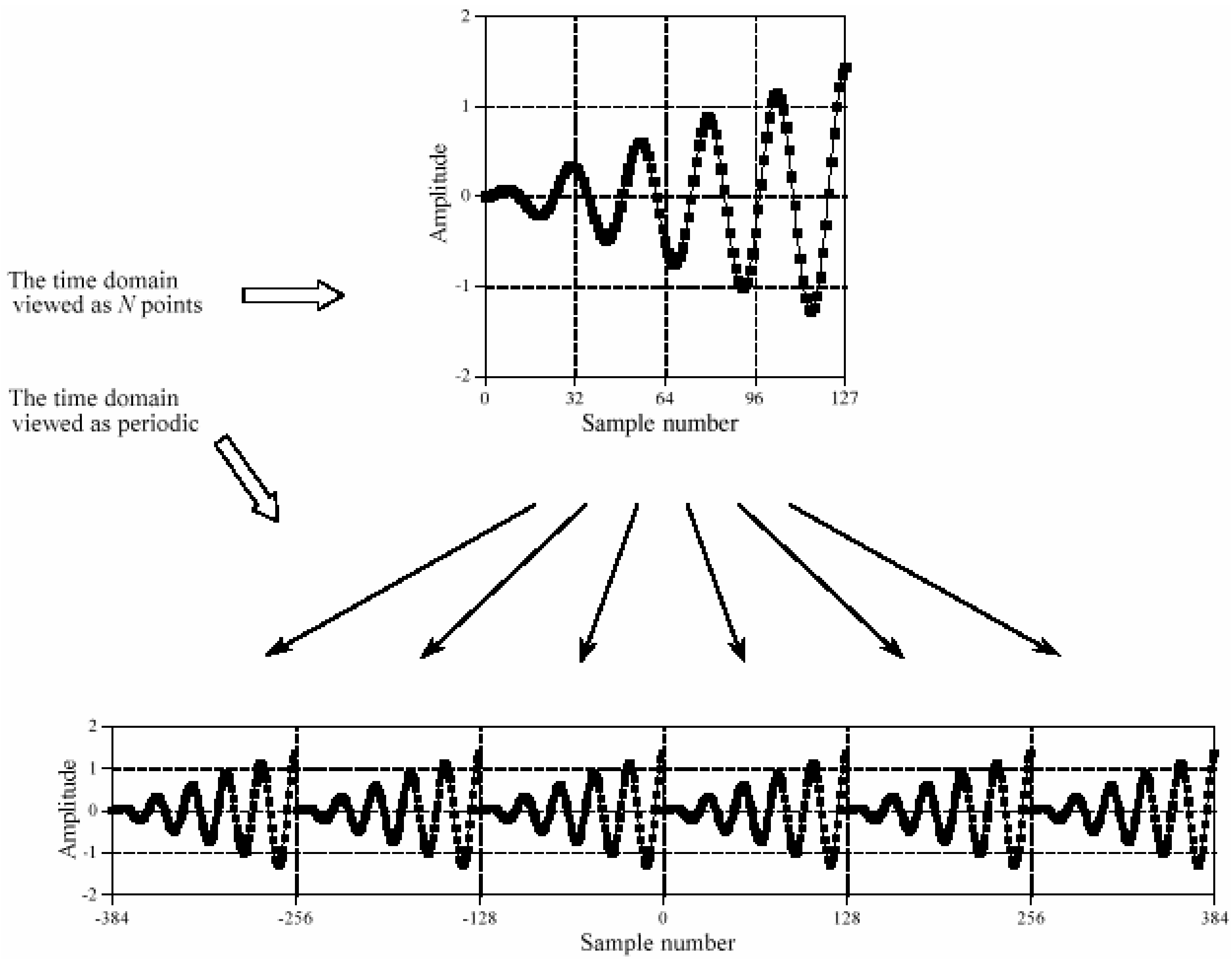

FIGURE 10-8
Periodicity of the DFT's time domain signal. The time domain can be viewed as *N* samples in length, shown in the upper figure, or as an infinitely long periodic signal, shown in the lower figure. The time domain viewed as *N* points The time domain viewed as periodic

РИСУНОК 10-8. Периодичность сигнала домена времени ДПФ.
Домен времени может быть просмотрен как *N* выборок в длине, показан в верхнем рисунке, или как бесконечно длинный периодический сигнал, показан в более низком рисунке. Домен времени, просмотренный как *N* точек домена времени, просмотрен как периодический

Periodicity in the frequency domain behaves in much the same way, but is more complicated. Figure 10-9 shows an example. The upper figures show the magnitude and phase of the frequency spectrum, viewed as being composed of $N/2 + 1$ samples spread between 0 and 0.5 of the sampling rate. This is the simplest way of viewing the frequency spectrum, but it doesn't explain many of the DFT's properties.

Периодичность в частотном домене ведет себя аналогичным способом, но больше усложнена. Рисунок 10-9 показывает пример. Верхние рисунки показывают величину и фазу спектра частот, просмотренного как составились из $N/2 + 1$ выборок распространенных между 0 и 0.5 из частоты выборки. Это - самый простой путь просмотра спектра частот, но это не объясняет многие из свойств ДПФ.

The lower two figures show how the DFT views this frequency spectrum as being periodic. The key feature is that the frequency spectrum between 0 and 0.5 appears to have a *mirror image* of frequencies that run between 0 and -0.5. This mirror image of **negative frequencies** is slightly different for the magnitude and the phase signals. In the magnitude, the signal is flipped left-for-right. In the phase, the signal is flipped left-for-right, *and* changed in sign. As you recall, these two types of symmetry are given names: the magnitude is said to be an **even** signal (it has *even* symmetry), while the phase is said to be an **odd** signal (it has *odd* symmetry). If the frequency spectrum is converted into the real and imaginary parts, the *real part* will always be *even*, while the *imaginary part* will always be *odd*.

Более низкий два рисунка показывают, как ДПФ рассматривает этот спектр частот как быть периодическим. Главная особенность - то, что спектр частот между 0 и 0.5, кажется, имеет *зеркальное изображение* частот, которые работают между 0 и -0.5. Это зеркальное изображение **отрицательных частот** слегка отлично для величины и фазы сигналов. В величине, сигнал зеркально отражен слева - направо. В фазе, сигнал зеркально отражен, слева - направо, *и* изменился в знаке. Как Вы помните, этим двум типам симметрии дают названия: величина, как считают, **четный** сигнал (это имеет *четную* симметрию), в то время как фаза, как считают, **нечетный** сигнал (это имеет *нечетную* симметрию). Если спектр частот преобразован в реальные(вещественные) и мнимые(несобственные) части, вещественная часть будет всегда четная, в то время как *мнимая(несобственная) часть* будет всегда *нечетна*.

Taking these negative frequencies into account, the DFT views the frequency domain as periodic, with a period of 1.0 times the sampling rate, such as -0.5 to 0.5, or 0 to 1.0. In terms of sample numbers, this makes the length of the frequency domain period equal to N, the same as in the time domain.

Беря эти отрицательные частоты во внимание, ДПФ рассматривает частотный домен как периодический, с периодом 1.0 раз частота выборки, типа от -0.5 до 0.5, или от 0 до 1.0. В терминах номеров выборок, это делает длину из частотного домена, периодом равным N, тому же самому как в домене времени.

The periodicity of the frequency domain makes it susceptible to **frequency domain aliasing**, completely analogous to the previously described time domain aliasing. Imagine a time domain signal that corresponds to some frequency spectrum. If the time domain signal is modified, it is obvious that the frequency spectrum will also be changed. If the modified frequency spectrum cannot fit in the space provided, it will push into the adjacent periods. Just as before, this aliasing causes two problems: frequencies aren't where they should be, and overlapping frequencies from different periods add, destroying information.

Периодичность частотного домена делает это восприимчивым к **наложению спектров(псевдониму) частотного домена**, полностью аналогичному предварительно описанному наложению спектров(псевдонима) домена времени. Вообразите сигнал домена времени, который соответствует некоторому спектру частот. Если сигнал домена времени изменяется, очевидно, что спектр частот будет также изменен. Если изменяемый спектр частот не может соответствовать в пространстве(пробеле) если, это поместит в смежные периоды. Также, как прежде, это наложение спектров вызывает две проблемы: частоты не то, где они должны быть, и накладывающиеся частоты с различных периодов добавляются, уничтожая информацию.

Frequency domain aliasing is more difficult to understand than time domain aliasing, since the periodic pattern is more complicated in the frequency domain. Consider a single frequency that is being forced to move from 0.01 to 0.49 in the frequency domain. The corresponding negative frequency is therefore moving from -0.01 to -0.49. When the positive frequency moves across the 0.5 barrier, the negative frequency is pushed across the -0.5 barrier. Since the frequency domain is periodic, these same events are occurring in the other periods, such as between 0.5 and 1.5. A clone of the positive frequency is crossing frequency 1.5 from left to right, while a clone of the negative frequency is crossing 0.5 from right to left. Now imagine what this looks like if you can only see the frequency band of 0 to 0.5. It appears that a frequency leaving to the *right*, reappears on the *right*, but moving in the opposite direction.

Наложение спектров(псевдоним) частотного домена более трудно понять чем наложение спектров(псевдоним) домена времени, так как периодический образец больше усложнен в частотном домене. Рассмотрите единственную частоту, которая вынуждается двигаться от 0.01 до 0.49 в частотном домене. Соответствующая отрицательная частота, поэтому перемещается от -0.01 до -0.49. Когда положительные частота перемещается поперек барьера(границы) 0.5, отрицательная частота помещена поперек барьера(границы) -0.5. Так как частотный домен периодический, они, те же самые события встречаются в других периодах, типа между 0.5 и 1.5. Аналог положительной частоты пересекает частоту, 1.5 слева направо, в то время как аналог отрицательной частоты пересекается 0.5 справа налево. Теперь вообразите то, что это напоминает, если Вы можете только видеть полосу частот от 0 до 0.5. Кажется, что частота, уезжающая направо, вновь появляется справа, но перемещается в противоположном направлении.

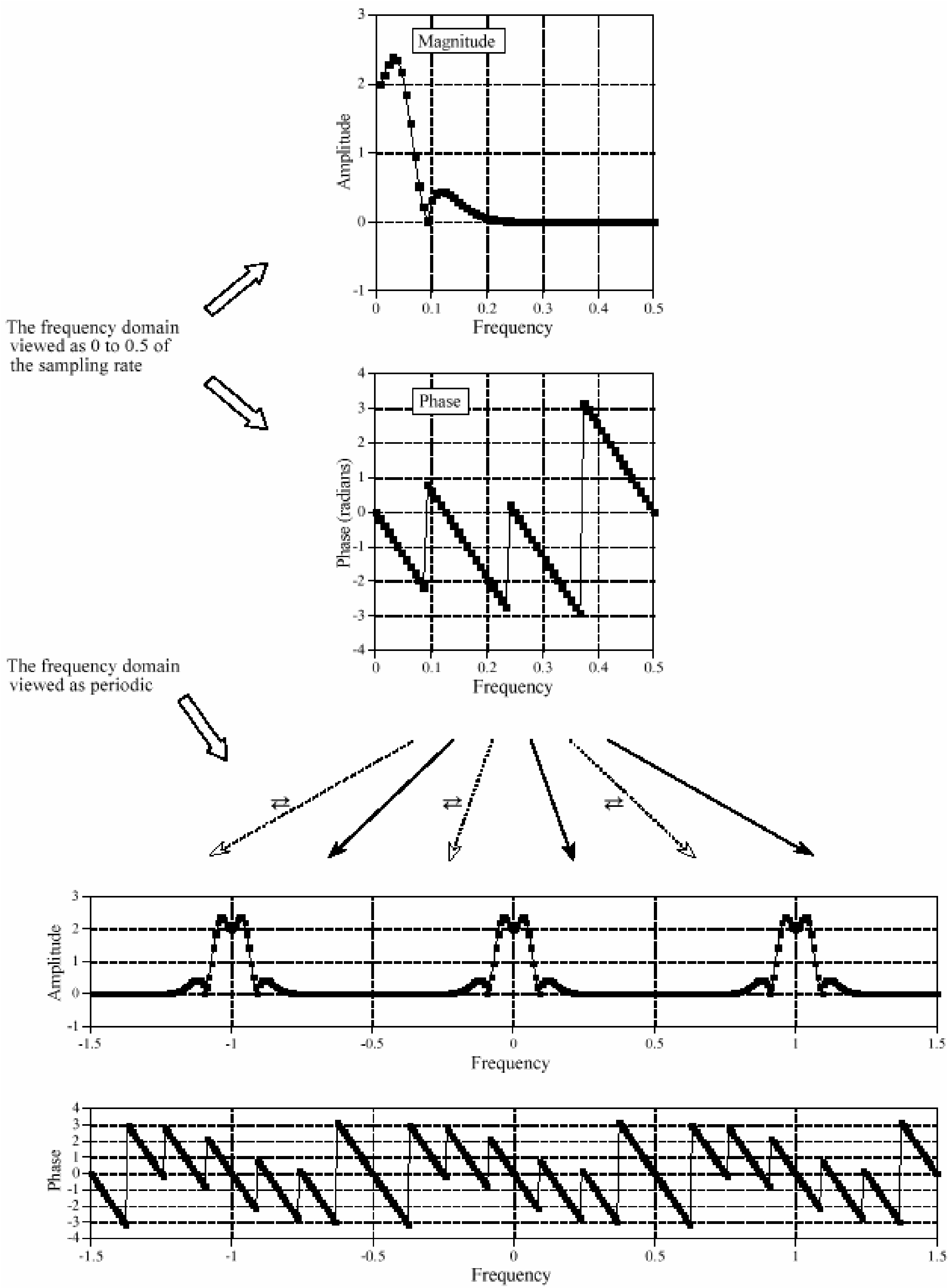

FIGURE 10-9
Periodicity of the DFT's frequency domain. The frequency domain can be viewed as running from 0 to 0.5 of the sampling rate (upper two figures), or an infinity long periodic signal with every other 0 to 0.5 segment flipped left-for-right (lower two figures).

РИСУНОК 10-9. Периодичность частотного домена ДПФ.

Частотный домен может быть просмотрен как выполнение от 0 до 0.5 из частоты выборки (верхние два рисунка), или бесконечно длинный периодический сигнал с каждым другим от 0 до 0.5 зеркально отраженных сегментов слева - направо (нижние два рисунка).

Figure 10-10 illustrates how aliasing appears in the time and frequency domains when only a single period is viewed. As shown in (a), if one end of a time domain signal is too long to fit inside a single period, the protruding end will be *cut off* and *pasted* onto the other side. In comparison, (b) shows that when a frequency domain signal overflows the period, the protruding end is *folded over*. Regardless of where the aliased segment ends up, it adds to whatever signal is already there, destroying information.

Рисунок 10-10 иллюстрирует, как наложение спектров(псевдоним) появляется в доменах времени и частоты, когда только единственный(отдельный) период просмотрен. Как показано в (a), если один конец сигнала домена времени слишком долго, чтобы соответствовать внутри единственного(отдельного) периода, выдающийся конец будет *отрезан* и *вставлен* на другую сторону. На сравнении, (b) показывает, что, когда сигнал частотного домена переполняет период, выдающийся конец *свернут*. Независимо от того, где смешанный сегмент заканчивается, это добавляется к любому сигналу - уже там, уничтожая информацию.

Let's take a closer look at these strange things called *negative frequencies*. Are they just some bizarre artifact of the mathematics, or do they have a real world meaning? Figure 10-11 shows what they are about. Figure (a) is a discrete signal composed of 32 samples. Imagine that you are given the task of finding the frequency spectrum that corresponds to these 32 points. To make your job easier, you are told that these points represent a discrete cosine wave. In other words, you must find the frequency and phase shift (f and θ) such that $x[n] = \cos(2 \pi nf / N + \theta)$ matches the given samples. It isn't long before you come up with the solution shown in (b), that is $f = 3$ and $\theta = -\pi/4$.

Давайте посмотрим ближе на эти странные вещи, называемые *отрицательными частотами*. Являются ли они только некоторым причудливым экспонатом математики, или они имеют реальное мировое значение? Рисунок 10-11 показывает, что они - относительны. Рисунок (a) - дискретный сигнал, составленный из 32 выборок. Вообразите, что Вам дают задачу обнаружения спектра частот, который соответствует этим 32 точкам. Чтобы сделать ваше задание проще, Вам говорят, что эти точки представляют дискретную волну косинуса. Другими словами, Вы должны найти частоту и сдвиг фаз (f и π) такой, что $x[n] = \cos(2\pi nf / N + \theta)$ соответствует данным выборкам. Это не, намного раньше Вы придумываете решение, показанное в (b), который является $f = 3$ и $\pi = - \pi /4$.

If you stopped your analysis at this point, you only get 1/3 credit for the problem. This is because there are two other solutions that you have missed. As shown in (c), the second solution is $f = -3$ and $\pi = \pi/4$. Even if the idea of a *negative frequency* offends your sensibilities, it doesn't change the fact that it is a mathematically valid solution to the defined problem. Every *positive* frequency sinusoid can alternately be expressed as a *negative* frequency sinusoid. This applies to continuous as well as discrete signals

Если Вы остановили ваш анализ в этой точке, Вы только получаете 1/3 кредита(доверия) для проблемы. Это - то, потому что имеется два других решения, которые у Вас отсутствуют. Как показано в (c), второе решение является $f = -3$ и $\pi = \pi/4$. Даже, если идея относительно *отрицательной частоты* оскорбляет ваше здравомыслие, это не изменяет факт, что это является математически справедливым решением определенной проблемы. Каждая *положительная* частотная синусоида может поочередно быть выражена как *отрицательная* частотная синусоида. Это относится как к непрерывным так и к дискретным сигналам.

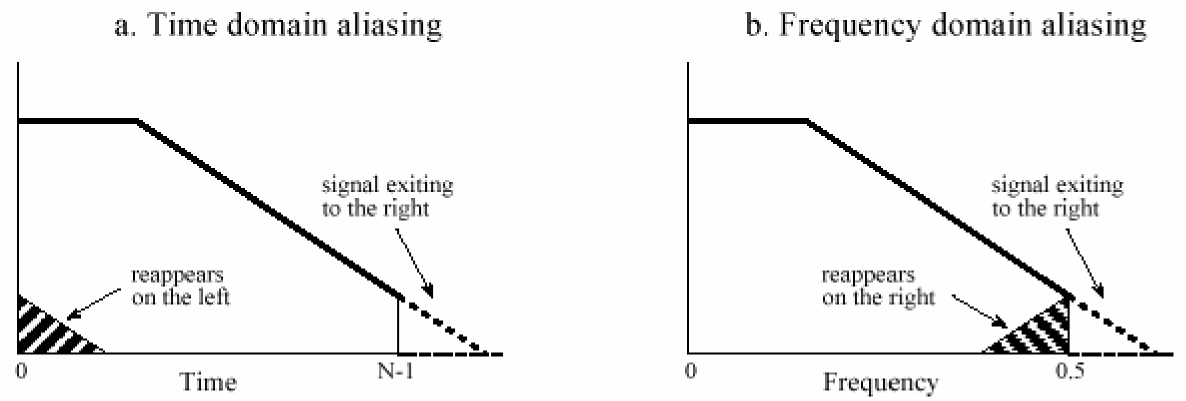

FIGURE 10-10
Examples of aliasing in the time and frequency domains, when only a single period is considered. In the time domain, shown in (a), portions of the signal that exits to the right, reappear on the left. In the frequency domain, (b), portions of the signal that exit to the right, reappear on the right as if they had been folded over.

РИСУНОК 10-10. Примеры наложения спектров(псевдонима) во доменах времени и частоты, когда только единственный(отдельный) период рассматривается.
В домене времени, показанном в (a), части сигнала, что выходят направо, вновь появляются слева. В домене частоты, (b), части сигнала, что выходят направо, вновь появляются справа, как будто они были свернуты.

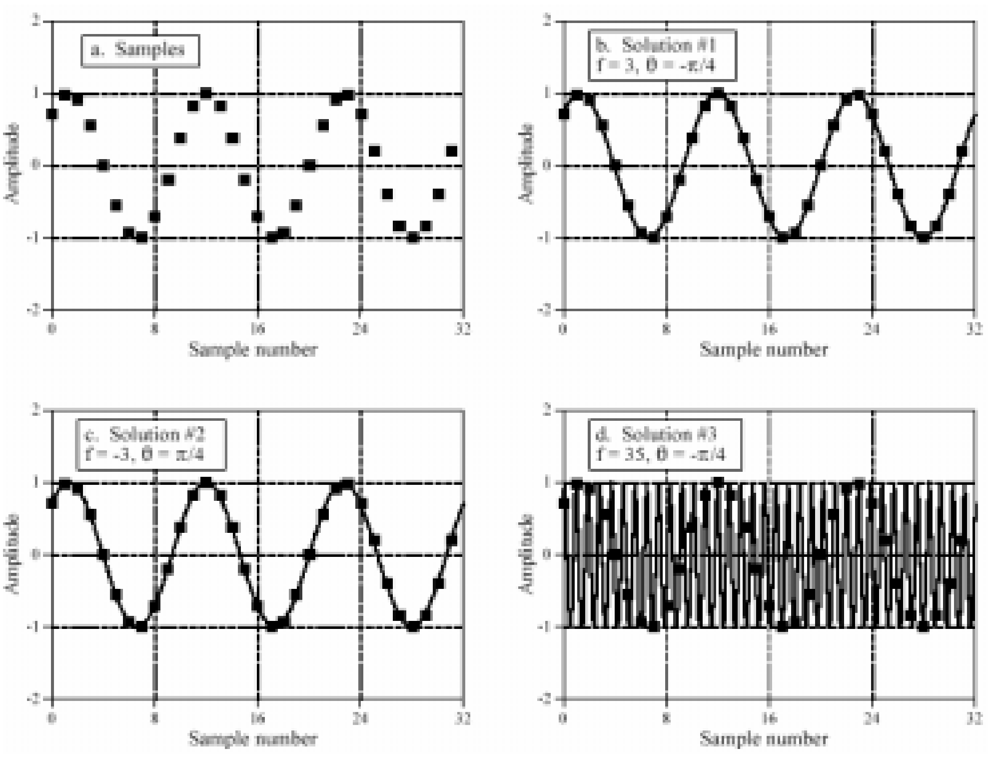

FIGURE 10-11
The meaning of negative frequencies. The problem is to find the frequency spectrum of the discrete signal shown in (a). That is, we want to find the frequency and phase of the sinusoid that passed through all of the samples. Figure (b) is a solution using a *positive* frequency, while (c) is a solution using a *negative* frequency. Figure (d) represents a family of solutions to the problem.

РИСУНОК 10-11. Значение отрицательных частот.

Проблема состоит в том, чтобы найти спектр частот дискретного сигнала, показанного в (a). То есть мы хотим найти частоту и фазу синусоиды, которая прошла через все выборки. Рисунок (b) - решение, используя положительную частоту, в то время как (c) - решение, используя отрицательную частоту. Рисунок (d) представляет семейство решений проблемы.

The third solution is not a single answer, but an infinite family of solutions. As shown in (d), the sinusoid with $f = 35$ and $\pi = \pi/4$ passes through all of the discrete points, and is therefore a correct solution. The fact that it shows oscillation between the samples may be confusing, but it doesn't disqualify it from being an authentic answer. Likewise, $f = \pm 29$, $f = \pm 35$, $f = \pm 61$ and $f = \pm 67$ are all solutions with multiple oscillations between the points.

Третье решение – ответ, ни один сигнал, но бесконечное семейство решений. Как показано в (*d*), синусоида с $f = 35$ и $\pi = \pi/4$ проходит через все дискретные точки, и - поэтому правильное решение. Факт, что это показывает колебание между выборками, может быть запутывающий, но это не дисквалифицирует это от являющегося подлинным ответа. Аналогично, $f = \pm 29$, $f = \pm 35$, $f = \pm 61$ and $f = \pm 67$ - все решения с множественными колебаниями между точками.

Each of these three solutions corresponds to a different section of the frequency spectrum. For discrete signals, the first solution corresponds to frequencies between 0 and 0.5 of the sampling rate. The second solution results in frequencies between 0 and -0.5. Lastly, the third solution makes up the infinite number of duplicated frequencies below -0.5 and above 0.5. If the signal we are analyzing is continuous, the first solution results in frequencies from zero to positive infinity, while the second solution results in frequencies from zero to negative infinity. The third group of solutions does not exist for continuous signals.

Каждое из этих трех решений соответствует различному разделу спектра частот. Для дискретных сигналов, первое решение соответствует частотам между 0 и 0.5 из частоты выборки. Второе решение приводит к частотам между 0 и -0.5. Наконец, третье решение составляет бесконечное число дублированных частот ниже -0.5 и более чем 0.5. Если сигнал, который мы анализируем, непрерывен, первое решение приводит к частотам от нуля до положительной бесконечности, в то время как второе решение приводит к частотам от нуля до отрицательной бесконечности. Третья группа решений не существует для непрерывных сигналов.

Many DSP techniques do not require the use of negative frequencies, or an understanding of the DFT's periodicity. For example, two common ones were described in the last chapter, *spectral analysis*, and the *frequency response* of systems. For these applications, it is completely sufficient to view the time domain as extending from sample 0 to N-1, and the frequency domain from zero to one-half of the sampling frequency. These techniques can use a simpler view of the world because they never result in portions of one period moving into another period. In these cases, looking at a single period is just as good as looking at the entire periodic signal.

Много методов ЦОС не требуют использования отрицательных частот, или понимания периодичности ДПФ. Например, два общих(обычных) были описаны в прошлой главе, *спектральном анализе*, и *частотной характеристике систем*. Для этих приложений, полностью достаточно рассмотреть домен времени как распространение(продление) от выборки 0 к N-1, и частотному домену от нуля до половины выборочной частоты. Эти методы могут использовать более простое представление мира, потому что они никогда не приводят к частям одного периода, перемещающегося в другой период. В этих случаях, взгляд на единственный период столь же хорош как взгляд на полный периодический сигнал.

However, certain procedures can *only* be analyzed by considering how signals overflow between periods. Two examples of this have already been presented, *circular convolution* and *analog-to-digital conversion*. In circular convolution, multiplication of the frequency spectra results in the time domain signals being convolved. If the resulting time domain signal is too long to fit inside a single period, it overflows into the adjacent periods, resulting in *time domain aliasing*. In contrast, analog-to-digital conversion is an example of *frequency domain aliasing*. A nonlinear action is taken in the time domain, that is, changing a continuous signal into a discrete signal by sampling. The problem is, the spectrum of the original analog signal may be too long to fit inside the discrete signal's spectrum. When we force the situation, the ends of the spectrum protrude into adjacent periods. Let's look at two more examples where the periodic nature of the DFT is important, *compression and expansion* of signals, and *amplitude modulation*.

Однако, некоторые процедуры могут быть *только* проанализированы, рассматривая, как сигналы выходят за пределы между периодами. Два примера этого уже были представлены, *круговое(циклическое) скручивание* и *аналого-цифровое преобразование*. В круговом(циклическом) скручивании, умножение частотных спектров приводит к скрученным сигналам домена времени. Если заканчивающийся сигнал домена времени слишком долог, чтобы соответствовать внутри единственного(отдельного) периода, это выходит за пределы в смежные периоды, приводя к *наложению спектров(псевдониму) домена времени*. Для контраста, аналого-цифровое преобразование – пример *наложения спектров частотного домена*. Нелинейное действие принято(получено) в домене времени, то есть, изменяя непрерывный сигнал в дискретный сигнал, производя выборки(дискретизацию). Проблема, спектр первоначального аналогового сигнала может быть слишком долог, чтобы соответствовать внутри спектра дискретного сигнала. Когда мы вынуждаем (эту) ситуацию, концы спектра высовываются в смежные периоды. Давайте посмотрим еще на два примера, где периодический характер ДПФ важен, *сжатие и расширение(растягивание)* сигналов, и *амплитудная модуляция*.

Compression and Expansion, Multirate methods
Сжатие и Расширение(растягивание), методы Мультичастоты

As shown in Fig. 10-12, a *compression* of the signal in one domain results in an *expansio*n in the other, and vice versa. For continuous signals, if $X(f)$ is the Fourier Transform of $x(t)$, then $1/k$ x $X(f / k)$ is the Fourier Transform of , $x(k\,t)$ where k is the parameter controlling the expansion or contraction. If an event happens *faster* (it is compressed in time), it must be composed of *higher* frequencies. If an event happens *slower* (it is expanded in time), it must be composed of *lower* frequencies. This pattern holds if taken to either of the two extremes. That is, if the time domain signal is compressed so far that it becomes an *impulse*, the corresponding frequency spectrum is expanded so far that it becomes a *constant value*. Likewise, if the time domain is expanded until it becomes a constant value, the frequency domain becomes an impulse.

Как показано в рис. 10-12, сжатие сигнала в одном домене приводит к расширению(растягиванию) в другой, и наоборот. Для непрерывных сигналов, если $X(f)$ - преобразование Фурье(трансформанта Фурье) $x(t)$, то $1/k$ x $X(f/k)$ - Преобразование Фурье(трансформанта Фурье), $x(kt)$ где, k - параметр, управляющий расширением(разложением) или сжатием(сокращением). Если событие случается *быстрее* (это сжато во времени), это должно быть составлено из более высоких частот. Если событие случается *медленнее* (это расширено(растянуто) во времени), это должно быть составлено из более низких частот. Этот образец проводит если взято в любые из этих двух крайностей. То есть если сигнал домена времени сжат пока, что это становится *импульсом*, соответствующий спектр частот расширен пока, что это становится *постоянным значением*. Аналогично, если домен времени расширен(растянут), пока это не становится *постоянным значением*, частотный домен становится *импульсом*.

Discrete signals behave in a similar fashion, but there are a few more details. The first issue with discrete signals is *aliasing*. Imagine that the time domain. Imagine that the frequency spectrum in (f) is compressed much harder, resulting in the time domain signal in (e) expanding into neighboring periods.

Дискретные сигналы ведут себя подобным способом, но имеются еще несколько подробностей. Первая проблема с дискретными сигналами - *наложение спектров(псевдоним)*. Вообразите что домен время. Вообразите, что спектр частот в (f) сжат намного жестче, приводя к сигналу домена времени в (е), расширяющемся в соседние периоды.

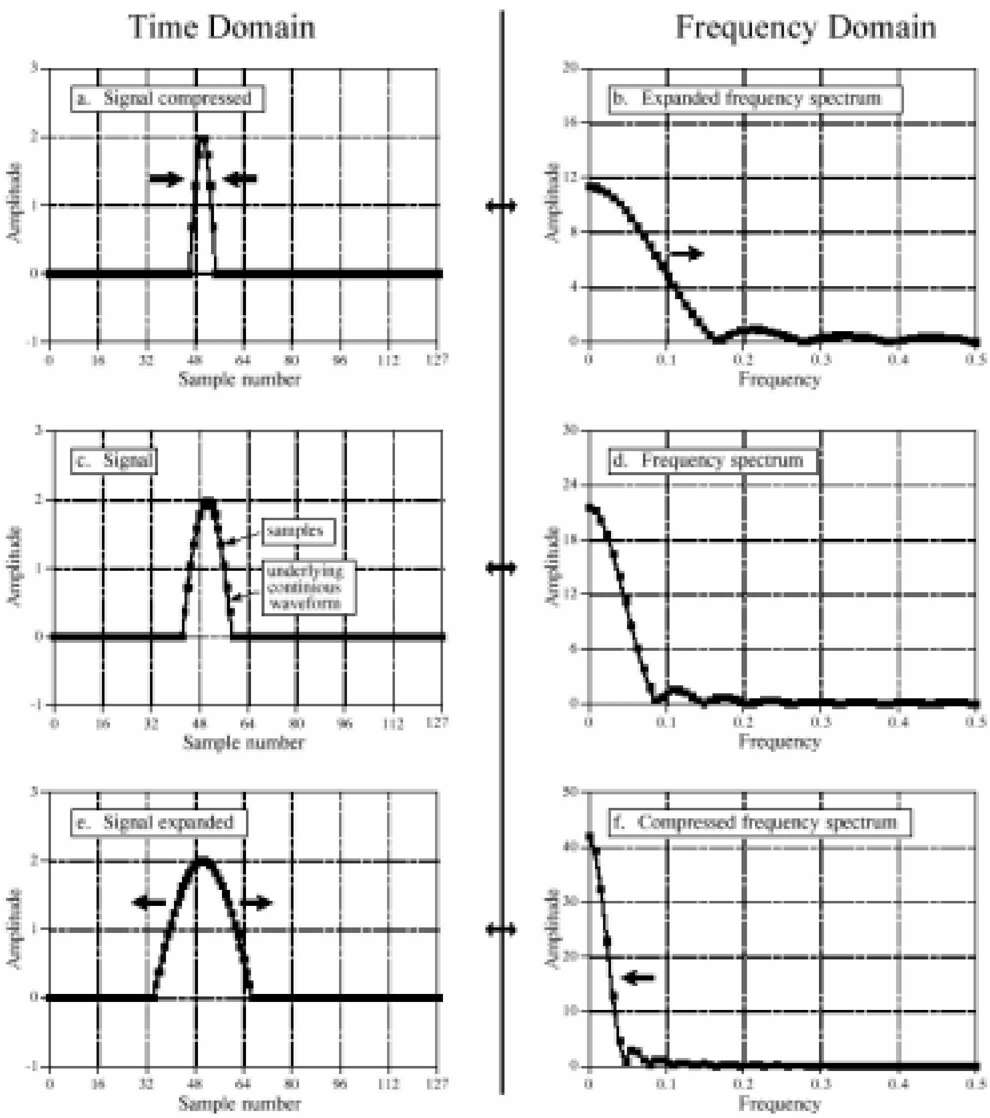

FIGURE 10-12
Compression and expansion. Compressing a signal in one domain results in the signal being expanded in the other domain, and vice versa. Figures (c) and (d) show a discrete signal and its spectrum, respectively. In (a) and (b), the time domain signal has been compressed, resulting in the frequency spectrum being expanded. Figures (e) and (f) show the opposite process. As shown in these figures, discrete signals are expanded or contracted by expanding or contracting the underlying continuous waveform. This underlying waveform is then resampled to find the new discrete signal.
РИСУНОК 10-12. Сжатие и расширение(растяжение).

Сжатие сигнала в одном домене приводит к сигналу, расширяемому в другом домене, и наоборот. Рисунки (c) и (d) показывают дискретный сигнал и его спектр, соответственно. В (a) и (b), сигнал домена времени был сжат, приводя к расширяемому спектру частот. Рисунки (e) и (f) показывают противоположный процесс. Как показано в этих рисунках, дискретные сигналы расширены или законтрактованы, разворачивая или заключая основную непрерывную форму волны. Эта основная форма волны тогда повторно производят выборку, чтобы найти новый дискретный сигнал.

A second issue is to define exactly what it means to compress or expand a discrete signal. As shown in Fig. 10-12a, a discrete signal is compressed by compressing the underlying *continuous* curve that the samples lie on, and then resampling the new continuous curve to find the new discrete signal. Likewise, this same process for the expansion of discrete signals is shown in (e). When a discrete signal is compressed, events in the signal (such as the width of the pulse) happen over a *fewer* number of samples. Likewise, events in an expanded signal happen over a *greater* number of samples.

Вторая проблема должна определить точно, что это означает сжимать или разворачивать дискретный сигнал. Как показано в рис. 10-12a, дискретный сигнал сжат, сжимая основную *непрерывную* кривую, что выборки лежат на, и затем перевыбирается новая непрерывная кривая, чтобы найти новый дискретный сигнал. Аналогично, этому тот же самый процесс для разворачивания дискретных сигналов показывают в (e). Когда дискретный сигнал сжат, события в сигнале (типа ширины импульса) случаются излишне *малым* числом выборок. Аналогично, события в расширенном сигнале случаются излишне *большим* числом выборок.

An equivalent way of looking at this procedure is to keep the underlying continuous waveform the same, but resample it at a different sampling rate. For instance, look at Fig. 10-13a, a discrete Gaussian waveform composed of 50 samples. In (b), the same underlying curve is represented by 400 samples. The change between (a) and (b) can be viewed in two ways: (1) the sampling rate has been kept constant, but the underlying waveform has been expanded to be eight times wider, or (2) the underlying waveform has been kept constant, but the sampling rate has increased by a factor of eight. Methods for changing the sampling rate in this way are called **multirate** techniques. If more samples are added, it is called **interpolation**. If fewer samples are used to represent the signal, it is called **decimation**. Chapter 3 describes how multirate techniques are used in ADC and DAC.

Эквивалентный путь взгляда на эту процедуру состоит в том, чтобы сохранить основную непрерывную форму волны той же самой, но повторно производить выборку этого в различной частоте выборки. Например, смотрите на рис. 10-13a, дискретную форму Гауссовой волны, составленную из 50 выборок. В (b), та же самая основная кривая представлена 400 выборками. Изменение между (a) и (b) может быть просмотрено двумя способами: (1) частота выборки сохранилась постоянной, но основная форма волны была расширена, чтобы быть восьмью разами, более широкими, или (2), основная форма волны сохранилась постоянной, но частота выборки увеличилась на коэффициент(фактор) восемь. Методы для изменения частоты выборки таким образом называются методами **мультичастоты**. Если большее количество выборок добавлено, это называется **интерполяцией**. Если меньшее количество выборок используется, чтобы представить сигнал, это называется **прореживанием**. Глава 3 описывает, как методы мультичастоты используются в АЦП и ЦАП.

Here is the problem: if we are given an arbitrary discrete signal, how do we know what the underlying continuous curve is? It depends on if the signal's information is encoded in the *time domain* or in the *frequency domain*. For time domain encoded signals, we want the underlying continuous waveform to be a smooth curve that passes through all the samples. In the simplest case, we might draw straight lines between the points and then round the rough corners. The next level of sophistication is to use a curve fitting algorithm, such as a spline function or polynomial fit. There is not a single "correct" answer to this problem. This approach is based on minimizing irregularities in the *time domain* waveform, and completely ignores the frequency domain.

Имеется проблема: если нам дают произвольный дискретный сигнал, как мы знаем, какова основная непрерывная кривая? Это зависит от того, если информация сигнала закодирована в домене(области) времени или в частотном домене(области). Поскольку домен(область) времени кодировал сигналы, мы хотим, чтобы основная непрерывная форма волны была гладкой кривой, которая проходит через все выборки. В самом простом случае(регистре), мы могли бы выводить прямые линии между пунктами(точками) и затем вокруг грубых углов. Следующий уровень сложности(искушенности,изощренности) должен использовать алгоритм вычерчивания кривой, типа сплайнового функционального или полиномиального пригодного. Имеется ни один "правильный" ответ на эту проблему. Этот подход основан на уменьшении неисправностей в форме волны домена(области) времени, и полностью игнорирует частотный домен(область).

When a signal has information encoded in the frequency domain, we ignore the time domain waveform and concentrate on the frequency spectrum. As discussed in the last chapter, a finer sampling of a frequency spectrum (more samples between frequency 0 and 0.5) can be obtained by padding the time domain signal with zeros before taking the DFT. Duality allows this to work in the opposite direction. If we want a finer sampling in the time domain (interpolation), pad the frequency spectrum with zeros before taking the Inverse DFT. Say we want to interpolate a 50 sample signal into a 400 sample signal. It's done like this: (1) Take the 50 samples and add zeros to make the signal 64 samples long. (2) Use a 64 point DFT to find the frequency spectrum, which will consist of a 33 point real part and a 33 point imaginary part. (3) Pad the right side of the frequency spectrum (both the real and imaginary parts) with 224 zeros to make the frequency spectrum 257 points long. (4) Use a 512 point Inverse DFT to transform the data back into the time domain. This will result in a 512 sample signal that is a high resolution version of the 64 sample signal. The first 400 samples of this signal are an interpolated version of the original 50 samples.

Когда сигнал кодирует информацию в частотном домене, мы игнорируем форму волны домена времени и концентрируемся на спектре частот. Как обсуждено в прошлой главе, более тонкое(высококачественное) осуществление выборки из спектра частот (большее количество выборок между частотой 0 и 0.5) может быть получено, дополняя сигнал домена времени нулями, перед взятием(снятием) ДПФ. Дуальность позволяет этому работать в противоположном направлении. Если мы хотим получить более тонкое(детальное) осуществление выборки в домене времени (интерполирование), перед взятием Обратного ДПФ, дополняем частотный спектр нулями. Скажем, что мы хотим интерполировать 50 выборок сигнала в 400 выборок сигнала. Это сделано подобно этому: (1) Берут 50 выборок и добавляют нули, чтобы сделать сигнал длительностью 64 выборки. (2) Используют ДПФ 64 точек, чтобы найти спектр частот, который будет состоять из 33 точек реальной(вещественной) части и 33 точек комплексной(мнимой) части. (3) Дополняют правую сторону спектра частот (и реальные и мнимые части) 224 нулями, чтобы сделать частоту спектра длительностью 257 точек. (4) Используют 512 точек Инверсного ДПФ, чтобы преобразовать данные назад в домен времени. Это приведет к 512 выборкам сигнала, который является версией с высоким разрешением(степенью детализации) из 64 выборок сигнала. Первые 400 выборок из этого сигнала - интерполированная версия оригинальных 50 выборок.

The key feature of this technique is that the interpolated signal is composed of *exactly* the same frequencies as the original signal. This may or may not provide a well-behaved fit in the time domain. For example, Figs. 10-13 (a) and (b) show a 50 sample signal being interpolated into a 400 sample signal by this method. The interpolation is a smooth fit between the original points, much as if a curve fitting routine had been used. In comparison, (c) and (d) show another example where the time domain is a mess! The oscillatory behavior shown in (d) arises at edges or other discontinuities in the signal. This also includes any discontinuity between sample zero and *N*-1, since the time domain is viewed as being circular. This overshoot at discontinuities is called the *Gibbs effect*, and is discussed in Chapter 11. Another frequency domain interpolation technique is presented in Chapter 3, adding zeros between the time domain samples and low-pass filtering.

Главная особенность этой методики - то, что интерполируемый сигнал составлен *точно* из той же самой частоты, что и первоначальный сигнал. Это может или не может обеспечивать хорошим пригодным(удобным для анализа) в домене времени. Например, рис. 10-13 (a) и (b) показано 50 выборок сигнала, интерполируемых в 400 выборок сигнала этим методом. Интерполяция есть сглаживание пригодное между первоначальными точками, много, как будто подпрограмма вычерчивания кривой использовалась. На сравнении, (c) и (d) показывают другой пример, где домен времени – беспорядок(путаница)! Колебательное поведение, показанное в (d) возникает в гранях(фронтах) или других нарушениях в сигнале. Это также включает любой разрыв между нулевой выборкой и *N* -1, так как домен времени рассмотрен как являющийся круговым(циклическим). Это последействие(выброс на фронте импульса; избыточный отклик на ступенчатое воздействие) в разрывах называется *эффектом Гиббса*, и обсужден в главе 11. Другая методика интерполяции частотного домена представлена в главе 3, (до)прибавляя нули между выборками домена времени и низкочастотную фильтрацию.

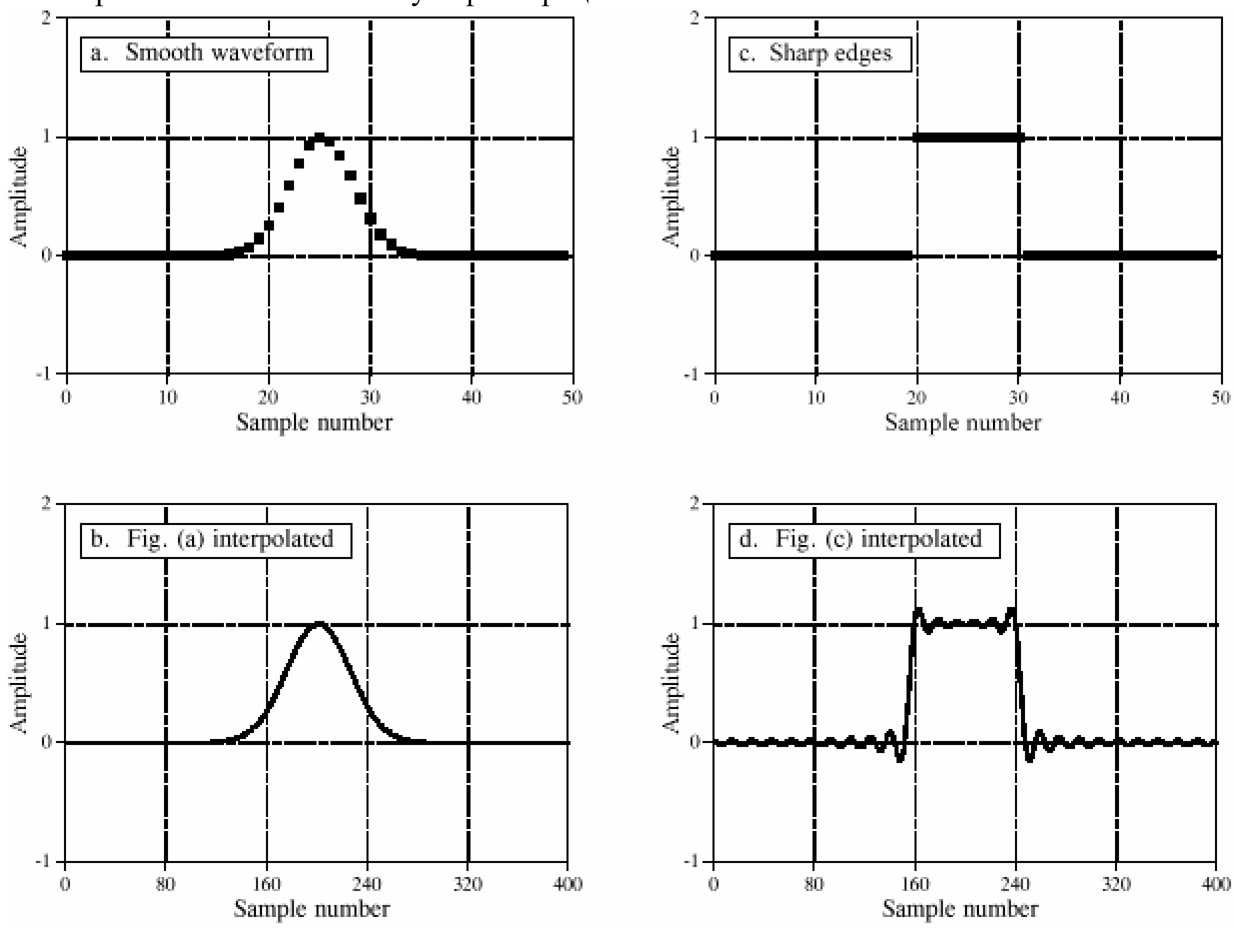

FIGURE 10-13

Interpolation by padding the frequency domain. Figures (a) and (c) each consist of 50 samples. These are interpolated to 400 samples by padding the frequency domain with zeros, resulting in (b) and (d), respectively. (Figures (b) and (d) are discrete signals, but are drawn as continuous lines because of the large number of samples).
РИСУНОК 10-13. Интерполирование, дополнением частотного домена.
Рисунки (a) и (c) каждый состоят из 50 выборок. Они интерполируются к 400 выборкам, дополняя частотный домен нулями, приводя к (b) и (d), соответственно. (Рисунки (b) и (d) - дискретные сигналы, но выведены как непрерывные линии из-за большого количества выборок).

Multiplying Signals (Amplitude Modulation)
Умножение Сигналов (Амплитудная Модуляция)

An important Fourier transform property is that *convolution* in one domain corresponds to *multiplication* in the other domain. One side of this was discussed in the last chapter: time domain signals can be convolved by multiplying their frequency spectra. Amplitude modulation is an example of the reverse situation, multiplication in the time domain corresponds to convolution in the frequency domain. In addition, amplitude modulation provides an excellent example of how the elusive *negative* frequencies enter into everyday science and engineering problems.

Важное свойство преобразования Фурье(трансформанты Фурье) - то скручивание в одном домене, соответствует умножению в другом домене. Одна сторона этого была обсуждена в прошлой главе: сигналы домена времени могут быть скручены, умножая их частотные спектры. Амплитудная модуляция - пример обратного положения(ситуации), умножение в домене времени соответствует скручиванию в частотном домене. Кроме того, амплитудная модуляция обеспечивает превосходный пример того, как неуловимые *отрицательные* частоты вступают(входят) в каждодневную науку и технические проблемы.

Audio signals are great for short distance communication; when you speak, someone across the room hears you. On the other hand, radio frequencies are very good at propagating long distances. For instance, if a 100 volt, 1 MHz sine wave is fed into an antenna, the resulting radio wave can be detected in the next *room*, the next *country*, and even on the next *planet*. **Modulation** is the process of merging two signals to form a third signal with desirable characteristics of both. This always involves nonlinear processes such as multiplication; you can't just add the two signals together. In radio communication, modulation results in radio signals that can propagate long distances *and* carry along audio or other information.

Звуковые сигналы великолепны для связи на короткие расстояния; когда Вы говорите, кто – на той стороне комнаты слышит Вас. С другой стороны, при передаче на длинные расстояния, очень хороши радиочастоты. Например, если синусоидальная волна 100 вольт, 1 МГц подается в антенну, заканчивающаяся радиоволна может быть обнаружена в ближайшей *комнате*, ближайшей *стране*, и даже на ближайшей *планете*. Модуляция - процесс объединения двух сигналов, чтобы сформировать третий сигнал с желательными характеристиками обоих. Это всегда включает в себя(подразумевает) нелинейные процессы типа умножения((усиления)мультиплицирования); Вы не можете только складывать два сигнала вместе. В радиосвязи, модуляция приводит к радиосигналам, которые могут распространяться на длинные расстояния *и* нести звуковую или другую информацию.

Radio communication is an extremely well developed discipline, and many modulation schemes have been developed. One of the simplest is called **amplitude modulation**. Figure 10-14 shows an example of how amplitude modulation appears in both the time and frequency domains. Continuous signals will be used in this example, since modulation is usually carried out in analog electronics. However, the whole procedure could be carried out in discrete form if needed (the shape of the future!).

Радиосвязь - чрезвычайно хорошо разработанная дисциплина, и много модуляционных схем было разработано. Одна из самых простых называется **амплитудной модуляцией**. Рисунок 10-14 показывает пример того, как амплитудная модуляция появляется, и в доменах времени и частотных доменах. В этом примере будут использоваться непрерывные сигналы, так как модуляция обычно выполняется в аналоговой электронике. Однако, целая процедура могла быть выполнена и в дискретной форме, если это необходимо (форма будущего!).

Figure (a) shows an audio signal with a DC bias such that the signal always has a positive value. Figure (b) shows that its frequency spectrum is composed of frequencies from 300 Hz to 3 kHz, the range needed for voice communication, plus a spike for the DC component. All other frequencies have been removed by analog filtering. Figures (c) and (d) show the **carrier wave**, a pure sinusoid of much higher frequency than the audio signal. In the time domain, amplitude modulation consists of *multiplying* the audio signal by the carrier wave. As shown in (e), this results in an oscillatory waveform that has an instantaneous amplitude proportional to the original audio signal. In the jargon of the field, the *envelope* of the carrier wave is equal to the modulating signal. This signal can be routed to an antenna, converted into a radio wave, and then detected by a receiving antenna. This results in a signal identical to (e) being generated in the radio receiver's electronics. A *detector* or *demodulator* circuit is then used to convert the waveform in (e) back into the waveform in (a).

Рисунок (a) показывает, что звуковой сигнал (начиная) с постоянного тока, смещает так, что этот сигнал всегда имеет положительное значение. Рисунок (b) показывает, что его спектр частот составлен из частот от 300 Гц до 3 кГц, диапазон, необходимый для речевой связи, плюс выброс для компонента постоянного тока. Все другие частоты были удалены аналоговой фильтрацией. Рисунки (c) и (d) показывают **несущую волну**, чистой синусоиды намного более высокой частоты, чем звуковой сигнал. В домене времени, амплитудная модуляция состоит из звукового сигнала *мультиплицированного*(*умноженного)* несущей волной. Как показано в (e), это кончается колебательной формой волны, которая имеет мгновенную амплитуд пропорциональную первоначальному звуковому сигналу. В жаргоне поля, *огибающая* несущей волны равна сигналу модуляции. Этот сигнал может быть направлен в антенну, преобразован в радиоволну, и затем обнаружен антенной получателя. Это приводит к сигналу, идентичному (e), сгенерированному электронной схеме радиоприемника. тогда, чтобы преобразовать форму волны в (e) назад в форму волны в (a), используется схема *детектора* или *демодулятора*.

Since the time domain signals are multiplied, the corresponding frequency spectra are convolved. That is, (f) is found by convolving (b) & (d). Since the spectrum of the carrier is a shifted delta function, the spectrum of the modulated signal is equal to the audio spectrum *shifted* to the frequency of the carrier. This results in a modulated spectrum composed of three components: a **carrier wave**, an **upper sideband**, and a **lower sideband**.

Так как сигналы домена времени мультиплицированы(умножены), соответствующие частотные спектры скручены. То есть (f) найден, скручивая(свертывая) (b) и (d). Так как спектр несущей - сдвинутая треугольная(дельта) функция, спектр модулируемого сигнала равен звуковому спектру, сдвинутому к несущей частоте. Это приводит к модулируемому спектру, составленному из трех компонентов: **несущей волны**, **верхней боковой полосы**, и **нижней боковой полосы**.

(c) АВТЭКС, Санкт-Петербург, http://www.autex.spb.ru, e-mail: info@autex.spb.ru

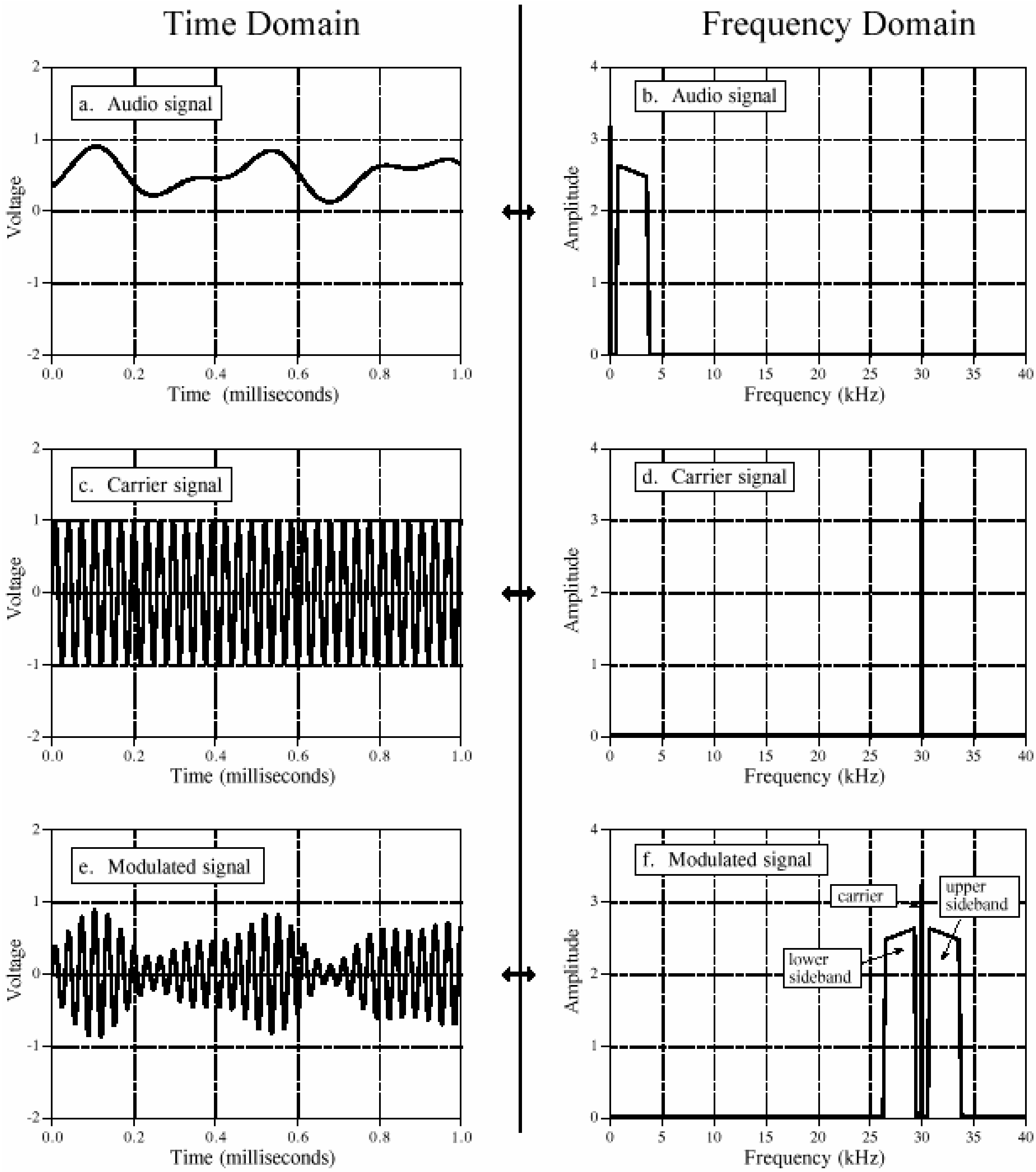

FIGURE 10-14
Amplitude modulation. In the time domain, amplitude modulation is achieved by multiplying the audio signal, (a), by the carrier signal, (c), to produce the modulated signal, (e). Since multiplication in the time domain corresponds to convolution in the frequency domain, the spectrum of the modulated signal is the spectrum of the audio signal shifted to the frequency of the carrier.

(c) АВТЭКС, Санкт-Петербург, http://www.autex.spb.ru, e-mail: info@autex.spb.ru

РИСУНОК 10-14. Амплитудная модуляция.
В домене времени, амплитудная модуляция достигнута, умножая(мультиплицируя) звуковой сигнал, (a), несущим сигналом, (c), производя модулируемый сигнал, (e). Так как умножение в домене времени соответствует скручиванию в частотном домене, спектр модулируемого сигнала - спектр звукового сигнала, сдвинутый к несущей частоте.

These correspond to the three parts of the original audio signal: the DC component, the positive frequencies between 0.3 and 3 kHz, and the negative frequencies between -0.3 and -3 kHz, respectively. Even though the negative frequencies in the original audio signal are somewhat elusive and abstract, the resulting frequencies in the lower sideband are as real as you could want them to be. The ghosts have taken human form!

Они соответствуют трем частям первоначального звукового сигнала: компонент постоянного тока, положительные частоты между 0.3 и 3 кГц, и отрицательные частоты между -0.3 и -3 кГц, соответственно. Даже при том, что отрицательные частоты в первоначальном звуковом сигнале несколько неуловимы и абстрактны, заканчивающиеся частоты в нижней боковой полосе столь же реальны(несомненны), как Вы могли хотеть, чтобы они были. Призраки приняли человеческую форму!

Communication engineers live and die by this type of frequency domain analysis. For example, consider the frequency spectrum for television transmission. A standard TV signal has a frequency spectrum from DC to 6 MHz. By using these frequency shifting techniques, 82 of these 6 MHz wide channels are stacked end-to-end. For instance, channel 3 is from 60 to 66 MHz, channel 4 is from 66 to 72 MHz, channel 83 is from 884 to 890 MHz, etc. The television receiver moves the desired channel back to the DC to 6 MHz band for display on the screen. This scheme is called **frequency domain multiplexing**.

Инженерно техническая связь живет и умирает(угасает, затухает) этим типом анализа частотного домена. Например, рассмотрите спектр частот для телевизионной передачи. Стандартный сигнал телевидения имеет спектр частот от постоянного тока до 6 MHz. Используя эту сдвигающую технологию частоты, , 82 из эти 6 MHz широкие каналы помещены в стек от начала до конца(сквозной стек). Например, канал 3 - от 60 до 66 MHz, канал 4 - от 66 до 72 MHz, канал 83 - от 884 до 890 MHz, и т.д. Телевизионный приемник перемещает желательный канал назад в постоянному току к 6 MHz полоса для дисплея(отображения на экране. Эта схема называется **мультиплексированием частотного домена**.

The Discrete Time Fourier Transform
Преобразование Фурье(трансформанта Фурье) дискретное Время

The Discrete Time Fourier Transform (DTFT) is the member of the Fourier transform family that operates on *aperiodic*, *discrete* signals. The best way to understand the DTFT is how it relates to the DFT. To start, imagine that you acquire an N sample signal, and want to find its frequency spectrum. By using the DFT, the signal can be decomposed into $N/2 + 1$ sine and cosine waves, with frequencies equally spaced between zero and one-half of the sampling rate. As discussed in the last chapter, padding the time domain signal with zeros makes the period of the time domain *longer*, as well as making the spacing between samples in the frequency domain *narrower*. As N approaches infinity, the time domain becomes *aperiodic*, and the frequency domain becomes a *continuous* signal. This is the DTFT, the Fourier transform that relates an *aperiodic*, *discrete* signal, with a *periodic*, *continuous* frequency spectrum.

Дискретное преобразование Фурье Времени (DTFT) - элемент семейства Преобразования Фурье(трансформант Фурье), которое работает на *апериодических*, *дискретных* сигналах. Лучший способ понимать DTFT состоит в том, как это связано(соотносится) с ДПФ. Для начала, вообразите, что Вы приобретаете сигнал выборки N, и хотите найти его спектр частот. Используя ДПФ, сигнал может быть расчленен в $N/2 + 1$ волн синуса и косинуса, с частотами, одинаково раздельными между нулем и половиной частоты выборки. Как обсуждено в прошлой главе, дополнение сигнала домена времени нулями, делает период из домена времени *дольше*, также, как делает интервал между выборками в частотном домене более узким. Как N приближается к бесконечности, домен времени становится *апериодическим*, и частотный домен становится *непрерывным* сигналом. Это - DTFT, Преобразование Фурье(трансформанта Фурье), которое связывает *апериодический*, *дискретный* сигнал, с *периодическим*, *непрерывным* спектром частот.

The mathematics of the DTFT can be understood by starting with the synthesis and analysis equations for the DFT (Eqs. 8-2, 8-3 and 8-4), and taking N to infinity:

Математика DTFT может быть понята, начинаясь с синтеза и уравнений анализа для ДПФ (уравнения 8-2, 8-3 и 8-4), и беря N бесконечным:

EQUATION 10-1
The DTFT analysis equation. In this relation, $x[n]$ is the time domain signal with n running from 0 to $N + 1$. The frequency spectrum is held in: *Re X(ω)* and with *ω* taking on values *Im X(ω).*

УРАВНЕНИЕ 10-1. уравнение анализа DTFT. В этом отношении, $x[n]$ - сигнал домена времени с n, выполняющимся от 0 до N+1. Спектр частот проведен(поддержан) в: *Re X(ω)* принимая значения *Im X(ω)*.

$$ReX(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\cos(\omega n)$$

$$ImX(\omega) = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\sin(\omega n)$$

EQUATION 10-2
The DTFT synthesis equation.

УРАВНЕНИЕ 10-2
уравнение синтеза DTFT.

$$x[n] = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} ReX(\omega)\cos(\omega n) - ImX(\omega)\sin(\omega n)\,d\omega$$

There are many subtle details in these relations. First, the time domain signal, $x[n]$, is still discrete, and therefore is represented by *brackets*. In comparison, the frequency domain signals, $ReX(\omega)$ и $Im\ X(\omega)$, are continuous, and are thus written with *parentheses*. Since the frequency domain is continuous, the synthesis equation must be written as an integral, rather than a summation.

Имеется много тонких подробностей в этих отношениях. Во первых, сигнал домена времени, $x[n]$ является все еще дискретным, и поэтому представлен скобками. На сравнении, сигналы частотного домена, $ReX(\omega)$ и $Im\ X(\omega)$, являются непрерывным, и таким образом написаны с круглыми скобками. Так как частотный домен непрерывен, уравнение синтеза должно быть написано как интеграл, скорее чем суммирование.

As discussed in Chapter 8, frequency is represented in the DFT's frequency domain by one of three variables: k, an index that runs from 0 to $N/2$; f, the fraction of the sampling rate, running from 0 to 0.5; or ω, the fraction of the sampling rate expressed as a natural frequency, running from 0 to π. The spectrum of the DTFT is continuous, so either f or ω can be used. The common choice is ω, because it makes the equations shorter by eliminating the always present factor of . Remember, when ω is used, the frequency 2π spectrum extends from 0 to π, which corresponds to DC to one-half of the sampling rate. To make things even more complicated, many authors use **Ω** (an upper case omega) to represent this frequency in the DTFT, rather than ω (a lower case omega).

Как обсуждено в главе 8, частота представлена в частотном домене ДПФ одной из трех переменных: k, индекс, который выполняется от 0 до $N/2$; f, дробь(доля) частоты выборки, выполняющейся от 0 до 0.5; или ω, дробь(доля) частоты выборки, выраженной как собственная частота, выполняющаяся от 0 до ω. Спектр DTFT непрерывен, или так f или ω могут использоваться. Обычный выбор ω, потому что это делает уравнения короче, устраняя всегда существующий коэффициент(фактор). Помните, когда ω используется, частота 2π спектр простирается от 0 до ω, который соответствует постоянному току к половине частоты выборки. Делать вещи даже более сложными, много авторов используют **Ω** (омега верхнего регистра) чтобы представить эту частоту в DTFT, скорее чем ω (омега строчных букв).

When calculating the inverse DFT, samples 0 and $N/2$ must be divided by two (Eq. 8-3) before the synthesis can be carried out (Eq. 8-2). This is not necessary with the DTFT. As you recall, this action in the DFT is related to the frequency spectrum being defined as a *spectral density*, i.e., amplitude per unit of bandwidth. When the spectrum becomes continuous, the special treatment of the end points disappear. However, there is still a normalization factor that must be included, the $2/N$ in the DFT (Eq. 8-3) becomes $1/\pi$ in the DTFT (Eq. 10-2). Some authors place these terms in front of the *synthesis* equation, while others place them in front of the *analysis* equation. Suppose you start with some time domain signal. After taking the Fourier transform, and then the Inverse Fourier transform, you want to end up with what you started. That is, the $1/\boldsymbol{\pi}$ term (or the $2/N$ term) must be encountered somewhere along the way, either in the forward or in the inverse transform. Some authors even split the term between the two transforms by placing $1/\sqrt{\pi}$ in front of both.

При вычислении обратного ДПФ, выборки 0, и $N/2$ должен быть разделен на два (уравнение 8-3) прежде, чем синтез может быть выполнен (уравнение 8-2). Это не необходимо с DTFT. Как Вы помните, это действие в ДПФ связано со спектром частот, определяемым как *спектральная плотность*, то есть, амплитуда / модуль ширины полосы частот. Когда спектр становится непрерывным, специальная обработка конечных точек исчеза-

(с) АВТЭКС, Санкт-Петербург, http://www.autex.spb.ru, e-mail: info@autex.spb.ru

ет(пропадает). Однако, все еще имеется коэффициент(фактор) нормализации, который должен быть включен, $2/N$ в ДПФ (уравнение 8-3) становится $1/\pi$ в DTFT (уравнение 10-2). Некоторые авторы размещают эти термины перед уравнением *синтеза*, в то время как другие размещают их перед уравнением *анализа*. Предположим, что Вы начинаете с некоторого сигнала домена времени. После взятия Преобразования Фурье(трансформанты Фурье), и затем Обратное Преобразование Фурье(трансформанта Фурье), Вы хотите закончить тем, чем Вы начали. То есть выражением $1/\pi$ (выражением $2/N$) нужно столкнуться где-нибудь по пути, или в прямой или в обратной трансформанте(преобразовании). Некоторые авторы даже разбивают термин(выражение) между двумя трансформантами, помещая $1/\sqrt{\pi}$ перед обоими.

Since the DTFT involves infinite summations and integrals, it cannot be calculated with a digital computer. Its main use is in theoretical problems as an alternative to the DFT. For instance, suppose you want to find the frequency response of a system from its impulse response. If the impulse response is known as an *array of numbers*, such as might be obtained from an experimental measurement or computer simulation, a DFT program is run on a computer. This provides the frequency spectrum as another *array of numbers*, equally spaced between 0 and 0.5 of the sampling rate.

Так как DTFT подразумевает бесконечное суммирование и интегрирование, это не может быть рассчитано с цифровым компьютером. Его основное использование находится в теоретических проблемах как альтернатива к ДПФ. Например, предположите, что Вы хотите найти частотную характеристику системы от ее импульсной передаточной функции. Если импульсная передаточная функция известна, как *массив чисел*, типа мог бы быть получен от экспериментального измерения или компьютерного моделирования, программа DFT выполнена на компьютере. Это обеспечивает спектр частот как другой *массив чисел*, одинаково раздельных между 0 и 0.5 из частоты выборки.

In other cases, the impulse response might be know as an *equation*, such as a sinc function (described in the next chapter) or an exponentially decaying sinusoid. The DTFT is used here to mathematically calculate the frequency domain as another *equation*, specifying the entire continuous curve between 0 and 0.5. While the DFT could also be used for this calculation, it would only provide an equation for *samples* of the frequency response, not the entire curve.

В других случаях, импульсная передаточная функция могла бы быть, знают как *уравнение*, типа sinc функции (описанной в следующей главе) или синусоиды распадающейся по экспоненте. DTFT используется здесь, чтобы математически вычислить частотный домен как другое *уравнение*, определяя полную непрерывную кривую между 0 и 0.5. В то время как ДПФ мог также использоваться для этого вычисления, это только обеспечит уравнение для *выборок* частотной характеристики, не полной кривой.

Parseval's Relation
Отношение Парсевала

Since the time and frequency domains are equivalent representations of the same signal, they must have the same *energy*. This is called Parseval's relation, and holds for all members of the Fourier transform family. For the DFT, Parseval's relation is expressed:

Так как домены время и частоты - эквивалентные представления того же самого сигнала, они должны иметь ту же самую *энергию*. Это называется отношением Парсевала, и дер-

(c) АВТЭКС, Санкт-Петербург, http://www.autex.spb.ru, e-mail: info@autex.spb.ru

жится для всех членов семейства преобразования Фурье(трансформант Фурье). Для ДПФ, отношение Парсевала выражено:

EQUATION 10-3
Parseval's relation. In this equation, $x[i]$ is a time domain signal with i running from 0 to N-1, and $X[k]$ is its *modified* frequency spectrum, with k running from 0 to N/2. The *modified* frequency spectrum is found by taking the DFT of the signal, and dividing the first and last frequencies (sample 0 and N/2) by the square-root of two.

$$\sum_{i=0}^{N-1} x[i]^2 = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N/2} Mag\,X[k]^2$$

УРАВНЕНИЕ 10-3.Отношение Парсевала.
В этом уравнении, $x[i]$- сигнал домена времени со, i выполняющимся от 0 до N-1, и $X[k]$ - его изменяемый спектр частот, с k, выполняющимся от 0 до N/2. *Изменяемый* спектр частот найден, беря ДПФ сигнала, и разделяя первые и последние частоты (чтобы произвести выборку 0 и N/2) квадратным корнем из двух.

The left side of this equation is the total energy contained in the time domain signal, found by summing the energies of the N individual samples. Likewise, the right side is the energy contained in the frequency domain, found by summing the energies of the sinusoids. Remember from physics that N/ 2 + 1 *energy* is proportional to the *amplitude squared*. For example, the energy in a spring is proportional to the displacement squared, and the energy stored in a capacitor is proportional to the voltage squared. In Eq. 10-3, is the $X[f]$ frequency spectrum of $x[n]$, with one slight modification: the first and last frequency components, $X[0]$ & $X[N/2]$ have been divided by $\sqrt{2}$ This modification, along with the $2/N$ factor on the right side of the equation, accounts for several subtle details of calculating and summing energies.

Левая сторона этого уравнения - полная энергия, содержащаяся в сигнале домена времени, найденном, подводя итог энергий N индивидуальных выборок. Аналогично, правая сторона - энергия, содержащаяся в частотном домене, найденном, подводя итог энергий синусоид. Вспомните из физики, что N/2+1 *энергия* пропорциональна к *возведенной в квадрат амплитуде*. Например, энергия в скачке пропорциональна к возведенному в квадрат смещению, и энергия, сохраненная в конденсаторе пропорциональна к возведенному в квадрат напряжению. В уравнении 10-3, является $X[f]$ спектр частот $x[n]$, с одной небольшой модификацией: первые и последние частотные компоненты, $X[0]$ и $X[N/2]$ были разделены $\sqrt{2}$. Этой модификацией, наряду с коэффициентом $2/N$ в правой части уравнения, расчетные записи для нескольких тонких подробностей вычисления и суммирующих энергий.

To understand these corrections, start by finding the frequency domain representation of the signal by using the DFT. Next, convert the frequency domain into the amplitudes of the sinusoids needed to reconstruct the signal, as previously defined in Eq. 8-3. This is done by dividing the first and last points (sample 0 and N/2) by 2, and then dividing all of the points by N/2. While this provides the amplitudes of the sinusoids, they are expressed as a *peak* amplitude, not the *root-mean-square* (rms) amplitude needed for energy calculations. In a sinusoid, the peak amplitude is converted to rms by dividing by $\sqrt{2}$. This correction must be made to all of the frequency domain values, *except* sample 0 and N/2. This is because these two sinusoids are unique; one is a constant value, while the other alternates between two constant values. For these two special cases, the *peak* amplitude is already equal to the *rms* value. All of the values in the frequency domain are squared and then summed. The last step is to divide the summed value by N, to account for each sample in the frequency domain being converted into a sinusoid that covers N values in the time domain. Working through all of these details produces Eq. 10-3.

Понимать эти исправления, начните, находя представление частотного домена сигнала, используя ДПФ. Затем, преобразуйте частотный домен в амплитуды синусоид, необходимых, чтобы восстановить сигнал, как предварительно определено в уравнении 8-3. Это сделано, разделяя первые и последние точки (чтобы произвести выборку 0 и *N*/2) 2, и затем разделяя все точки *N*/2. В то время как это обеспечивает амплитуды синусоид, они выражены как пиковая амплитуда, *не среднеквадратичная*(rms) амплитуда, необходимая для энергетических вычислений. В синусоиде, пиковая амплитуда преобразована к среднеквадратичному значению(rms), разделяясь $\sqrt{2}$. Это исправление должно быть сделано к всем значениям частотного домена, *кроме* выборки 0 и *N*/2. Это - то, потому что эти две синусоиды уникальны; каждый - постоянное значение, в то время как другие замены между двумя постоянными значениями. Для этих двух частных случаев, *пиковая* амплитуда уже равна значению *rms* (*эффективному(среднеквадратическому) значению*). Все значения в частотном домене возведены в квадрат и затем суммированы. Последний шаг должен делить суммированное значение *N*, подсчитывая каждую выборку в частотном домене, преобразовываемом в синусоиду, которая охватывает значения *N* в домене времени. Работа через все эти подробности производит уравнение 10-3.

While Parseval's relation is interesting from the physics it describes (conservation of energy), it has few practical uses in DSP.

В то время как отношение Парсевала интересно в физике (сохранение энергии), это имеет немного практического использования в ЦОС.

(c) АВТЭКС, Санкт-Петербург, http://www.autex.spb.ru, e-mail: info@autex.spb.ru