CHAPTER 31

The Complex Fourier Transform
Комплексное Преобразование Фурье

Although complex numbers are fundamentally disconnected from our reality, they can be used to solve science and engineering problems in two ways. First, the parameters from a real world problem can be substituted into a complex form, as presented in the last chapter. The second method is much more elegant and powerful, a way of making the complex numbers mathematically equivalent to the physical problem. This approach leads to the *complex Fourier transform*, a more sophisticated version of the *real Fourier transform* discussed in Chapter 8. The complex Fourier transform is important in itself, but also as a stepping stone to more powerful complex techniques, such as the *Laplace* and *z-transforms*. These complex transforms are the foundation of theoretical DSP.

Хотя комплексные числа существенно разъединены от нашей действительности, они могут использоваться, чтобы решить научные и технические проблемы двумя способами. Во первых, параметры от реальной мировой проблемы могут быть заменены в комплексную форму, как представлено в прошлой главе. Второй метод намного более изящен и мощен, путь создания комплексных чисел математически эквивалент физической проблеме. Этот подход ведет к *комплексному преобразованию Фурье*, более сложная версия *вещественного Преобразования Фурье*, обсужденного в Главе 8. Комплексное Преобразование Фурье важно само по себе, но также и как краеугольный камень к более мощным комплексным методам, типа преобразований Лапласа и *z-преобразований*. Эти комплексные трансформанты - основа теории ЦОС.

The Real DFT
Вещественное ДПФ

All four members of the Fourier transform family (DFT, DTFT, Fourier Transform & Fourier Series) can be carried out with either real numbers or complex numbers. Since DSP is mainly concerned with the DFT, we will use it as an example. Before jumping into the complex math, let's review the real DFT with a special emphasis on things that are awkward with the mathematics. In Chapter 8 we defined the *real* version of the Discrete Fourier Transform according to the equations:

Все четыре члена семейства преобразований Фурье (ДПФ, DTFT, Трансформанта Фурье и Ряд Фурье) могут быть выполнены или с вещественными числами или с комплексными числами. Так как ЦОС главным образом заинтересована в ДПФ, мы будем использовать это как пример. Перед переходом в комплексную математику, сделаем обзор вещественного ДПФ со специальным акцентом на вещах, которые являются неуклюжими с математической точки зрения. В главе 8 мы определили вещественную версию Дискретного преобразование Фурье согласно уравнениям:

EQUATION 31-1
The real DFT. This is the forward transform, calculating the frequency domain from the time domain. In spite of using the names: *real part* and *imaginary part*, these equations only involve ordinary numbers. The frequency index, k, runs from 0 to $N/2$. These are the same equations given in Eq. 8-4, except that the $2/N$ term has been included in the forward transform.

$$Re\,X[k] = \frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cos(2\pi kn/N)$$

$$Im\,X[k] = \frac{-2}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\sin(2\pi kn/N)$$

31-1 УРАВНЕНИЕ

Вещественное ДПФ. Это – прямое преобразование, вычисления частотного домена от домена времени. Несмотря на использование названий: *вещественная часть* и *мнимая часть*, эти уравнения включают в себя(подразумевают) только обычные числа. Частотный индекс, k, выполняется от 0 до $N/2$. Они - те же самые уравнения, данные в уравнении 8-4, за исключением того, что термин $2/N$ был включен в прямое преобразование.

In words, an N sample time domain signal, $x[n]$, is decomposed into a set of $N/2 + 1$ cosine waves, and $N/2 + 1$ sine waves, with frequencies given by the index, k. The amplitudes of the cosine waves are contained in $ReX[k]$, while the amplitudes of the sine waves are contained in $Im\ X[k]$. These equations operate by *correlating* the respective cosine or sine wave with the time domain signal. In spite of using the names: *real part* and *imaginary part*, there are no complex numbers in these equations. There isn't a j anywhere in sight! We have also included the normalization factor, $2/N$ in these equations. Remember, this can be placed in front of either the synthesis or analysis equation, or be handled as a separate step (as described by Eq. 8-3). These equations should be very familiar from previous chapters. If they aren't, go back and brush up on these concepts before continuing. If you don't understand the *real* DFT, you will never be able to understand the *complex* DFT.

В словах, N выборок сигнала домена времени, $x[n]$, расчленен в набор волн $N/2 + 1$ косинуса, и $N/2 + 1$ синусоидальных волн, с частотами, данными индексом, k. Амплитуды волн косинуса содержатся в $ReX[k]$, в то время как амплитуды синусоидальных волн содержится в $Im\ X[k]$. Эти уравнения оперируют, *коррелируя* соответствующую волну косинуса или синуса с сигналом домена времени. Несмотря на использование названий: *вещественная часть* и *мнимая часть*, в этих уравнениях нет никаких комплексных чисел. Не имеется j где-нибудь в поле зрения! Мы также включили коэффициент(фактор) нормализации, $2/N$ в эти уравнения. Вспомните, это может быть помещено или перед уравнением синтеза или уравнением анализа, или может быть обработано как отдельный шаг (как описано уравнением 8-3). Эти уравнения должны быть очень знакомы из предыдущих глав. Если они забыты, возвратитесь назад и поработайте над этими концепциями перед продолжением. Если Вы не понимаете *вещественного* ДПФ, Вы никогда не будете способны понять *комплексное* ДПФ.

Even though the real DFT uses only real numbers, *substitution* allows the frequency domain to be *represented* using complex numbers. As suggested by the names of the arrays $ReX[k]$, becomes the real part of the complex frequency spectrum, and $Im\ X[k]$ becomes the imaginary part. In other words, we place a j with each value in the imaginary part, and add the result to the real part. However, do not make the mistake of thinking that this is the "complex DFT." This is nothing more than the *real DFT with complex substitution*.

Даже при том, что вещественное ДПФ использует только вещественные числа, замещение(подстановка) позволяет частотному домену быть *представленным*, используя комплексные числа. Как предложено названиями массивов, $ReX[k]$ становится вещественной частью комплексного спектра частот, и $Im\ X[k]$ становится мнимой частью. Другими словами, мы размещаем j с каждым значением в мнимой части, и прибавляем результат к вещественной части. Однако, не делайте ошибку из размышления, что это является "комплексным ДПФ." Это не ничто больше чем вещественный ДПФ с комплексным замещением(подстановкой).

While the real DFT is adequate for many applications in science and engineering, it is mathematically awkward in three respects. First, it can only take advantage of complex numbers through the use of **substitution**. This makes mathematicians uncomfortable; they want to say:

"this *equals* that," not simply: "this *represents* that." For instance, imagine we are given the mathematical statement: A equals B. We immediately know countless consequences: $5A = 5B$, $1 + A = 1 + B$, $A/x = B/x$, etc. Now suppose we are given the statement: A represents B. Without additional information, we know absolutely nothing! When things are equal, we have access to four-thousand years of mathematics. When things only represent each other, we must start from scratch with new definitions. For example, when sinusoids are represented by complex numbers, we allow addition and subtraction, but prohibit multiplication and division.

В то время как вещественное ДПФ адекватно для многих приложений в науке и технике, это математически неуклюже в трех отношениях. Во первых, это может воспользоваться преимуществом комплексных чисел только с помощью замены(замещения; подстановки). Это неудобно для математиков; они хотят говорить: "это *равно* этому," не просто: "это *представляет* это." Например, вообразите, нам дают математическую инструкцию: A равняется B. Мы немедленно знаем бесчисленные последствия: $5A = 5B$, $1 + A = 1 + B$, $A/x = B/x$, и т.д. Теперь предположите, нам дают инструкцию: A представляет B. Без дополнительной информации, мы не знаем абсолютно ничего! Когда вещи равны, мы имеем доступ к четырем тысячам лет существования математики. Когда вещи только представляют друг друга, мы должны начать на пустом месте с новых определений. Например, когда синусоиды представлены комплексными числами, мы позволяем сложение и вычитание, но запрещаем умножение и деление.

The second thing handled poorly by the real Fourier transform is the **negative frequency** portion of the spectrum. As you recall from Chapter 10, sine and cosine waves can be described as having a *positive* frequency or a *negative* frequency. Since the two views are identical, the real Fourier transform ignores the negative frequencies. However, there are applications where the negative frequencies are important. This occurs when negative frequency components are forced to move into the positive frequency portion of the spectrum. The ghosts take human form, so to speak. For instance, this is what happens in aliasing, circular convolution, and amplitude modulation. Since the real Fourier transform doesn't use negative frequencies, its ability to deal with these situations is very limited.

Вторая вещь, плохо обрабатываемая вещественным преобразованием Фурье - **отрицательная частота** части спектра. Как Вы помните из главы 10, волны синуса и косинуса могут быть описаны как наличие *положительной* частоты или *отрицательной* частоты. Так как два представления(вида) идентичны, вещественное преобразование Фурье игнорирует отрицательные частоты. Однако, имеются приложения, где отрицательные частоты важны. Это происходит, когда отрицательные частотные компоненты вынуждены двигаться в положительную частотную часть спектра. Говорят, призраки принимают человеческий облик. Например, это - то, что случается в наложении спектров, кольцевой свертки, и амплитудной модуляции. Так как вещественное преобразование Фурье не использует отрицательные частоты, его способность иметь дело с этими ситуациями, очень ограничена.

Our third complaint is the **special handing of $ReX[0]$ and $ReX[N/2]$**, the first and last points in the frequency spectrum. Suppose we start with an N point signal, $x[n]$. Taking the DFT provides the frequency spectrum contained in $ReX[k]$ and $ImX[k]$, where k runs from 0 to $N/2$. However, these are not the amplitudes needed to reconstruct the time domain waveform; samples $ReX[0]$ and $ReX[N/2]$ must first be divided by two. (See Eq. 8-3 to refresh your memory). This is easily carried out in computer programs, but inconvenient to deal with in equations.

Наша третья жалоба - **специальное управление $ReX[0]$ и $ReX[N/2]$**, первыми и последними точками в спектре частот. Предположим, что мы начинаем с N точки сигнала, $x[n]$.

Взятие ДПФ обеспечивает спектр частот, содержащийся в $ReX\,[k]$ и $ImX\,[k]$, где k выполняется от 0 до $N/2$. Однако, они - не амплитуды, необходимые, чтобы восстановить форму волны домена времени; выборки $ReX\,[0]$ и $ReX\,[N/2]$ должны сначала быть разделены на два. (См. уравнение 8-3, чтобы освежить вашу память). Это легко выполняется в компьютерных программах, но неудобно, чтобы иметь дело в уравнениях.

The complex Fourier transform is an elegant solution to these problems. It is natural for complex numbers and negative frequencies to go hand-in-hand. Let's see how it works.

Комплексное преобразование Фурье - изящное решение этих проблем. Это естественно для комплексных чисел и отрицательных частот, чтобы идти "взявшись за руки". Давайте посмотрим, как это работает.

Mathematical Equivalence
Математическая Эквивалентность

Our first step is to show how sine and cosine waves can be written in an *equation* with complex numbers. The key to this is Euler's relation, presented in the last chapter:

Наш первый шаг должен показать, как волны синуса и косинуса могут быть записаны в уравнении с комплексными числами. Ключ к этому - отношение Эйлера, представленное в прошлой главе:

УРАВНЕНИЕ 31-2
Отношение Эйлера.

$$e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x)$$

At first glance, this doesn't appear to be much help; one complex expression is equal to another complex expression. Nevertheless, a little algebra can rearrange the relation into two other forms:

На первый взгляд, это кажется, не много помощи; одно комплексное выражение равно другому комплексному выражению. Однако, немного алгебры может перестроить отношение в две других формы:

УРАВНЕНИЕ 31-3
Отношение Эйлера для синуса и косинуса.

$$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \qquad \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

This result is extremely important, we have developed a way of writing *equations* between complex numbers and ordinary sinusoids. Although Eq. 31-3 is the standard form of the identity, it will be more useful for this discussion if we change a few terms around:

Этот результат чрезвычайно важен, мы разработали путь записи уравнений между комплексными числами и обычными синусоидами. Хотя уравнение 31-3 - стандартная форма тождества, это будет более полезно для этого обсуждения, если мы изменяем(заменяем) несколько терминов вокруг:

УРАВНЕНИЕ 31-4
Синусоиды как комплексные числа. Используя комплексные числа, волны косинуса и синуса могут быть записаны как сумма положительной и отрицательной частоты

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}e^{j(-\omega)t} + \frac{1}{2}e^{j\omega t}$$

$$\sin(\omega t) = \frac{1}{2}je^{j(-\omega)t} - \frac{1}{2}je^{j\omega t}$$

Each expression is the sum of two exponentials: one containing a *positive* frequency (ω), and the other containing a *negative* frequency (-ω). In other words, when sine and cosine waves are written as complex numbers, the negative portion of the frequency spectrum is automatically included. The positive and negative frequencies are treated with an equal status; it requires one-half of each to form a complete waveform.

Каждое выражение - сумма двух показательных функций: одна содержит положительную частоту (ω), и другая содержит отрицательную частоту (-ω). Другими словами, когда волны синуса и косинуса записаны как комплексные числа, отрицательная часть спектра частот автоматически включена. Положительные и отрицательные частоты обработаны с равным состоянием; это требует половины каждой, чтобы формировать полную форму волны.

The Complex DFT
Комплексное ДПФ

The forward complex DFT, written in polar form, is given by:
Прямое комплексное ДПФ, записанное в полярной форме, дается:

УРАВНЕНИЕ 31-5
Прямое комплексное ДФТ. И домен времени, $x[n]$, и домен частоты, $X[k]$, является массивами комплексных чисел с k и n, выполняющимися от 0 до N-1. Это уравнение находится в полярной форме, наиболее обычной для ЦОС.

$$X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j2\pi kn/N}$$

Alternatively, Euler's relation can be used to rewrite the forward transform in rectangular form:
Альтернативно, отношение Эйлера может использоваться, чтобы перезаписать прямую трансформанту в прямоугольной форме:

УРАВНЕНИЕ 31-6
Прямой комплексный ДПФ (прямоугольная форма).

$$X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\left(\cos(2\pi kn/N) - j\sin(2\pi kn/N)\right)$$

To start, compare this equation of the *complex Fourier transform* with the equation of the *real Fourier transform*, Eq. 31-1. At first glance, they appear to be identical, with only small amount of algebra being required to turn Eq. 31-6 into Eq. 31-1. However, this is very misleading; the differences between these two equations are very subtle and easy to overlook, but tremendously important. Let's go through the differences in detail.

Начиная, сравните это уравнение *комплексного преобразования Фурье* с уравнением *вещественного преобразования* Фурье, уравнение 31-1. На первый взгляд, они кажутся идентичными, только с маленьким количеством алгебры, требуемой, чтобы повернуть уравнение 31-6 в 31-1 уравнение. Однако, это очень вводит в заблуждение; различия между этими двумя уравнениями очень тонкие и просты пропустить, но чрезвычайно важны. Давайте проходить различия подробно.

First, the real Fourier transform converts a real time domain signal, $x[n]$, into two real frequency domain signals, ReX[k] ImX[k]. By using complex substitution, the frequency domain can be *represented* by a single complex array, $X[k]$. In the complex Fourier transform, both $x[n]$ & $X[k]$ are arrays of complex numbers. A practical note: Even though the time domain is complex, there is nothing that *requires* us to use the imaginary part. Suppose we want to process a real signal, such as a series of voltage measurements taken over time. This group of data becomes the real part of the time domain signal, while the imaginary part is composed of zeros.

Во первых, преобразование Фурье преобразовывает сигнал домена реального времени, $x[n]$, в два вещественных сигнала частотного домена, $ReX[k]$ $ImX[k]$. Используя комплексную замену(замещение), частотный домен может быть *представлен* единым комплексным массивом, $X[k]$. В комплексном преобразовании Фурье, и $x[n]$ и $X[k]$ - массивы комплексных чисел. Практическая нота: Даже притом, что домен времени комплексен, не имеется ничего, что *требовало бы*, чтобы мы использовали мнимую часть. Предположим, что мы хотим обработать вещественный сигнал, типа ряда измерений напряжения сделанных через какое-то время. Эта группа данных становится вещественной частью сигнала домена времени, в то время как мнимая часть составлена из нулей.

Second, the real Fourier transform only deals with *positive* frequencies. That is, the frequency domain index, k, only runs from 0 to $N/2$. In comparison, the complex Fourier transform includes both *positive* and *negative* frequencies. This means k runs from 0 to N-1. The frequencies between 0 and $N/2$ are positive, while the frequencies between $N/2$ and N-1 are negative. Remember, the frequency spectrum of a discrete signal is periodic, making the negative frequencies between $N/2$ and N-1 the same as between -$N/2$ and 0. The samples at 0 and $N/2$ straddle the line between positive and negative. If you need to refresh your memory on this, look back at Chapters 10 and 12.

Во вторых, вещественное преобразование Фурье имеет дело только с положительными частотами. То есть индекс частотного домена, k, выполняется только от 0 до $N/2$. Для сравнения, комплексное преобразование Фурье включает, и положительные и отрицательные частоты. Это означает, что k выполняется от 0 до N-1. Частоты между 0 и $N/2$ положительны, в то время как частоты между $N/2$ и N-1 отрицательны. Вспомните, спектр частот дискретного сигнала периодический, делая отрицательные частоты между $N/2$ и N-1 теми же самыми как между -$N/2$ и 0. Выборки в 0 и $N/2$ колеблются(удвоены?) между строкой между позитивом и негативом. Если Вы должны обновить вашу память на этом, оглянитесь назад в главы 10 и 12.

Third, in the real Fourier transform with substitution, a j was added to the sine wave terms, allowing the frequency spectrum to be represented by complex numbers. To convert back to ordinary sine and cosine waves, we can simply drop the j. This is the sloppiness that comes when one thing only *represents* another thing. In comparison, the complex DFT, Eq. 31-5, is a formal mathematical equation with j being an integral part. In this view, we cannot arbitrary add or remove a j any more than we can add or remove any other variable in the equation.

Третье, в вещественном преобразовании Фурье с заменой, j был добавлен к терминам синусоидальной волны, позволяя спектру частот быть представленным комплексными числами. Чтобы преобразовывать назад к обычным волнам синуса и косинуса, мы можем просто опускать j. Это - сырость, что получается, когда одна вещь только представляет другую вещь. Для сравнения, комплексное ДПФ, уравнение 31-5, является формальным математическим уравнением с j, являющимся неотъемлемой частью. В этом представлении(виде), мы не можем произвольно прибавлять или удалять j также как, мы можем прибавлять или удалять любую другую переменную в уравнении.

Forth, the real Fourier transform has a scaling factor of *two* in front, while the complex Fourier transform does not. Say we take the real DFT of a cosine wave with an amplitude of *one*. The spectral value corresponding to the cosine wave is also *one*. Now, let's repeat the process using the complex DFT. In this case, the cosine wave corresponds to *two* spectral values, a positive and a negative frequency. Both these frequencies have a value of S. In other words, a positive frequency with an amplitude of S, combines with a negative frequency with an amplitude of S, producing a cosine wave with an amplitude of *one*.

Дальше, вещественное преобразование Фурье имеет коэффициент масштабирования *два* впереди, в то время как комплексное преобразование Фурье этого не делает. Говорим, что мы берем вещественное ДПФ волны косинуса с амплитудой *один*. Спектральное значение, соответствующее волне косинуса также одно. Теперь, давайте повторять процесс, используя комплексное ДПФ. В этом случае, волна косинуса соответствует двум спектральным значениям, позитиву и отрицательной частоте. Обе эти частоты имеют значение S. Другими словами, положительная частота с амплитудой S, объединяется с отрицательной частотой с амплитудой S, производя волну косинуса с амплитудой *один*.

Fifth, the real Fourier transform requires special handling of two frequency domain samples: *ReX* [0] & *ReX* [*N*/2], but the complex Fourier transform does not. Suppose we start with a time domain signal, and take the DFT to find the frequency domain signal. To reverse the process, we take the Inverse DFT of the frequency domain signal, reconstructing the original time domain signal. However, there is scaling required to make the reconstructed signal be identical to the original signal. For the complex Fourier transform, a factor of 1/*N* must be introduced somewhere along the way. This can be tacked-on to the forward transform, the inverse transform, or kept as a separate step between the two. For the real Fourier transform, an additional factor of two is required (2/*N)*, as described above. However, the real Fourier transform also requires an additional scaling step: *ReX* [0] and *ReX* [*N*/2] must be divided by *two* somewhere along the way. Put in other words, a scaling factor of 1/*N* is used with these two samples, while 2/*N* is used for the remainder of the spectrum. As previously stated, this awkward step is one of our complaints about the real Fourier transform.

Пятое, вещественное преобразование Фурье требует специальной обработки двух выборок частотного домена: *ReX* [0] и *ReX* [*N*/2], но комплексное преобразование Фурье не делает. Предположим, что мы начинаем с сигнала домена времени, и берем ДПФ, чтобы найти сигнал частотного домена. Чтобы полностью изменять процесс, мы берем Обратный ДПФ сигнала частотного домена, восстанавливая первоначальный сигнал домена времени. Однако, там масштабирует требуемый, чтобы заставить восстановленный сигнал быть идентичным первоначальному сигналу. Для комплексного преобразования Фурье, коэффициент 1/*N* должен быть представлен где-нибудь по пути. Это может " прикрепляться на " к прямой трансформанте, обратной трансформанте, или сохраняться как отдельный шаг между двумя. Для реального преобразования Фурье, дополнительный коэффициент два требуется (2/*N*), как описано выше. Однако, вещественное преобразование Фурье также требует дополнительного шага масштабирования: *ReX* [0] и *ReX* [*N*/2] должен быть разделен два где-нибудь по пути. Излагая другими словами, коэффициент масштабирования 1/*N* используется с этими двумя выборками, в то время как 2/*N* используется для остаточного члена от спектра. Как предварительно заявлено, этот неуклюжий шаг - одна из наших жалоб(недовольств) относительно вещественного преобразования Фурье.

Why are the real and complex DFTs different in how these two points are handled? To answer this, remember that a cosine (or sine) wave in the time domain becomes split between a positive and a negative frequency in the complex DFT's spectrum. However, there are two exceptions to this, the spectral values at 0 and *N*/2. These correspond to zero frequency (DC) and the Nyquist frequency (one-half the sampling rate). Since these points straddle the positive and negative portions of the spectrum, they do not have a matching point. Because they are not combined with another value, they inherently have only one-half the contribution to the time domain as the other frequencies.

Почему - вещественное и комплексное ДПФ, отличны в том, как эти две точки обработаны? Чтобы отвечать на это, помните, что волна косинуса (или синуса) в домене времени становится разбитой между позитивом и отрицательной частотой в спектре комплексного ДПФ. Однако, имеются два исключения к этому, спектральные значения в 0 и *N*/2. Они передают(переписываются) частоте нуля (постоянный ток) и частоту Найквиста (половина частоты выборки). Так как эти точки колеблются между положительными и отрицательными частями спектра, они не имеют точки соответствия. Поскольку они не объединены с другим значением, они неотъемлемо имеют только половину содействия(вклада) домену времени как другие частоты.

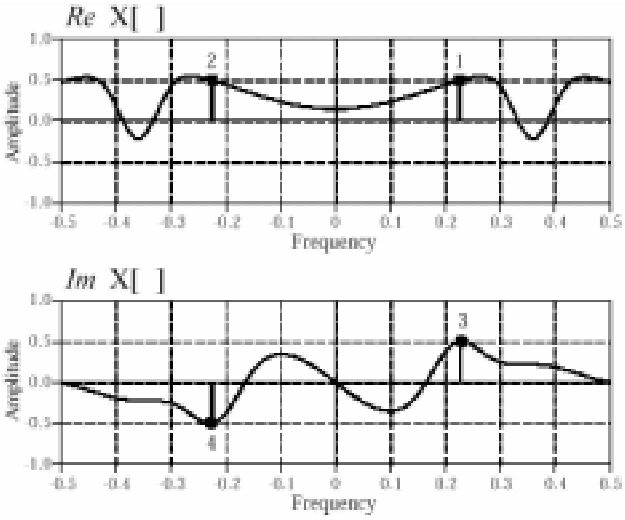

FIGURE 31-1
Complex frequency spectrum. These curves correspond to an entirely real time domain signal, because the real part of the spectrum has an *even* symmetry, and the imaginary part has an *odd* symmetry. The two square markers in the real part correspond to a cosine wave with an amplitude of one, and a frequency of 0.23. The two round markers in the imaginary part correspond to a sine wave with an amplitude of one, and a frequency of 0.23.
РИСУНОК 31-1
Комплексный спектр частот. Эти кривые соответствуют полностью сигналу домена реального времени, потому что вещественная часть спектра имеет четную симметрию, и мнимая часть имеет нечетную симметрию. Два квадратных маркера в вещественной части соответствуют волне косинуса с одними амплитудами, и частотой 0.23. Два круглых маркера в мнимой части соответствуют синусоидальной волне с одной амплитудой, и частотой 0.23.

Figure 31-1 illustrates the complex DFT's frequency spectrum. This figure assumes the time domain is entirely *real*, that is, its imaginary part is zero. We will discuss the idea of imaginary time domain signals shortly. There are two common ways of displaying a complex frequency spectrum. As shown here, zero frequency can be placed in the center, with positive frequencies to the right and negative frequencies to the left. This is the best way to *think* about the complete spectrum, and is the *only* way that an aperiodic spectrum can be displayed.

Рисунок 31-1 иллюстрирует спектр частот комплексного ДПФ. Этот рисунок предполагает, что домен времени полностью *вещественен*, то есть его мнимая часть нулевая. Мы обсудим идею относительно мнимых сигналов домена времени вскоре. Имеются два обычных пути отображения комплексного спектра частот. Как показано здесь, частота нуля, может быть помещена в центр, с положительными частотами направо и отрицательными частотами налево Это - лучший способ *думать* относительно полного спектра, и - *единственный* путь, которым апериодический спектр может быть отображен.

The problem is that the spectrum of a discrete signal is *periodic* (such as with the DFT and the DTFT). This means that everything between -0.5 and 0.5 repeats itself an infinite number of times to the left and to the right. In this case, the spectrum between 0 and 1.0 contains the same information as from - 0.5 to 0.5. When graphs are made, such as Fig. 31-1, the -0.5 to 0.5 convention is usually used. However, many equations and programs use the 0 to 1.0 form. For instance, in Eqs. 31-5 and 31-6 the frequency index, *k*, runs from 0 to *N*-1 (coinciding with 0 to 1.0). However, we could write it to run from -*N*/2 to *N*/2-1 (coinciding with -0.5 to 0.5), if we desired.

Проблема состоит в том, что спектр дискретного сигнала является периодическим (типа с ДПФ и DTFT). Это означает что все между -0.5 и 0.5 повторениями самостоятельно бесконечное число раз налево и направо В этом случае, спектр между 0 и 1.0 содержит ту же самую информацию как от - от 0.5 до 0.5. Когда диаграммы(графики) сделаны, типа рис. 31-1, от -0.5 до 0.5 соглашения обычно используется. Однако, много уравнений и программы используют от 0 до 1.0 формы. Для образца, в уравнениях 31-5 и 31-6 частотный индекс, *k*, выполняется от 0 до *N*-1 (совпадающий с от 0 до 1.0). Однако, мы могли записывать это, чтобы работать от -*N*/2 до *N*/2-1 (совпадающий с от -0.5 до 0.5), если мы желали.

Using the spectrum in Fig. 31-1 as a guide, we can examine how the inverse complex DFT reconstructs the time domain signal. The inverse complex DFT, written in polar form, is given by:

Используя спектр в рис. 31-1 как руководство, мы можем исследовать, как обратный комплексный ДПФ восстанавливает сигнал домена времени. Обратный комплексный ДПФ, написанный в полярной форме, дается:

EQUATION 31-7
The inverse complex DFT. This is matching equation to the forward complex DFT in Eq. 31-5.
УРАВНЕНИЕ 31-7. Обратный комплексный ДПФ.
Это соответствует уравнению прямого комплексного ДФТ в уравнении 31-5.

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{j2\pi kn/N}$$

Using Euler's relation, this can be written in rectangular form as:
Используя отношение Эйлера, это может быть написано в прямоугольной форме как:

EQUATION 31-8
The inverse complex DFT. This is Eq. 31-7 rewritten to show how each value in the frequency spectrum affects the time domain.
УРАВНЕНИЕ 31-8
Обратное комплексное ДПФ. Это - уравнение 31-7 перезаписанное, чтобы показать, как каждое значение в спектре частот воздействует на домен времени.

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} Re X[k]\left(\cos(2\pi kn/N) + j\sin(2\pi kn/N)\right)$$
$$- \sum_{k=0}^{N-1} Im X[k]\left(\sin(2\pi kn/N) - j\cos(2\pi kn/N)\right)$$

The compact form of Eq. 31-7 is how the inverse DFT is usually written, although the expanded version in Eq. 31-9 can be easier to understand. In words, each value in the real part of the frequency domain contributes a real cosine wave *and* an imaginary sine wave to the time domain. Likewise, each value in the imaginary part of the frequency domain contributes a real sine wave *and* an imaginary cosine wave. The time domain is found by adding all these real and imaginary sinusoids. The important concept is that each value in the frequency domain produces both a *real* sinusoid and an *imaginary* sinusoid in the time domain.

Компактная форма уравнения 31-7 - то, как обратное ДПФ обычно записывается, хотя расширенная версия в уравнении 31-9 может быть проще, чтобы понять. В словах, каждое значение в вещественной части частотного домена жертвует(вносит вклад) вещественную волну косинуса и мнимую синусоидальную волну к домену времени. Аналогично, каждое значение в мнимой части частотного домена жертвует(вносит вклад) вещественную синусоидальную волну и мнимую волну косинуса. Домен времени найден, прибавляя все эти реальные и мнимые синусоиды. Важная концепция - то, что каждое значение в частотном домене производит, и вещественную синусоиду и мнимую синусоиду в домена времени.

For example, imagine we want to reconstruct a unity amplitude cosine wave at a frequency of . This requires a positive frequency and a negative frequency, both from the real part of the frequency spectrum. The two square markers in Fig. 31-1 are an example of this, with the frequency set at: $2\pi k/N$. The positive frequency at 0.23 (labeled 1 in Fig. 31-1) contributes a cosine wave and an imaginary sine wave to the time domain:

Например, вообразите, что мы хотим восстановить волну косинуса амплитуды единицы в частоте. Это требует положительной частоты и негатива $2\pi k/N$ частоты, оба от вещественной части спектра частот. Два квадратных маркера в рис. 31-1 - пример этого, с частотным набором в: $2\pi k/N$. Положительная частота в 0.23 (маркирована 1 в рис. 31-1) жертвует(вносит вклад) волну косинуса и мнимую синусоидальную волну к домену времени:

$$\tfrac{1}{2}\cos(2\pi\, 0.23\, n) + \tfrac{1}{2} j \sin(2\pi\, 0.23\, n)$$

Likewise, the negative frequency at -0.23 (labeled 2 in Fig. 31-1) also contributes a cosine and an imaginary sine wave to the time domain:
Аналогично, отрицательная частота в -0.23 (маркирована 2 в рис. 31-1) также жертвует косинус и мнимую синусоидальную волну к домену времени:

$$\tfrac{1}{2}\cos(2\pi(-0.23)n) + \tfrac{1}{2} j \sin(2\pi(-0.23)n)$$

The negative sign within the cosine and sine terms can be eliminated by the relations: $\cos(-x) = \cos(x)$ and $\sin(-x) = -\sin(x)$. This allows the negative frequency's contribution to be rewritten:

Знак минус в пределах терминов косинуса и синуса может быть устранен отношениями: $\cos(-x) = \cos(x)$ and $\sin(-x) = -\sin(x)$. Это позволяет содействию(вкладу) отрицательной частоты быть перезаписанным:

$$\tfrac{1}{2}\cos(2\pi\, 0.23\, n) - \tfrac{1}{2} j \sin(2\pi\, 0.23\, n)$$

Adding the contributions from the positive and the negative frequencies reconstructs the time domain signal:
Сложение содействие(вклад) положительных и отрицательных частот восстанавливает сигнал домена времени:

Вклад от положительной частоты →	$\tfrac{1}{2}\cos(2\pi\, 0.23\, n) + \tfrac{1}{2} j \sin(2\pi\, 0.23\, n)$
Вклад от отрицательной частоты →	$\tfrac{1}{2}\cos(2\pi\, 0.23\, n) - \tfrac{1}{2} j \sin(2\pi\, 0.23\, n)$
Результирующий сигнал домена времени →	$\cos(2\pi\, 0.23\, n)$

In this same way, we can synthesize a sine wave in the time domain. In this case, we need a positive and negative frequency from the imaginary part of the frequency spectrum. This is shown by the round markers in Fig. 31-1. From Eq. 31-8, these spectral values contribute a sine wave and an imaginary cosine wave to the time domain. The imaginary cosine waves cancel, while the real sine waves add:

Этим же способом, мы можем синтезировать синусоидальную волну в домен времени. В этом случае, мы нуждаемся в положительной и отрицательной частоте от мнимой части спектра частот. Это показывают круглые маркеры в рис. 31-1. От уравнения 31-8, эти спектральные значения жертвуют синусоидальную волну и мнимую волну косинуса к домену времени. Мнимые волны косинуса аннулируются, в то время как вещественные синусоидальные волны добавляются:

Вклад от положительной частоты →	$-\frac{1}{2}\sin(2\pi 0.23n) \;-\; \frac{1}{2}j\cos(2\pi 0.23n)$
Вклад от отрицательной частоты →	$-\frac{1}{2}\sin(2\pi 0.23n) \;+\; \frac{1}{2}j\cos(2\pi 0.23n)$
Результирующий сигнал домена времени →	$-\sin(2\pi 0.23n)$

Notice that a *negative* sine wave is generated, even though the positive frequency had a value that was *positive*. This sign inversion is an inherent part of the mathematics of the complex DFT. As you recall, this same sign inversion is commonly used in the real DFT. That is, a *positive* value in the imaginary part of the frequency spectrum corresponds to a *negative* sine wave. Most authors include this sign inversion in the definition of the real Fourier transform to make it consistent with its complex counterpart. The point is, this sign inversion *must* be used in the complex Fourier transform, but is merely an option in the real Fourier transform.

Обратите внимание, что *отрицательная* синусоидальная волна сгенерирована, даже при том, что *положительная* частота имела значение, которое было положительно. Это обращение знака - свойственная часть математики комплексного ДПФ. Как Вы помните, это, то же самое обращение знака обычно используется в вещественном ДПФ. То есть положительное значение в мнимой части спектра частот соответствует *отрицательной* синусоидальной волне. Большинство авторов включает это обращение знака на определении вещественного преобразования Фурье, чтобы делать это совместимым с его комплексным дубликатом. Пункт, это обращение сигнала *должно* использоваться в комплексном преобразовании Фурье, но - просто опция в вещественном преобразовании Фурье.

The *symmetry* of the complex Fourier transform is very important. As illustrated in Fig. 31-1, a real time domain signal corresponds to a frequency spectrum with an *even* real part, and an *odd* imaginary part. In other words, the negative and positive frequencies have the same sign in the real part (such as points 1 and 2 in Fig. 31-1), but opposite signs in the imaginary part (points 3 and 4).

Симметрия комплексного преобразования Фурье очень важна. Как иллюстрировано в рис. 31-1, сигнал домена реального времени соответствует спектру частот с *четной* вещественной частью, и *нечетной* мнимой частью. Другими словами, отрицательные и положительные частоты имеют, те же самые сигналы, в вещественной части (типа точек 1 и 2 в рис. 31-1), но напротив(противоположно) сигналов мнимой части (точки 3 и 4).

This brings up another topic: the imaginary part of the time domain. Until now we have assumed that the time domain is completely real, that is, the imaginary part is zero. However, the complex Fourier transform does not require this.

Это поднимает другую тему: мнимая часть домена времени. До сих пор мы предполагали, что домен времени полностью вещественен, то есть мнимая часть нулевая. Однако, комплексное преобразование Фурье не требует этого.

What is the physical meaning of an imaginary time domain signal? Usually, there is none. This is just something allowed by the complex mathematics, without a correspondence to the world we live in. However, there are applications where it can be used or manipulated for a mathematical purpose.

Каково физическое значение мнимого сигнала домена времени? Обычно, не имеется ни одного. Это - только кое-что позволенное комплексной математикой, без соответствия к миру, в котором мы живем. Однако, имеются приложения, где это может использоваться или управляться для математической цели.

An example of this is presented in Chapter 12. The imaginary part of the time domain produces a frequency spectrum with an odd real part, and an even imaginary part. This is just the opposite of the spectrum produced by the real part of the time domain (Fig. 31-1). When the time domain contains both a real part and an imaginary part, the frequency spectrum is the sum of the two spectra, had they been calculated individually. Chapter 12 describes how this can be used to make the FFT algorithm calculate the frequency spectra of *two* real signals at once. One signal is placed in the real part of the time domain, while the other is place in the imaginary part. After the FFT calculation, the spectra of the two signals are separated by an even/odd decomposition.

Пример этого представлен в главе 12. Мнимая часть домена времени производит спектр частот с нечетной вещественной частью, и четной мнимой частью. Это - только противоположность спектра, произведенного вещественной частью домена времени (рис. 31-1). Когда домен времени содержит, и вещественную часть и мнимую часть, спектр частот - сумма из этих двух спектров, имел их расчетный индивидуально. Глава 12 описывает, как это может использоваться, чтобы заставить алгоритм БПФ вычислить частотные спектры двух вещественных сигналов сразу. Один сигнал помещен в вещественную часть домена времени, в то время как другой - место в мнимой части. После вычисления БПФ, спектры из двух сигналов отделены четной/нечетной декомпозицией.

The Family of Fourier Transforms
Семейство Преобразований Фурье

Just as the DFT has a real and complex version, so do the other members of the Fourier transform family. This produces the zoo of equations shown in Table 31-1. Rather than studying these equations individually, try to understand them as a well organized and symmetrical *group*. The following comments describe the organization of the Fourier transform family. It is detailed, repetitive, and boring. Nevertheless, this is the background needed to understand theoretical DSP. Study it well.

Также, как ДПФ имеет вещественную и комплексную версию, так делают другие члены семейства преобразования Фурье. Это производит зверинец уравнений, показанных в таблице 31-1. Скорее чем изучение этих уравнений индивидуально, пробуйте понять их как хорошо организована и симметрична группа. Следующие комментарии описывают организацию семейства преобразования Фурье. Это детализировано, повторно, и раздражает. Однако, это - подготовка, необходимая, чтобы понять теоретическую ЦОС. Изучите это хорошо.

1. Four Fourier Transforms
1. Четыре Преобразования Фурье

A time domain signal can be either *continuous* or *discrete*, and it can be either *periodic* or *aperiodic*. This defines four types of Fourier transforms: the **Discrete Fourier Transform** (discrete, periodic), the **Discrete Time Fourier Transform** (discrete, aperiodic), the **Fourier Series** (continuous, periodic), and the **Fourier Transform** (continuous, aperiodic). Don't try to understand the reasoning behind these names, there isn't any.

Сигнал домена времени может быть или *непрерывен* или *дискретен*, и это может быть или *периодически* или *апериодическое*. Это определяет четыре типа Преобразований Фурье**:** **Дискретное преобразование Фурье** (дискретный, периодический), **Преобразование Фурье Дискретного Времени** (дискретный, апериодический), **Ряд Фурье** (непрерывный, периодический), и **Преобразование Фурье** (непрерывный, апериодический). Не пробуйте понять рассуждение позади этих названий(имен), не имеется любого.

If a signal is discrete in one domain, it will be periodic in the other. Likewise, if a signal is continuous in one domain, will be aperiodic in the other. Continuous signals are represented by parenthesis, ( ), while discrete signals are represented by brackets, [ ]. There is no notation to indicate if a signal is periodic or aperiodic.

Если сигнал дискретен в одном домене, он будет периодическим в другом. Аналогично, если сигнал непрерывен в одном домене, он будет апериодическим в другом. Непрерывные сигналы представлены круглой скобкой, ( ), в то время как дискретные сигналы представлены квадратными скобками, [ ]. Не имеется никакой системы обозначений, чтобы указать, является ли сигнал периодическим или апериодическим.

2. Real versus Complex

2. Вещественный против Комплексного

Each of these four transforms has a complex version and a real version. The complex versions have a complex time domain signal and a complex frequency domain signal. The real versions have a real time domain signal and two real frequency domain signals. Both positive and negative frequencies are used in the complex cases, while only positive frequencies are used for the real transforms. The complex transforms are usually written in an exponential form; however, Euler's relation can be used to change them into a cosine and sine form if needed.

Каждая из этих четырех трансформант имеет комплексную версию и вещественную версию. Комплексные версии имеют комплексный сигнал домена времени и комплексный сигнал частотного домена. Вещественные версии имеют сигнал домена реального времени и два вещественных сигнала частотного домена. И положительные и отрицательные частоты используются в комплексных случаях, в то время как только положительные частоты используются для вещественных трансформант. Комплексные трансформанты обычно записываются в показательной форме; однако, отношение Эйлера может использоваться, чтобы изменить(заменить) их в форму косинуса и синуса если необходимо.

3. Analysis and Synthesis

3. Анализ и Синтез

Each transform has an analysis equation (also called the forward transform) and a synthesis equation (also called the inverse transform). The analysis equations describe how to calculate each value in the frequency domain based on all of the values in the time domain. The synthesis equations describe how to calculate each value in the time domain based on all of the values in the frequency domain.

Каждая трансформанта имеет уравнение анализа (также называемая прямой трансформантой) и уравнением синтеза (также называемого обратной трансформантой). Уравнения анализа описывают, как вычислить каждое значение в частотном домене, основано на всех значениях в домене времени. Уравнения синтеза описывают, как вычислить каждое значение в домене времени, основано на всех значениях в частотном домене.

4. Time Domain Notation

4. Система обозначений Домена Времени

Continuous time domain signals are called $x(t)$, while discrete time domain signals are called $x[n]$. For the complex transforms, these signals are complex. For the real transforms, these signals are real. All of the time domain signals extend from minus infinity to positive infinity. However, if the time domain is periodic, we are only concerned with a single cycle, because the rest is redundant. The variables, T and N, denote the periods of continuous and discrete signals in the time domain, respectively.

Непрерывные сигналы домена времени называются $x(t)$, в то время как дискретные сигналы домена времени называется $x[n]$. Для комплексных трансформант, эти сигналы комплексны. Для вещественных трансформант, эти сигналы вещественны. Все сигналы домена времени простираются от отрицательной бесконечности до положительной бесконечности. Однако, если домен времени периодический, мы только заинтересованы(обеспокоены) единственным(отдельным) периодом, потому что остальное избыточно. Переменные, T и N, обозначают периоды непрерывных и дискретных сигналов в домене времени, соответственно.

5. Frequency Domain Notation
5. Система обозначений Частотного Домена

Continuous frequency domain signals are called $X(\omega)$ if they are complex, and $ReX(\omega)$ & $ImX(\omega)$ if they are real. Discrete frequency domain signals are called $X[k]$ if they are complex, and $ReX[k]$ & $ImX[k]$ if they are real. The complex transforms have negative frequencies that extend from minus infinity to zero, and positive frequencies that extend from zero to positive infinity. The real transforms only use positive frequencies. If the frequency domain is periodic, we are only concerned with a single cycle, because the rest is redundant. For continuous frequency domains, the independent variable, ω, makes one complete period from $-\pi$ to π. In the discrete case, we use the period where k runs from 0 to N-1

Непрерывные сигналы частотного домена называются $X(\omega)$, если они комплексны, и $ReX(\omega)$ и $ImX(\omega)$, если они вещественны. Дискретные частотные сигналы домена(области) называются $X[k]$, если они комплексны, и $ReX[k]$ и $ImX[k]$, если они вещественны. Комплексные трансформанты имеют отрицательные частоты, которые простираются от отрицательной бесконечности, до нуля, и положительных частот, которые простираются от нуля до положительной бесконечности. Вещественные трансформанты используют только положительные частоты. Если частотный домен периодический, мы заинтересованы только единственным(отдельным) циклом(периодом), потому что остальное избыточно. Для непрерывных частотных доменов, независимой переменной, ω, делает один полный период от $-\pi$ до $-\pi$. В дискретном случае, мы используем период, где k выполняется от 0 до N-1

6. The Analysis Equations
6. Уравнения Анализа

The analysis equations operate by *correlation*, i.e., multiplying the time domain signal by a sinusoid and integrating (continuous time domain) or summing (discrete time domain) over the appropriate time domain section. If the time domain signal is aperiodic, the appropriate section is from minus infinity to positive infinity. If the time domain signal is periodic, the appropriate section is over any one complete period. The equations shown here are written with the integration (or summation) over the period: 0 to T (or 0 to N-1). However, any other complete period would give identical results, i.e., $-T$ to 0, $-T/2$ to $T/2$, etc.

Уравнения анализа работают *корреляцией*, то есть, умножая сигнал домена времени синусоидой и интегрируя (непрерывный домен времени) или суммируя (дискретный домен времени) по соответствующему разделу домена времени. Если сигнал домена времени апериодический, соответствующий раздел - от отрицательной бесконечности до положительной бесконечности. Если сигнал домена времени периодический, соответствующий раздел - в течение любого полного периода. Уравнения, показанные здесь, написаны с интегрированием (или суммированием) над периодом: 0 к T (или 0 к N-1). Однако, любой другой полный период дал бы идентичные результаты, то есть, -T к 0, -T/2 к T/2, и т.д.

7. The Synthesis Equations
7. Уравнения Синтеза

The synthesis equations describe how an individual value in the time domain is calculated from all the points in the frequency domain. This is done by multiplying the frequency domain by a sinusoid, and integrating (continuous frequency domain) or summing (discrete frequency domain) over the appropriate frequency domain section. If the frequency domain is complex and aperiodic, the appropriate section is negative infinity to positive infinity. If the frequency domain is complex and periodic, the appropriate section is over one complete cycle, i.e., -π to **π** (continuous frequency domain), or 0 to N-1 (discrete frequency domain). If the frequency domain is real and aperiodic, the appropriate section is zero to positive infinity, that is, only the positive frequencies. Lastly, if the frequency domain is real and periodic, the appropriate section is over the one-half cycle containing the positive frequencies, either 0 to **B** (continuous frequency domain) or 0 to N/2 (discrete frequency domain).

Уравнения синтеза описывают, как индивидуальное значение в домене времени рассчитано от всех точек в частотном домене. Это сделано, умножая частотный домен синусоидой, и интегрируя (непрерывный частотный домен) или суммируя (дискретный частотный домен) по соответствующему разделу частотного домена. Если частотный домен комплексный и апериодический, соответствующий раздел - отрицательная бесконечность к положительной бесконечности. Если частотный домен комплексный и периодический, соответствующий раздел - по одному полному периоду, то есть, -π к π. (непрерывный частотный домен), или 0 к N-1 (дискретный частотный домен). Если частотный домен вещественен и апериодический, соответствующий раздел от нуля к положительной бесконечности, то есть только положительные частоты. Наконец, если частотный домен вещественен и периодичен, соответствующий раздел - по половине периода, содержащего положительные частоты, или 0 к π (непрерывный частотный домен) или 0 к N/2 (дискретный частотный домен).

9. Scaling
9. Масштабирование

To make the analysis and synthesis equations undo each other, a scaling factor must be placed on one or the other equation. In Table 31-1, we have placed the scaling factors with the analysis equations. In the complex case, these scaling factors are: 1/N, 1/T, or 1/2π. Since the real transforms do not use negative frequencies, the scaling factors are twice as large: 2/N, 2/T, or 1/**B**. The real transforms also include a negative sign in the calculation of the imaginary part of the frequency spectrum (an option used to make the real transforms more consistent with the complex transforms). Lastly, the synthesis equations for the real DFT and the real Fourier Series have special scaling instructions involving $Re\ X(0)$ and $Re\ X\,[N/2]$.

Делать анализ и уравнения синтеза отменяют друг друга, коэффициент масштабирования должен быть помещен в одно или другое уравнение. В таблице 31-1, мы поместили коэффициенты масштабирования с уравнениями анализа. В комплексном случае, эти коэффициенты масштабирования: 1/N, 1/T, или 1/2 π. Так как вещественные трансформанты не используют отрицательные частоты, коэффициенты масштабирования - вдвое как большой: $2/N$, $2/T$, или $1/\pi$. Вещественные трансформанты также включают отрицательный сигнал в вычисление мнимой части спектра частот (опция обычно используемая, делать вещественные трансформанты более совместимыми с комплексными трансформантами). Наконец, уравнения синтеза для вещественного ДПФ и вещественного Ряда Фурье имеют специальные команды масштабирования, включающие $Re\ X(0)$ и $Re\ X[N/2]$.

10. Variations
10. Вариации

These equations may look different in other publications. Here are a few variations to watch out for:

Эти уравнения могут выглядеть отличными в других публикациях. Имеются несколько вариаций, чтобы не упустить:

- Using f instead of ω by the relation: $\omega = 2\pi f$
- Integrating over other periods, such as: $-T$ to 0, $-T/2$ to $T/2$, or 0 to T
- Moving all or part of the scaling factor to the synthesis equation
- Replacing the period with the fundamental frequency, $f_0 = 1/T$
- Using other variable names, for example, ω can become Ω in the DTFT, and $Re\ X[k]$ & $Im\ X[k]$ can become a_k & b_k in the Fourier Series.

- Использование f вместо ω Отношением: $\omega = 2\pi f$
- Интегрирование в течение других периодов, типа: $-T$ к 0, $-T/2$ к $T/2$, или 0 к T
- Перемещение всей или части фактора масштабирования к уравнению синтеза
- Замена периода фундаментальной частотой, $f_0 = 1/T$
- Использование других имен переменной, например, ω Может стать Ω в DTFT, и $Re\ X[k]$ и $Im\ X$, может стать a_k и b_k в Ряде Фурье

Why the Complex Fourier Transform is Used
Почему Комплексное Преобразование Фурье используется

It is painfully obvious from this chapter that the complex DFT is much more complicated than the real DFT. Are the benefits of the complex DFT really worth the effort to learn the intricate mathematics? The answer to this question depends on who you are, and what you plan on using DSP for. A basic premise of this book is that most practical DSP techniques can be understood and used without resorting to complex transforms. If you are learning DSP to assist in your non-DSP research or engineering, the complex DFT is probably overkill.

Это глубоко очевидно от этой главы, что комплексное ДПФ намного больше сложно, чем вещественное ДПФ. Являются ли выгоды от комплексного ДПФ, действительно стоящего усилие, чтобы изучить запутанную математику? Ответ на этот вопрос зависит от того, кем Вы являетесь, и для чего Вы планируете использовать ЦОС. Основная предпосылка этой книги - то, что наиболее практические методы ЦОС могут быть поняты и использоваться без того, чтобы прибегнуть к комплексным трансформантам. Если Вы узнаете, что ЦОС, чтобы помочь в вашем не - ЦОС исследовании или разработке, комплексное ДПФ - вероятно массовое убийство.

Nevertheless, complex mathematics is the primary language of those that specialize in DSP. If you do not understand this language, you cannot communicate with professionals in the field. This includes the ability to understand the DSP literature: books, papers, technical articles, etc. Why are complex techniques so popular with the professional DSP crowd?

Однако, комплексная математика - первичный язык тех, кто специализируются в ЦОС. Если Вы не понимаете этого языка, Вы не можете связываться с профессионалами в поле. Это включает способность понять литературу ЦОС: книги, журналы, технические статьи, и т.д. Почему комплексные методы так нравятся группе профессионалов в ЦОС?

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)

Комплексное преобразование	Вещественное преобразование
синтез $x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{j2\pi kn/N}$	*синтез* $x[n] = \sum_{k=0}^{N/2} Re X[k] \cos(2\pi kn/N) - Im X[k] \sin(2\pi kn/N)$
анализ $X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j2\pi kn/N}$	*анализ* $Re X[k] = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos(2\pi kn/N)$ $Im X[k] = \frac{-2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sin(2\pi kn/N)$
Домен времени: *x*[*n*] - комплексный, дискретный и периодический *n* выполняется в течении одного периода, от 0 к *N*-1	Домен времени: x[n] - вещественный, дискретный и периодический n выполняется в течении одного периода, от 0 к *N*-1
Частотный домен: *X*[*k*] - комплексный, дискретный и периодический *k* выполняется в течении одного периода, от 0 к *N*-1 *k* = 0 к *N*/2 являются положительными частотами *k* = *N*/2 к *N*-1 являются отрицательными частотами	Частотный домен: *Re X*[*k*] - реальный, дискретный и периодический *Im X*[*k*] - реальный, дискретный и периодический *k* выполняется в течении половины периода, от 0 к *N*/2 Примечание: Перед использованием уравнения синтеза, значения для *Re X*[0] и *Re X*[*N*/2] должны быть разделены на два.

Преобразование Фурье Дискретного Времени (DTFT)

Комплексное преобразование	Вещественное преобразование
синтез $x[n] = \int_{0}^{2\pi} X(\omega)\, e^{j\omega n}\, d\omega$	*синтез*
анализ $X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\omega n}$	*анализ*
Домен времени: x[n] - комплексный, дискретный и апериодический n выполняется от отрицательной до положительной бесконечности	Домен времени: x[n] - вещественный, дискретный и апериодический n выполняется от отрицательной до положительной бесконечности

Частотный домен:
$X(\omega)$ – комплексный, непрерывный и периодический
ω выполняется в течении единственного периода, от 0 к 2π
ω = 0 к π являются положительными частотами
ω = π to 2π являются отрицательными частотами

Частотный домен:
Re $X(\omega)$ - вещественный, непрерывный и периодический
Im $X(\omega)$ - вещественный, непрерывный и периодический
ω выполняется в течении половины периода, от 0 к π

ТАБЛИЦА 31-1 Преобразования Фурье

Ряд Фурье

Комплексное преобразование

синтез

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k]\, e^{j2\pi kt/T}$$

анализ

$$X[k] = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, e^{-j2\pi kt/T} dt$$

Домен времени:
$x(t)$ - комплексный, непрерывный и периодический
t выполняется в течении одного периода, от 0 к T

Frequency domain:
$X[k]$ - комплексный, дискретный, и апериодический
k выполняется от отрицательной к положительной бесконечности
$k > 0$ являются положительными частотами
$k < 0$ Являются отрицательными частотами

Вещественное преобразование

синтез

$$x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} Re X[k] \cos(2\pi kt/T) - Im X[k] \sin(2\pi kt/T)$$

анализ

$$Re X[k] = \frac{2}{T}\int_0^T x(t) \cos(2\pi kt/T) dt$$

$$Im X[k] = \frac{-2}{T}\int_0^T x(t) \sin(2\pi kt/T) dt$$

Домен времени:
$x(t)$ - комплексный, непрерывный и периодический
t выполняется в течении одного периода, от 0 к T

Frequency domain:
Re $X[k]$ - комплексный, дискретный, и апериодический
Im $X[k]$ - комплексный, дискретный, и апериодический
k выполняется от нуля к положительной бесконечности

Примечание: Перед использованием уравнения синтеза, значение для *Re* $X[0]$ должно быть разделено на два.

Преобразование Фурье

Комплексное преобразование

синтез

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega$$

анализ

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

Домен времени:
$x(t)$ I- вещественный, непрерывный и апериодический
t выполняется от отрицательной к положительной

Вещественное преобразование

синтез

$$x(t) = \int_0^{+\infty} Re X(\omega) \cos(\omega t) - Im X(\omega) \sin(\omega t) dt$$

анализ

$$Re X(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(\omega t) dt$$

$$Im X(\omega) = \frac{-1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(\omega t) dt$$

Домен времени:
$x(t)$ I- вещественный, непрерывный и апериодический

бесконечности Частотный домен: $X(\omega)$ - вещественный, непрерывный и апериодический ω выполняется от нуля к положительной бесконечности $\omega > 0$ являются положительными частотами $\omega < 0$ являются отрицательными частотами	t выполняется от отрицательной к положительной бесконечности Частотный домен: $Re\ X[\omega]$ - вещественный, непрерывный и апериодический $Im\ X[\omega]$ - вещественный, непрерывный и апериодический ω выполняется от нуля к положительной бесконечности

ТАБЛИЦА 31-1 Преобразования Фурье

There are several reasons we have already mentioned: compact equations, symmetry between the analysis and synthesis equations, symmetry between the time and frequency domains, inclusion of negative frequencies, a stepping stone to the Laplace and z-transforms, etc.

Имеются несколько причин, которые мы уже упомянули: компактные уравнения, симметрия между анализом и уравнениями синтеза, симметрия между доменами времени и частотными доменами, включение отрицательных частот, шагающий камень Лапласу и z-трансформантам, и т.д.

There is also a more philosophical reason we have not discussed, something called *truth*. We started this chapter by listing several ways that the real Fourier transform is awkward. When the complex Fourier transform was introduced, the problems vanished. Wonderful, we said, the complex Fourier transform has solved the difficulties.

Имеется также более философская причина, которую мы не обсудили, кое-что называемое правдой. Мы запустили эту главу, печатая несколько путей, которыми вещественное преобразование Фурье является неуклюжим. Когда комплексное преобразование Фурье было представлено, проблемы обращались в нуль. Мы сказали, замечательное комплексное преобразование Фурье решило трудности.

While this is true, it does not give the complex Fourier transform its proper due. Look at this situation this way. In spite of its abstract nature, the complex Fourier transform *properly* describes how physical systems behave. When we restrict the mathematics to be real numbers, problems arise. In other words, these problems are not *solved* by the complex Fourier transform, they are *introduced* by the real Fourier transform. In the world of mathematics, the complex Fourier transform is a greater truth than the real Fourier transform. This holds great appeal to mathematicians and academicians, a group that strives to expand human knowledge, rather than simply solving a particular problem at hand.

В то время как это истинно, это не дает комплексное преобразование Фурье его надлежащий образом. Смотрите на это положение(ситуацию) этот путь. Несмотря на его абстрактный характер(природу), комплексное преобразование Фурье должным образом описывает, как физические системы ведут себя. Когда мы ограничиваем математику, чтобы быть вещественными числами, проблемы возникают. Другими словами, эти проблемы не *решены* комплексным преобразованием Фурье, они *представлены(допущены; внесены)* вещественным преобразованием Фурье. В мире математики, комплексное преобразование Фурье - большая правда чем вещественное преобразование Фурье. Это проводит(держит) большую обращение(привлекательность) математикам и академикам, группа, которая стремится разворачивать человеческое знание, скорее чем просто решение специфической проблемы под рукой.