ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ КОДИРОВАНИЯ ПОСРЕДСТВОМ ПОВТОРНЫХ ПРОЖЕКТОРОВ

Аноян А.Ж.

Институт Проблем Информатики и Автоматизации
Национальной Академии Наук Республики Армения,
375044, Ереван ул. Севака 1, тел: (3742) 28-31-20, E-mail: spl@ipia.sci.am

Реферат. Работа посвящена построению двоичных кодов посредством повторных прожекторов. Декодирование производится при помощи преобразования Адамара.

1. ВВЕДЕНИЕ

Матрицей Адамара порядка n называется (-1,+1) - матрица H_n размерности n х n удовлетворяющая условию $H_n H_n^T = H_n^T H_n = nI_n$, где T - знак транспонирования, I_n- единичная матрица порядка n. Доказано, что если H_n - матрица Адамара, то n кратно четырем. Обратная задача, а именно задача построения или существования матриц Адамара любого порядка n кратного четырем, до сих пор не решена, хотя опубликованы сотни работ посвященных этой проблеме (см. например, [1, 2, 3] и их библиографии). Ниже будем использовать матрицы Адамара порядка 2^k, которые называются также матрицами Сильвестра [1], и строятся согласно следующей рекуррентной формуле:

$$\mathrm{H}_{2^k} = \begin{pmatrix} \mathrm{H}_{2^k} & \mathrm{H}_{2^k} \\ \mathrm{H}_{2^k} & -\mathrm{H}_{2^k} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

где $H_1 = (1)$.

Известно также, что из матрицы Сильвестра порядка 2^n сртоится блоковый код с мощностью 2^{n+1}, длиной 2^n и с минимальным расстоянием 2^{n-1} [4, 5], и следовательно код Адамара может исправлять $[2^{n-2}$-0.5] ошибок. (Здесь и ниже [x] - целая часть числа x). Построение кодов Адамара с вышеприведенными параметрами очень просто. В матрице Адамара элементы +1 заменяются нулями, а элементы -1 - единицами. Затем к полученным кодовым словам добавляются их дополнения.

Декодирование производится следующим образом. В полученном кодовом слове все нули заменяются единицами, а единицы минус единицами. Затем к полученному вектору применяется преобразование Адамара и в его спектре определяется наибольший по модулю коэффициент. Пусть наибольший по модулю коэффициент найден в i-ом месте $i = 0, \dots , 2^{n-1}$.
Если этот коэффициент положителен, то считается, что послано было кодовое слово под номером i. Если же он отрицателен, то считается, что послано было $i+2^n$-е кодовое слово.

2. ПОСТРОЕНИЕ КОДОВ ПОВТОРНЫХ ПРОЖЕКТОРОВ

Пусть $(c_1, c_2, \dots , c_k)$ - двоичное информационное слово, а $P_i = (p_{i1}, p_{i2}, \dots , p_{ik})$, $P = \{P_i\}_{i=1}^n$ – множество ненулевых двоичных векторов, причем мощность множества P равна 2^k-1. Двоичные слова P_i называются прожекторами кода. Кодовое слово $u = (u_1, u_2, \dots , u_n)$, соответствующее информационному слову $(c_1, c_2, \dots , c_k)$ определяется посредством прожекторов согласно следующей формуле

$$u_i = \sum_{j=1}^{k} c_j p_{ij}, \qquad i = 1, 2, \dots, n, \qquad (2)$$

где Σ - знак суммирования по модулю 2.

Процесс декодирования происходит следующим образом. Декодер получает кодовое слово $(u_1, u_2, \dots , u_n)$ и обрабатывает его, записывая результаты в таблицу. Если $u_i = 0$, то результат в таблице, соответствующий адресу P_i увеличивается на 1, если же $u_i = 1$, то он уменьшается на 1. После такого заполнения таблицы ее результаты будут представлять собой координаты некоторого вектора V. Размерность вектора V равна 2^k. Далее к вектору V применяется преобразование Адамара H_kV. Затем определяется наибольший положительный коэффициент преобразования (т.е. наибольшая положительная координата спектра вектора V). Адрес в таблице декодера, соответствующий этому коэффициенту и будет являться десятичным представлением исходного информационного слова
$(c_1, c_2, \dots , c_k)$.

3. ОЦЕНКА КОЛИЧЕСТВА ИСПРАВЛЯЕМЫХ ОШИБОК

Теорема 1. Пусть $\mathrm{H}_n = \{\mathrm{h}_{i,j}\}_{i,j=1}^{2^n}$ - матрица Сильвестра порядка 2^n. Тогда если строки p и q $(p \neq q)$ матрицы H_n совпадают в некоторых столбцах $s_1, s_2, \ldots, s_{2^{n-1}}$, т.е имеет место равенство $h_{p,s_i} = h_{q,s_i}$, $i=1,2, \ldots 2^{n-1}$, то для любой k-ой строки матрицы H_n существует строка l $(l \neq k)$ такая, что они совпадают в тех же столбцах, что и строки p и q.

Доказательство. Так как H_n матрица Адамара типа Сильвестра, то она состоит из 4-х матриц Адамара порядка 2^{n-1} и имеет вид (1). Очевидно, что все столбцы совпадения $s_1, s_2, \ldots, s_{2^{n-1}}$ строк p и q не могут быть в правой части матрицы H_n. Заметим также, что в правой части матрицы H_n не может быть больше совпадений чем в левой, так же как и в левой части не может быть больше совпадений чем в правой. В противном случае ортогональность правых и левых матриц Адамара H_{n-1} была бы нарушена.

Остается 2 случая. Либо все совпадения находятся в левой части H_n, либо половина совпадений находится в левой части, а другая половина совпадений в правой части H_n. Из построения матриц Сильвестра следует, что если все совпадения находятся в левой части H_n, т.е. $s_i=i, i=1,2,\ldots,2^{n-1}$, то для любой строки k существует строка l, которая совпадает с k также в левой части матрицы H_n. Действительно, если все s_i, $i=1,2, \ldots, 2^{n-1}$ находятся в левой половине H_n, то одна из строк p или q должна находится в ее верхней половине, а другая в нижней (если бы обе одновременно находились в верхней или нижней части H_n, то ортогональность левой верхней или левой нижней матрицы Адамара H_{n-1} была бы нарушена). Ясно, что для строки k из верхней половины (нижней половины) H_n существует строка l из ее нижней половины (верхней половины) такая, что совпадает с k в левой части H_n, так как для каждой строки из верхней левой матрицы H_{n-1} существует аналогичная ей в нижней левой матрице H_{n-1}.

Пусть теперь половина совпадений находится в левой части, а другая половина в правой, то есть столбцы с номерами $s_1, s_2, \ldots, s_{2^{n-2}}$ находятся в левой части, а столбцы с номерами - $s_{2^{n-2}+1}, s_{2^{n-2}+2}, \ldots, s_{2^{n-1}}$ в правой. Покажем, что утверждение теоремы достаточно доказать для половины совпадений находящихся в левой части H_n, то есть для $s_1, s_2, \ldots, s_{2^{n-2}}$. Таким образом необходимо доказать, что если две строки совпадают в столбцах $s_1, s_2, \ldots, s_{2^{n-2}}$, то совпадения правой части $s_{2^{n-2}+1}, s_{2^{n-2}+2}, \ldots, s_{2^{n-1}}$ каким то образом зависят от $s_1, s_2, \ldots, s_{2^{n-2}}$.

Рассмотрим случаи:

1) Строки p и q обе одновременно находятся или в верхней или в нижней половине матрицы H_n. Покажем, что имеет место равенство:

$$s_{2^{n-2}+i} = s_i + 2^{n-2}, \qquad i=1,2, \ldots, 2^{n-2}. \tag{3}$$

Действительно, если обе строки находятся в верхней половине H_n, то в силу того, что в ее верхней части находятся две идентичные матрицы H_{n-1} ясно, что левым совпадениям $s_1, s_2, \ldots, s_{2^{n-2}}$ в левой верхней матрице H_{n-1} соответствуют совпадения верхней правой матрицы H_{n-1}. Т.е. имеет место равенство (3). Пусть теперь обе строки находятся в нижней части матрицы H_n. Т.к. в матрице $-H_{n-1}$ совпадения сохраняются, то выполнение равенства (3) становится очевидным.

2) Теперь предположим, что одна из строк находится в верхней, а другая - в нижней половине матрицы H_n. Допустим, что в левой части матрицы H_n эти две строки совпадают в столбцах $s_1, s_2, \ldots, s_{2^{n-2}}$. Пусть $r_1, r_2, \ldots, r_{2^{n-2}}$ номера тех столбцов, в которых эти строки не совпадают и которые находятся также в левой части H_n. Докажем, что в этом случае имеет место равенство:

$$s_{2^{n-2}+i} = r_i + 2^{n-2}, \qquad i=1,2,\ldots,2^{n-2}. \tag{4}$$

Пусть строка p находится в верхней половине H_n, а строка q - в ее нижней половине. Из матриц Сильвестра следует, что для данной строки q существует строка $q' = q-2^{n-1}$ $(q' \neq p)$, находящаяся в верхней части H_n такая, что строки p и q' совпадают в столбцах $s_1, s_2, \ldots, s_{2^{n-2}}$ и, следовательно, не совпадают в столбцах $r_1, r_2, \ldots, r_{2^{n-2}}$. Согласно первому случаю, строки p и q' совпадают также и в

$s_{2^{n-2}+1}, s_{2^{n-2}+2}, \ldots, s_{2^{n-1}}$ столбцах, и различаются в $r_{2^{n-2}+1}, r_{2^{n-2}+2}, \ldots, r_{2^{n-1}}$ столбцах. Последние, в силу идентичности верхних матриц H_{n-1}, также выражаются через $r_1, r_2, \ldots, r_{2^{n-2}}$:

$$r_{2^{n-2}+i} = r_i + 2^{n-2}, \qquad i=1,2,\ldots,2^{n-2}. \tag{5}$$

Строки q и q' различаются только в правой части. Это означает, что в тех столбцах (в правой части H_n), в которых строки pи q' не совпадают, строки p и q совпадают. Совпадения и различия в левой части H_n идентичны. Таким образом $s_i = r_i$, $\quad i=2^{n-2}+1, 2^{n-2}+2, \ldots, 2^{n-1}$. А отсюда и из (5) следует (4).

Осталось доказать условие теоремы для 2^{n-2} совпадений в левой половине матрицы H_n. Так как левые матрицы H_{n-1} идентичны, то любой строке i из нижней левой матрицы H_{n-1} соответствует строка $i' = i - 2^{n-1}$ из верхней левой матрицы H_{n-1} с которой она совпадает. Доказательство проводится идентично вышедоказанному, просто в этом случае имеем матрицу Сильвестра малой размерности. Продолжая таким образом в самом конце мы придем к доказателству условия теоремы для матрицы H_2 с одним совпадением в левой части.

Теорема 2. [7] Пусть H_n - матрица Сильвестра порядка k $(k=2^n)$, а действительные векторы-столбцы $A = (a_i)_{i=1}^k$, $B = (b_i)_{i=1}^k$ такие, что $|a_i|=|b_i|$ $i=1, 2, \ldots, k$, при этом знаки координат векторов A и B совпадают соответственно со знаками p-ой и q-ой строк матрицы Сильвестра H_n. Тогда спектры векторов A и B имеют одинаковые координаты с разным порядком следования.

Доказательство. Пусть $H_nA = (u_1, u_2, \ldots, u_k)^T$ и $H_nB = (v_1, v_2, \ldots, v_k)^T$. Так как знаки всех координат вектора A совпадают со знаками p-ой строки, то $u_p=|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_k|$. Обозначим $s_1, s_2, \ldots, s_{k/2}$ столбцы в которых строки p и q совпадают и $r_1, r_2, \ldots, r_{k/2}$ - столбцы в которых они не совпадают. Тогда имеет место равенство $u_q = |a_{s_1}| + \ldots + |a_{s_{k/2}}| - |a_{r_1}| - \ldots - |a_{r_{k/2}}|$.

Аналогичным образом $v_p = |b_{s_1}| + \ldots + |b_{s_{k/2}}| - |b_{r_1}| - \ldots - |b_{r_{k/2}}|$.

Так как $|a_i|=|b_i|$, то $v_p = |a_{s_1}| + \ldots + |a_{s_{k/2}}| - |a_{r_1}| - \ldots - |a_{r_{k/2}}|$. Т.е. $u_p = v_q$ и $u_q = v_p$.

Докажем теперь, что для любой строки m существует строка с номером n такая, что $u_m = v_n$ $(m,n=1, \ldots, k)$. Согласно теореме 1 для любой строки m матрицы H_n существует такая строка n, что m и n совпадают в тех столбцах, что и строки p и q, т.е. совпадение и не совпадение имеют место соответственно в столбцах с номерами $s_1, s_2, \ldots, s_{k/2}$ и $r_1, r_2, \ldots, r_{k/2}$. Отсюда следует равенство:

$$u_m = |a_{s_1}| + \ldots + |a_{s_{k/2}}| - |a_{r_1}| - \ldots - |a_{r_{k/2}}| = |b_{s_1}| + \ldots + |b_{s_{k/2}}| - |b_{r_1}| - \ldots - |b_{r_{k/2}}| = v_n,$$

что и доказывает теорему.

Не трудно убедится, что вектор-столбец V, метод определения которого был описан во втором параграфе, удовлетворяет условию теоремы 2. Т.е. какое бы кодовое слово не передавалось по каналу, векторы преобразования Адамара H_nV всегда будут состоять из одних и тех же чисел, но с различными порядками следования, при условии безошибочной передачи. Это означает также, что внезависимости от информационного слова, второй по величине коэффициент преобразования всегда будет одним и тем же числом, а в первую очередь с ним можно спутать максимальный коэффициент, если произошли ошибки при передаче.

Пусть M - число прожекторов и одновременно длина кодового слова, m - второй по величине элемент спектра Адамара. Тогда, с учетом вышеприведенного анализа, можем утверждать, что построенный выше код исправляет t ошибок:

$$t < \frac{M - m}{4} \tag{6}$$

4. ПРИМЕР

В качестве примера рассмотрим действие кодера повторных прожекторов для $M = 21$ и $k = 3$, где информационное слово имеет вид: $(c_1, c_2, c_3) = (0, 1, 1)$. В качестве прожекторов рассматриваем двоичные наборы соответствующие десятичным числам 1, 2, … , 7. Каждый из прожекторов повторяется 3 раза. Согласно формуле (2) находим кодовое слово 111111000000111111000, которое передается через канал. Если в канале не произошло ошибок декодер получит его и по методу описанному выше, образует вектор $V = (0, -3, -3, +3, +3, -3, -3, +3)$. Далее, над вектором V производится преобразование Адамара, т.е. $H_3V = (-3, -3, -3, +21, -3, -3, -3, -3)^T$. Так как наибольший элемент +21 в спектральном векторе имеет индекс 3, то декодер решает, что было передано информационное слово (0, 1, 1). Согласно (6) построенный код длины 21 исправляет 5 ошибок. В самом деле, пусть в ходе передачи произошло 5 ошибок. В нижеприведенной таблице ошибки выделены жирным шрифтом и подчеркнуты.

Переданое кодовое слово	1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0
Полученное кодовое слово	1 1 $\underline{0}$ 1 1 1 $\underline{1}$ $\underline{1}$ 0 0 0 0 1 1 1 1 1 $\underline{0}$ $\underline{1}$ 0 0

В этом случае декодер определяет следующий вектор: V=(0, -1, -3, -1, +3, -3, -1, +1). Затем, вычисляя спектральный вектор H_3V =(-5, +3, +3, +11, -5, -5, +3, -5), декодер снова решает, что было передано информационное слово (0, 1, 1). Отметим, что при проведении экспериментов использовался также алгоритм быстрого преобразования Адамара [6]. Доказано также, что если какой-либо один из прожекторов повторить только 2 раза (а не три), то получается аналогичный результат. То есть фактически построен код длинны 20 исправляющий 5 ошибок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wallis W.D., Street A.P., Wallis J.P. Combinatorics: Room Squares, Sum Free Sets, Hadamard Matrices. Lecture Notes in Mathematics, vol.292, 1972.
2. Agaian S.S. Hadamard Matrices and Their Applications. Lecture Notes in Mathematics, vol.1168, 1985.
3. Sarukhanyan H.G. Hadamard Matrices: Construction Mathods and Applications. First Int. Workshop on Transforms and Filter Banks, (Finland), 1998, p. 95-129.
4. Питерсон У., Уэлдон Э. Коды исправляющие ошибки, Изд. "Мир", М. 1976.
5. Yarlagadda R.K.R., Hershey J.E. Hadamard Matrix Analysis and Synthesis With Applications to Communications and Signal/Image Processing, Kluwer Academic Publishers, Boston, London, 1997.
6. Ahmed N., Rao K.R. Orthogonal Transforms for Digital Signal Processing. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1975.
7. Аноян А. Об одном методе кодирования с использованием преобразования Адамара.

A CODING METHOD USING REPEATED PROJECTORS

Anoyan A.J.

Institute for Informatics and Automation Problems of
National Academy of Sciences of Republic of Armenia.
Yerevan, 375044, Sevak 1, tel: (3742) 28-31-20, e-mail: spl@ipia.sci.am

Abstract. In this paper a coding metod using repeated projectors is considered and a decoding metod based on Hadamard transform is developed.

1. INTRODUCTION

H_n (-1, +1) n x n dimensional matrix are called Hadamard matrix of order n, if it satisfies to following conditions: $H_n H_n^T = H_n^T H_n = nI_n$, where T is a transposition sign, I_n is an identity matrix of order n. It is proved that if H_n is an Hadamard matrix of order n, $n > 2$, then $n \equiv 0(mod4)$. The inverse problem, i.e. the problem of the construction or proof of the existence of Hadamard matrices of all orders, which are multiple to four is unsolved up today, though hundreds of papers and many books dedicated on Hadamard matrices construction and applications have been published (See, for example, [1, 2, 3] and their references). Below we will use Hadamard matrices of order 2^k, which are called also Silvester matrices [1], and their construction has the following form:

$$\mathrm{H}_{2^k} = \begin{pmatrix} \mathrm{H}_{2^k} & \mathrm{H}_{2^k} \\ \mathrm{H}_{2^k} & -\mathrm{H}_{2^k} \end{pmatrix} \quad (1)$$

where $H_1 = (1)$.

It is known also, that block code with power 2^{n+1}, length 2^n with minimal distance 2^{n-1} is constructed from Silvester matrix of order 2^n [4, 5], and consequently Hadamard code can correct [2^{n-2}-0.5] errors (here and below [x] is a integer part of number x). The construction of Hadmarad codes is very simple. In Hadamard matrix the elements +1 changing to zeros and the elements -1 to ones. Then the supplements of the obtained coding words are added.

The code can be decoded using the Hadamard transform. First of all we convert the zeros to plus one and the ones to minus one. Then the Hadamard transform is taken to the obtained vector and the transform largest coefficient in spectrum is defined. Let this coefficient be found at the i-th row $i = 0, \dots, 2^{n-1}$. If it is positive then we declare that the i-th code word was sent, if negative, we declare for the $i+2^n$-st code word.

2. CONSTRUCTION OF CODES OF REPEATED PROJECTORS

Let $(c_1, c_2, \dots, c_k)$ is a binary information word and $P = \{P_i\}_{i=1}^{n}$ is a set of zeroless binary vectors $P_i = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{ik})$. The power of set P is equal to 2^k-1. The binary vectors P_i are called projectors of code. The code word $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ corresponding to information word $(c_1, c_2, \dots, c_k)$ is defined by means of projectors by following formula:

$$u_i = \sum_{j=1}^{k} c_j p_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{2}$$

where $\sum$ is the modulo 2 addition sign.

Decoding process proceeds by the following way. Decoder has receive code word $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ and process it, writing results to the table. If $u_i = 0$, then result in the table corresponding to the address P_I is incremented by 1 and if $u_i = 1$, then it decremented by 1. After the table has been filled, the table contents are considered as a 2^k x 1 vector V. The Hadamard transform H_kV is then taken. The biggest coefficient of the transform is then identified. The table address corresponding to the location of the biggest coefficient is the estimate of the decoded information word, $(c_1, c_2, \dots, c_k)$.

3. THE ESTIMATE OF ERRORS CORRECTING NUMBERS

In [7] there are proved following two theorems:

Theorem 1. Let $H_n = \{h_{i,j}\}_{i,j=1}^{2^n}$ is a Silvester matrix of order 2^n. If p and q ($p \neq q$) rows of matrix H_n coincide in some columns $s_1, s_2, \dots, s_{2^{n-1}}$, i.e. $h_{p,s_i} = h_{q,s_i}$, $i=1,2, \dots 2^{n-1}$, then for any k-th row of matrix H_n there exists l-th row that coincides with k in those columns in which coincide rows p and q.

Theorem 2. Let H_n is a Silvester matrix of order k ($k = 2^n$) and real vector-columns $A = (a_i)_{i=1}^{k}$, $B = (b_i)_{i=1}^{k}$, where $|a_i|=|b_i|$, $i=1, 2, \dots, k$, when the signs of A and B vectors' components coincide accordingly to the signs of p-th and q-th rows of Silvester matrix H_n. Then the spectors of vectors A and B will have same coordinates with different order of consecution.

It is not difficult to see that vector-column V , the construction method of which was describe in the second paragraph, satisfies to the condition of Theorem 2, i.e. for any code word, sending over a noiseless channel, their spectors H_nV always will consist of the same components with different order of consecution. It means also that the second by value coefficient of Hadamard transform always will be the same number, independently on sending information word, and decoder can mix up the maximal coefficient with thats one first of all, if there are some errors accrued by sending a code word over a noisy channel.

Let M is a number of projectors and at the same time the length of the code word, m is a second coefficient of the Hadamard transform. Then, by means of above gived analysis, we can confirm that above constructed code correct t errors:

$$t < \frac{M - m}{4} \tag{6}$$

4. EXAMPLE

As an example, below depicts the action of the Coder of Repeated Projectors for M = 21 and k = 3, where information word is a (c_1, c_2, c_3) = (0, 1, 1). As projectors we consider the binary vectors that correspond to the decimal numbers 1, 2, … , 7. Every projector are repeated 3 times. According to the formula (2) we find code word 111111000000111111000, which is sent over the channel. If there are no errors in the channel, decoder will receive it and constitute a vector V = (0, -3, -3, +3, +3, -3, -3, +3). Then a Hadamard transform is taken: H_3V = $(-3, -3, -3, +21, -3, -3, -3, -3)^T$. Since a maxlimal coefficient +21 in spectral vector has index 3, so decoder decides that (0, 1, 1) information word was sent. According to the (6) constructed code with length 21 corrects 5 errors. For example, let us assume that five bits out of the twenty one sent were received incorrectly. Let these bits be identified in bold and underline form as indicated in table below.

Sended code word	1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0
Received code word	1 1 <u>**0**</u> 1 1 1 <u>**1**</u> <u>**1**</u> 0 0 0 0 1 1 1 1 1 <u>**0**</u> <u>**1**</u> 0 0

In this case decoder constitute following vector: V=(0, -1, -3, -1, +3, -3, -1, +1). Then, calculating spectral vector H_3V =(-5, +3, +3, +11, -5, -5, +3, -5), decoder again decides that information word (0, 1, 1) was sent. Note that during the experiments the algorithm of the Fast Hadamard Transform [6] is used. It is proved that if any one of projectors to repeate only 2 times , then the same result is obtained, i.e. there are the code with length 20 that corrects 5 errors was constructed.

REFERENCES

[1] Wallis W.D., Street A.P., Wallis J.P. Combinatorics: Room Squares, Sum Free Sets, Hadamard Matrices. Lecture Notes in Mathematics, vol.292, 1972.
[2] Agaian S.S. Hadamard Matrices and Their Applications. Lecture Notes in Mathematics, vol.1168, 1985.
[3] Sarukhanyan H.G. Hadamard Matrices: Construction Mathods and Applications. First Int. Workshop on Transforms and Filter Banks, (Finland), 1998, p. 95-129.
[4] Питерсон У., Уэлдон Э. Коды исправляющие ошибки, Изд. "Мир", М. 1976.
[5] Yarlagadda R.K.R., Hershey J.E. Hadamard Matrix Analysis and Synthesis With Applications to Communications and Signal/Image Processing, Kluwer Academic Publishers, Boston, London, 1997.
[6] Ahmed N., Rao K.R. Orthogonal Transforms for Digital Signal Processing. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1975.
[7] Аноян А. Об одном методе кодирования с использованием преобразования Адамара.