АНАЛИЗ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ОЦЕНКИ РЕКУРСИВНОГО АЛГОРИТМА Я.З. ЦЫПКИНА С ПОЗИЦИЙ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Буляница А.Л., Курочкин В.Е., Бурылов Д.А.

Институт аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург
198103 Санкт-Петербург, Рижский. пр. 26, тел. (812) 251-7223, e-mail: kuroch@ianin.spb.su

Реферат. Проанализирована методика определения условий несмещенности и состоятельности оценки алгоритма стохастической аппроксимации Роббинса-Монро в модификации Цыпкина. Отмечено, что сформулированные условия вступают в логическое противоречие с базовым принципом – априорной неопределенностью закона распределения помехи, поскольку для их выполнения требуется знание нетривиальной количественной информации – величины плотности распределения вероятностей помехи на границе зоны нечувствительности. Для доказательства указанных асимптотических свойств предложено свести алгоритм к структуре дискретной нелинейной системы автоматического управления и исследовать асимптотическую устойчивость ее положения равновесия.

1. ВВЕДЕНИЕ

Алгоритм стохастической аппроксимации Роббинса-Монро хорошо известен еще с пятидесятых годов, но его интенсивное изучение и модификация в нашей стране приходятся на семидесятые годы. Главные успехи в этом направлении связаны с именем академика Я.З. Цыпкина [1,2] и с представителями его школы А.А. Бедельбаевой [3], Т.П. Красулиной [4] и др. Результатом исследований явилась модификация алгоритма Роббинса-Монро в следующей форме:

$$c_{n+1} = c_n - \beta / n \cdot \psi(c_n - x_{n+1}). \tag{1}$$

При этом, $\psi(z) = \begin{cases} -1, z \le -\Delta \\ 0, |z| < \Delta \\ 1, z \ge \Delta \end{cases}$, $x_{n+1}=c^*+\xi_{n+1}$ — измерение, ξ_{n+1} — помеха, c_n, c_{n+1} — оценки величины c^* на n-ом и n+1-ом шагах оценивания, β — параметр алгоритма, 2Δ — величина зоны нечувствительности [3].

Важнейшим, с нашей точки зрения, теоретическим результатом явилось доказательство свойства минимаксности оценки алгоритма (1) в условиях априорной неопределенности о помехе: наихудшим (по дисперсии ошибки) являлось симметричное распределение Лапласа, и исходя из этого факта осуществлялся подбор функции ψ, что обеспечивало минимум дисперсии ошибки [1,2]. Однако, уже при достижении указанного результата речь шла не о полной априорной неопределенности, а о более узком классе невырожденных распределений.

Исследуя алгоритм (1), А.А. Бедельбаевой [3] удалось сформулировать условия, при которых оценка c_n является несмещенной и состоятельной. Кроме того, ею была проанализирована относительная эффективность алгоритма по сравнению с методом наименьших квадратов для некоторых видов помех (нормальная, равномерная, лапласcовская, а также модели типа «выбросов»).

Приведенная в [3] зависимость дисперсии ошибки оценивания от плотности (p) и функции (F) распределения помехи, а также от параметра Δ, позволила сформулировать условие несмещенности и состоятельности оценки c_n: $\beta > \beta_{min}$, где $\beta_{min} = \left[4p(\Delta)\right]^{-1}$. Кроме того, помеха должна быть симметрична.

Минимальная дисперсия ошибки оценивания достигается при условии $\beta=2\beta_{min}$. Значительно позднее был рассмотрен интересный частный случай треугольной (Симпсоновской) помехи и показано, что при оптимальном выборе параметра β дисперсия ошибки оценивания не зависит от величины Δ [5].

Следует отметить, что для доказательства асимптотических свойств оценки была использована информация о плотности распределения вероятностей помехи на границе зоны нечувствительности.

2. АНАЛИЗ СИТУАЦИИ

Полученные результаты относительно важнейших асимптотических свойств оценки – несмещенности и состоятельности – базируются на нетривиальной информации о величине плотности распределения помехи на границе зоны нечувствительности (в общем случае, даже не в нуле). Кроме того, требование симметричности помехи, хотя и принимается многими исследователями априорно (например, так называемые «аксиомы Маликова»), также носит ограничительный характер.

Таким образом, доказательство несмещенности и состоятельности оценки c_n было проведено в условиях существенно отличных от анонсированной априорной неопределенности о помехе, даже если ограничиваться только невырожденными помехами. По этой причине подобный метод доказательства не представляется полностью убедительным.

Цель данной работы –предложить другой возможный путь доказательства указанных асимптотических свойств оценки, свободный от подобного идеологического несоответствия.

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АЛГОРИТМА (1) К СИСТЕМЕ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Введем ошибку оценивания истинной измеряемой величины с* как $\varepsilon_n = c_n - c^*$. Тогда свойство несмещенности оценки формулируется как $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Под состоятельностью следует понимать достижение указанного результата при любом законе распределения помех, то есть, независимо от помехи. Алгоритм (1) приводится к системе автоматического управления (САУ), приведенной на рис.1.

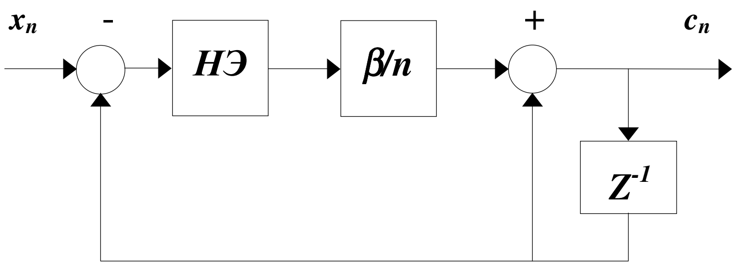

Рис. 1. Структурная схема САУ, реализующей алгоритм (1) (пояснения в тексте).

Представленная САУ обладает интересными свойствами. Она дискретна, обладает двумя контурами обратной связи, одна из которых отрицательна, имеет нелинейный элемент НЭ (неидеальное реле с зоной нечувствительности 2Δ, которое реализует функцию ψ), звено с переменными параметрами, реализующее умножение на масштаб β / n, а также линию задержки на 1 такт (Z^{-1}). Нетрудно видеть, что сформулированное выше требование несмещенности оценки совпадает с формулировкой асимптотической устойчивости САУ.

Обзор различных методик оценки устойчивости нелинейных САУ и анализ устойчивости данной структуры представлен в работе [6].

Удалось доказать, что

– при отсутствии зоны нечувствительности, то есть, при идеальном реле в качестве нелинейного элемента (или сигнатурном алгоритме (1)), данная САУ не имеет асимптотически устойчивого положения равновесия;
– в случае ограничения производной передаточной характеристики нелинейного элемента (например, путем введения зоны нечувствительности) асимптотически устойчивое положение равновесия достижимо;
– на характеристики положения равновесия параметры помехи никакого влияния не оказывают.

Понятие «зоны нечувствительности» нуждается в некотором пояснении. С одной стороны, можно ввести «алгоритмическую зону нечувствительности» – формальное задание величины параметра Δ алгоритма (1). С другой стороны, существует и «физическая зона нечувствительности», определяемая условиями эксперимента и обработки данных (например, разрядностью аналого-цифровых преобразователей, микропроцессорными ошибками округления и т.п.). То есть, случай отсутствия зоны нечувствительности является некоторой вычислительной абстракцией.

4. Заключение

Авторы ставили своей целью обратить внимание на существенное логическое несоответствие между анонсированным базовым принципом априорной неопределенности о законе распределения помехи и условиями и ограничениями, при которых были доказаны [3] важнейшие асимптотические свойства оценки c_n, полученной при применении алгоритма (1).

Предложенный путь представления алгоритма (1) в форме САУ позволил решить аналогичную задачу – определение условий асимптотической устойчивости положения равновесия. Таким единственным условием является наличие «зоны нечувствительности».

Работа выполнена при частичной поддержке ФЦП «Интеграция» в рамках проекта № А0141 «Оптика и научное приборостроение», раздел «Поддержка УНЦ «Приборы и средства автоматизации для научных исследований» на базе Санкт-Петербургского Государственного университета аэрокосмического приборостроения и Института аналитического приборостроения РАН.

Литература

1. Цыпкин Я.З. Оптимизация в условиях неопределенности //Доклады АН СССР. 1976. Т.228. №6. С.1306-1309.
2. Цыпкин Я.З., Поляк Б.Т. Огрубленный метод максимального правдоподобия //В сб. “Динамика систем”. Изд-во Горьковского ун-та. 1977. №12. С.22-46.
3. Бедельбаева А.А. Релейные алгоритмы оценивания //Автоматика и телемехан. 1978. №1. С.87-95.
4. Красулина Т.П. О сходимости снизу модифицированного процесса Роббинса-Монро //Автоматика и телемеханика. 1992. №4. С.73-76.
5. Буляница А.Л., Курочкин В.Е. Свойство независимости точности оценивания от величины зоны нечувствительности в релейном алгоритме //Автоматика и телемеханика. 1999. №9. С.187-189.
6. Буляница А.Л., Бурылов Д.А. Частотные критерии устойчивости оценки рекуррентного алгоритма для сигнала постоянного уровня //Научное приборостроение. 1998. Т.8. №1-2. С.37-41.

ANALYSIS OF THE ASYMPTOTIC PROPERTIES OF THE TSIPKINE'S RECURSIVE ALGORITHM ESTIMATE IN TERMS OF AUTOMATIC CONTROL THEORY

Bulianitsa A.L., Kurochkin V.E., Burylov D.A.

Institute for Analytical Instrumentation RAS, Rizhsky Pr. 26, St. Petersburg 198103, Russia
Phone: (812) 251-7223, E-Mail: kuroch@ianin.spb.su

Abstract. A method to determine the unbiasness and consistency conditions for the estimate of Tsipkine's modification of the Robbins-Monro stochastic approximation algorithm is analyzed. It is noted that the conditions formulated contradict the basic principle of an a priori uncertainty of the noise distribution law since their fulfilment requires the knowledge of non-trivial quantitative data, namely, the value of the noise probability density function at the boundary of the dead zone. To prove the asymptotic properties stated, it is offered to reduce the algorithm to an automatic control system and study the asymptotic stability of its' equilibrium state.

1. INTRODUCTION

The Robbins-Monro stochastic approximation algorithm has been well known already since 50s, but its studies in Russia began in the 70s. The main advances are associated with the name of Ya.Z. Tsipkine [1,2] and his collegues [3,4]. The studies have resulted in the modification of this algorithm in form:

$$c_{n+1} = c_n - \beta / n \cdot \psi(c_n - x_{n+1}). \tag{1}$$

Here, $\psi(z) = \begin{cases} -1, z \le -\Delta \\ 0, |z| < \Delta \\ 1, z \ge \Delta \end{cases}$, $x_{n+1}=c^*+\xi_{n+1}$ is the measurement, ξ_{n+1} is the noise, c_n, c_{n+1} are the estimates of c^* at the n-th and (n+1)-th estimation steps, β is the algorithm parameter, 2Δ is the dead zone size [3].

The most important result is the proof of the minimax property of the algorithm (1) estimate under a priori noise uncertainty conditions: the Laplace distribution was found to be worst (in respect of error variance) and this choice of ψ has provided the minimum error variance [1,2]. But this result was achieved not for complete a priori uncertainty but rather for a narrower class of non-singular distributions.

A.A. Bedelbaeva [3] has formulated the conditions when the c_n estimate is unbiased and consistent and analyzed the algorithm efficiency as compared to the least-squares technique for some types of noise.

The relationship for the estimation error variance as a function of density (p) and the noise distribution function (F) and also of the parameter Δ given in [3] was used to formulate the c_n estimate's unbiasness and consistency condition: $\beta > \beta_{min}$, where $\beta_{min} = [4p(\Delta)]^{-1}$. Besides, noise should be symmetrical.

The minimum estimation error variance is achieved if $\beta=2\beta_{min}$. An interesting case of triangular noise was discussed and it was shown that in case of an optimal β parameter choice the estimation error variance was independent of the Δ value [5].

It is worth noting that to establish the asymptotic properties of the estimate, the information on the noise probability density function at the dead zone boundary was used.

2. VALIDITY ANALYSIS

The results concerning the most significant asymptotic properties of an estimate, unbiasness and consistency, are based on non-trivial information about the noise distribution density at the dead zone boundary. In addition, the symmetric noise requirement, though widely accepted a priori, is also a restricting one.

Thus the c_n estimate's unbiasness and consistency was proved for conditions essentially different from the announced a priori noise uncertainty even if we restrict ourselves to the non-singular noise case. Therefore, such method of proving does not seem quite convincing.

The purpose of the present paper is to offer another possible way of establishing the above mentioned asymptotic properties of estimation free of such conceptual discrepancies.

3. REDUCING THE ALGORITHM (1) TO AN AUTOMATIC CONTROL SYSTEM

We introduce an error of estimating the true measured value c* as $\varepsilon_n = c_n - c^*$. Then the estimate's unbiasness property can be expressed as $\varepsilon_n \to 0$ at $n \to \infty$. Consistency means here that the above result is reached for any noise distribution law. The algorithm (1) can be reduce to an automatic control system (ACS). This ACS is discrete, has two feedback loops, a nonlinear element (unideal relay, realizing the function ψ), a unit with variable parameters and a one cycle delay line. It is easily seen that the above stated estimate unbiasness requirement coincides with the ACS asymptotic stability statement.

A survey of various methods of evaluating nonlinear ACS stability and the analysis of stability for this ACS can be found in [6]. It has been proved that

– if an ideal relay (i.e., with no dead zone) serves as a nonlinear element, this ACS has no asymptotically stable equilibrium state;

– if the transfer characteristic of the nonlinear element is restricted (e.g., by introduction of a dead zone), the asymptotically stable equilibrium state is achievable;

– the equilibrium state characteristics are independent of the noise parameters.

The term dead zone need some clarification. On one hand, we can introduce an «algorithmic dead zone» – formal setting of the algorithm (1) parameter Δ value. On the other hand, there also exists a «physical dead zone» defined by experimental conditions and data processing mode (e.g., by the ADC word length, etc.). That is, the case with no dead zone is a computational abstraction.

4. CONCLUSION

The authors wished to call attention to a substantional logic disagreement between the claimed basic principle of an a priori uncertainty in the noise distribution law and the conditions and restrictions assumed in the proof [3] of the most important properties of c_n estimate obtained using the algorithm (1).

The proposed way of algorithm (1) presentation in the ACS form has allowed us to solve a similar problem-finding conditions for asymptotic stability of the equilibrium state. Such a unique condition is the existence of a «dead zone».

The work is partically supported by the Federal Special-Purpose Program «Integration» under the Project No A0141 «Optics and Scientific Instrumentation», Section «Support of Trading Scientific Center based at St.Petersburg State University of Air-Space Instrumentation and Institute for Analytical Instrumentation RAS».

References

1. Tsipkine Ya.Z. Optimization under uncertainty conditions //Doklady USSR Ac. Sc. 1976. V.228. No.6. P.1306-1309.

2. Tsipkine Ya.Z., Polyak B.T. A Roughed maximum likelihood technique //In: Systems' Dynamics, Multiauthor Book, Gorkii University Publ. 1977. No.12. P.22-46.

3. Bedelbaeva A.A.. Relay estimation algorithms //Avtomatika i telemekhanika. 1978. No.1. P.87-95.

4. Krasulina T.P. On the convergence from below of the Robbins-Monro process.//Avtomatika i telemekhanika. 1992. No.4. P.73-76.

5. Bulianitsa A.L., Kurochkin V.E. The property of the estimation accuracy independence of the dead zone size in the relay algorithm //Avtomatika i telemekhanika. 1999. No.9. P.187-189.

6. Bulianitsa A.L., Burylov D.A.. Frequency criteria of the recurrent algorithm estimate stability for a constant level signal. //Nauchnoe Priborosroenie. 1998. V.8. No.1-2. P.37-41.