ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ ЦИФРОВЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ФОРМИРОВАНИЯ СИГНАЛОВ

Ермолаев В. А.

ОАО НПП «Звукотехника»
Россия, 602200, г. Муром, Владимирская обл.,
Радиозаводское шоссе, 23
Тел.: (09234) 2-2562, Факс: (-09234) 2-2596

Реферат: Рассматриваются вопросы синтеза квазилинейных разностных уравнений. Вводятся понятия ε -эквивалентности и устойчивости к деформациям дискретных систем. Устанавливается связь с проблемой шедоуинга в теории дискретных систем. Приводятся условия и способ обеспечения устойчивости фазовых траекторий дискретных динамических систем, проиллюстрированный примерами.

1. Введение

В задачах цифровой обработки сигналов и цифрового управления часто возникает потребность в формировании незатухающих сигналов известной формы, например, в простейшем случае, синусоидальных сигналов. Отношение периода таких сигналов к периоду дискретизации априори не обязано являться рациональным и поэтому задание сигналов в форме конечной таблицы в общем случае невозможно, конечно, если не воспользоваться соответствующей процедурой интерполяции.

Альтернативный способ формирования сигналов, рассматриваемый в настоящей работе, основывается на рекуррентной процедуре вычисления последовательности выборок с использованием соответствующего разностного уравнения. Возможные подходы к синтезу формирующих нелинейных разностных уравнений приведены на рис.1.

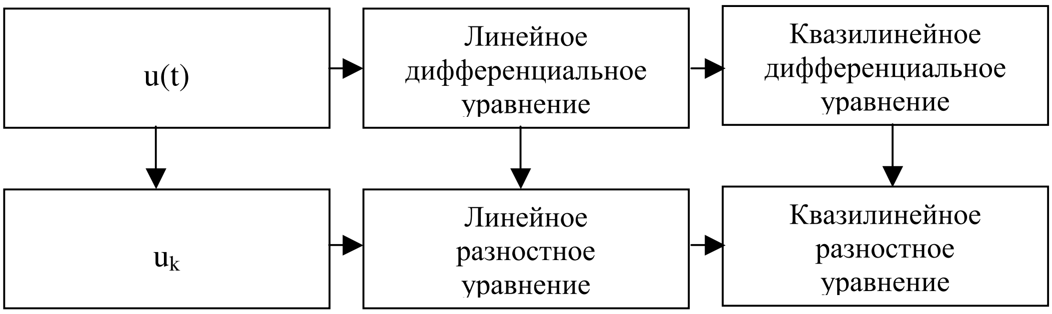


Рис.1. Возможные способы синтеза разностных уравнений

2. Представление сигналов линейными разностными уравнениями

Последовательность выборок u_k можно получить из аналитического выражения аналогового сигнала u(t), используя известную связь преобразования Лапласа с z – преобразованием. Если z – преобразование функции u(t), заданной в дискретные моменты времени, представляет собой рациональную функцию

$$U(z) = \sum_{i=0}^{m} a_i z^{-i} \left(\sum_{i=0}^{n} b_i z^{-i} \right)^{-1}, \qquad (1)$$

то соответствующее (1) разностное уравнение можно записать в виде

$$u_k = -\sum_{i=1}^{n} b_i u_{k-i} + \sum_{i=0}^{m} a_i \delta_{ki} , \qquad (2)$$

где δ_{ki} - символ Кронекера.

Линейное разностное уравнение можно также получить в результате выражения линейного дифференциального уравнения, решение которого определяет функцию u(t), или системы дифференциальных уравнений через конечные разности. В этом случае возникает дополнительный вопрос о соответствии точного решения дифференциального уравнения последовательности, определяемой разностным уравнением вида (2), или, в векторной форме, уравнениями

$$x_{k+1} = Ax_k, \quad u_k = c^T x_k, \qquad (3)$$

где $A - n \times n$ - матрица, $c \in R^n$ - вектор коэффициентов и $x_k \in R^n$ - вектор состояния, при начальных условиях, задаваемых вектором x_0.

Если разностные уравнения, полученные указанными способами, эквивалентны, то корни характеристических многочленов уравнений вида (2) и характеристического многочлена $\det(zI - A)$ системы (3) совпадают.

Для незатухающих сигналов среди корней характеристического многочлена уравнения (2) или системы (3) имеются находящиеся на границе устойчивости – на окружности единичного радиуса. В связи с этим возникает проблема устойчивости разностного уравнения, обусловленная конечной точностью вычислений и сбоями в работе вычислительного устройства, которые приводят к невосстанавливаемым изменениям фазовых траекторий системы, в частности, к изменению размеров замкнутой траектории. В целях решения этой проблемы и получения устойчивого предельного цикла, линейные разностные уравнения необходимо дополнить соответствующими стабилизирующими нелинейными слагаемыми.

3. Разностные уравнения нелинейных цифровых систем

Разностное уравнение стабилизированной нелинейной цифровой системы формирования сигналов, соответствующее уравнению (2), если его записать в виде

$$u_k = f_0(u_{k-1},...,u_{k-n}) + \mu\ f(u_{k-1},...,u_{k-n}, g(u_0,...,u_{k-1})), \tag{4}$$

где $f_0(u_{k-1},...,u_{k-n}) = -\sum_{i=1}^{n} b_i u_{k-i}$, $f(u_{k-1},...,u_{k-n}, g(u_0,...,u_{k-1}))$ - нелинейная стабилизирующая функция и $\mu > 0$ - некоторое достаточно малое число, относится к классу разностных уравнений Вольтерра [1]. Если ввести вектор $x_k = (u_{k-1},...,u_{k-n})^T$, то уравнение (4) можно также записать в виде

$$x_{k+1} = Ax_k + \mu\, F(x_k, g(x_0,...,x_k)), \tag{5}$$

где A - постоянная матрица и F - векторная функция.

Уравнение (5) определяет в фазовом пространстве некоторую траекторию – последовательность точек x_k, которая по условию должна соответствовать траектории системы (3). Для траектории системы (5), начинающейся из точки x_0, введем обозначение $P(x_0, n)$. Через $P(x_0, x_k, n)$ обозначим отрезок $(x_k, x_{k+1}, ...)$ траектории, выходящей из x_0, и через $P(x_0, x_k, x_n)$ - отрезок, заключенный между точками x_k и x_n, $n \geq k$.

Назовем деформацией D некоторое преобразование системы (3) или (5).

Определение 1. Система (3) называется ε-эквивалентной по отношению к системе (5) на конечном отрезке траектории $P(x_0, x_k, x_{k+N})$, если для достаточно малого $\varepsilon > 0$ и любого целого числа $N > 0$ существуют деформация D_0 системы (3), начальное состояние x_d и некоторое целое число $m < \infty$ такие, что расстояние между $P(x_0, x_k, x_{k+N})$ и отрезком траектории $P_d(x_d, x_{k+m}, x_{k+m+N})$ деформированной системы (3) - $\rho\,(P(x_0, x_k, x_{k+N}), P_d(x_d, x_{k+m}, x_{k+m+N})) < \varepsilon$.

Система (5) называется ε - эквивалентной по отношению к системе (3) на бесконечном интервале, если $N = \infty$, то есть $\rho\,(P(x_0, x_k, n), P_d(x_d, x_{k+m}, n)) < \varepsilon$.

С приведенным определением связана так называемая проблема обратного шедоуинга (совместимости с тенью) [2], если под тенью понимать траекторию деформированной системы (3), а под истинной траекторией – траекторию системы (5). С проблемой прямого шедоуинга связано аналогичное понятие ε - эквивалентности системы (5) по отношению к системе (3) на конечном или бесконечном отрезке времени, определяющее возможность построения истинной траектории по тени (по требуемой траектории). Если система (3) ε - эквивалентна по отношению к системе (5) и наоборот, то системы (3) и (5) называются взаимно ε - эквивалентными.

Определение 2. Система (5), ε - эквивалентная по отношению к системе (3), называется устойчивой к достаточно малой деформации D_1, если существует деформация D_0 системы (3), сохраняющая расположение корней характеристического многочлена относительно окружности единичного радиуса, в частности, сохраняющая число и тип корней на окружности единичного радиуса, обеспечивающая выполнение условий ε_1 - эквивалентности по отношению к деформированной системе (5) и стремящаяся к нулю при стремлении к нулю деформации системы (5).

Можно показать, что справедлива следующая теорема.

Теорема. Любой линейной системе (2) или (3), корни характеристического многочлена которой находятся на границе и внутри области устойчивости, при этом корни на границе (окружности единичного радиуса) – простые, можно поставить в соответствие устойчивую ко всем достаточно малым деформациям квазилинейную ε - эквивалентную систему (4) или (5).

Доказательство основывается на представлении уравнения (4) в виде:

$$u_k = f_0(u_{k-1},...,u_{k-n}) + \mu\, f_\mu(u_{k-1},...,u_{k-n}) - \mu\, f_\mu(u_{k-1},...u_{k-n}) \cdot g(u_0,...,u_{k-1}), \tag{6}$$

где $f_\mu(u_{k-1},...,u_{k-n}) = \sum_{i=1}^{n} c_i u_{k-i}$ - слагаемое, обеспечивающее смещение в область неустойчивости расположенных на единичной окружности корней характеристического многочлена уравнения (2), и $g(u_0,...,u_{k-1})$ - положительно определенная функция. В матричной форме уравнению (6) соответствует выражение

$$x_{k+1} = (A + \mu A_\mu)x_k - \mu g(x_0,...,x_k)A_\mu x_k ,$$

где A_μ – матрица деформации.

В качестве примера можно привести уравнения

$$u_k = (2\cos w / f_0)u_{k-1} - (1+\mu)u_{k-2} + \gamma u^2{}_{k-1}u_{k-2} \tag{7}$$

и

$$u_k = (2\cos w / f_0)u_{k-1} - (1+\mu)u_{k-2} + \gamma g_k u_{k-2}, \ g_k = \alpha g_{k-1} + \beta u_{k-1}^2, \tag{8}$$

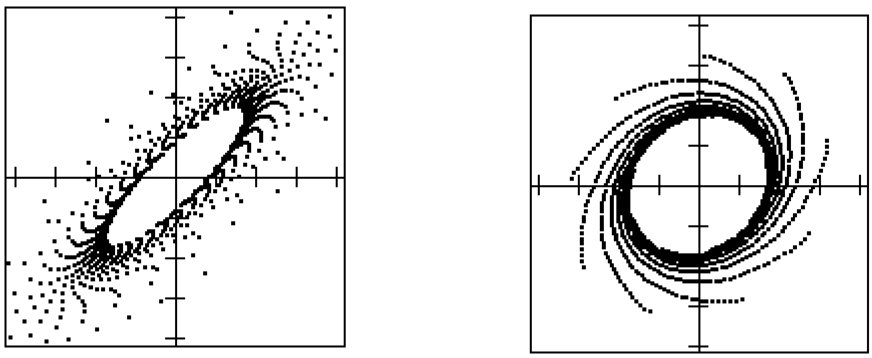
где w- круговая частота синусоидального сигнала, f_0 - частота дискретизации, α, β - коэффициенты цифрового фильтра первого порядка и μ, γ - близкие к нулю положительные константы.

Фазовые портреты системы, описываемой уравнением (8) при $2\cos w / f_0$=1,745 и 0,337, $\mu = 0{,}001$, $\gamma = 0{,}01$, $\alpha = 0{,}9$, $\beta = 0{,}1$, $u_{-2} = 0$, $u_{-1} = 1$, приведены на рис.2 а и б, соответственно. Фазовые портреты построены в координатах u_{k-1}, u_k. Траектории сходится к устойчивому предельному множеству по спирали. При этом имеет место характерная для дискретных систем тенденция группирования отдельных точек в ветви , отличной от указанной спирали. Границы областей сходимости могут быть получены в результате численного моделирования системы.

При исследовании влияния нелинейных слагаемых на амплитуду и частоту формируемых сигналов можно воспользоваться методами гармонического баланса или линеаризации, примененными в [3] к уравнениям вида (7).

4. Заключение

В литературе по дискретным динамическим системам преобладает интерес к исследованию проблем устойчивости положений равновесия и периодических движений. Однако на практике чаще приходится иметь дело с почти периодическими и более сложно устроенными процессами, применение к которым известных методов анализа [1, 4] встречает определенные трудности. В этом плане, результаты, полученные в настоящей работе, а именно, введенные понятия ε - эквивалентности и устойчивости, а также связь, установленная с проблемой шедоуинга, открывают новые возможности по преодолению указанных трудностей. Кроме того, полученные результаты обеспечивают возможность построения надежных алгоритмов формирования сигналов.



а б

Рис. 2. Фазовые портреты системы (8)

Литература

1. В.Б. Колмановский. О применении второго метода Ляпунова к разностным уравнениям Вольтерра //Автоматика и телемеханика. 1995, №11, с.50-64.

2. Ф. Даймонд, П. Клоеден, В.С. Козякин, А.В. Покровский. Робастность наблюдаемого поведения полугиперболических динамических систем // Автоматика и телемеханика. 1995, №11, с.148-159.

3. R.E. Mickens, Periodic Solutions of second-order nonlinear difference equations containing a small parameter – II. Equivalent linearization. J. Franklin Inst., Vol. 320, pp. 169-174, No. 3 / 4, 1985.

4. В.Б. Колмановский, А.М. Родионов. Об устойчивости некоторых дискретных процессов Вольтерра //Автоматика и телемеханика. 1995, №2, с.3-13.

ON THE STABILITY OF PHASE PATHS OF DIGITAL DYNAMIC SYSTEMS OF SHAPING OF SIGNALS

Ermolaev V. A.

OAO NPP "Zvukotehnika"
Russia, 602200,. Murom, Vladimir province,
Radiofactory highway, 23
Tel.: (09234) 2-2562, Fax.: (09234) 2-2596

Abstract: The possible approach to synthesis of quasilinear difference equations are considered. The concepts of ε - equivalence and stability of discrete systems are introduced. The conditions and method of stabilization of phase paths of discrete dynamic systems are reduced.

1. Background

In the present paper considered method of shaping of signals is grounded on the recursion procedure of an evaluation of a sequence of sampling with usage of an appropriate difference equation.

2. Performance of signals by linear difference equations

If z - conversion the function u(t), given in discrete instants, represents the rational function

$$U(z) = \sum_{i=0}^{m} a_i z^{-i} \left(\sum_{i=0}^{n} b_i z^{-i} \right)^{-1}, \tag{1}$$

that appropriate (1) difference equations is possible to note as

$$u_k = -\sum_{i=1}^{n} b_i u_{k-i} + \sum_{i=0}^{m} a_i \delta_{ki} , \tag{2}$$

where δ_{ki} - Kronecker delta, or, in the vectorial form, equations

$$x_{k+1} = Ax_k, \quad u_k = c^T x_k, \tag{3}$$

where $A - n \times n$ - matrix, $c \in R^n$ - vector of coefficients and $x_k \in R^n$ - vector of a status, at the initial conditions assigned to a vector x_0.

With the purposes of deriving of a steady limit cycle, the linear difference equations are necessary for supplementing by appropriate stabilizing nonlinear items.

3. Difference equations of nonlinear digital systems

Difference equation of a nonlinear digital system of shaping of signals appropriate stabilized equation (2), if it to note as

$$u_k = f_0(u_{k-1}, ..., u_{k-n}) + \varepsilon f(u_{k-1}, ..., u_{k-n}, g(u_0, ..., u_{k-1})), \tag{4}$$

where $f_0(u_{k-1}, ..., u) = -\sum_{i=1}^{n} b_i u_{k-i}$, $f(u_{k-i}, ..., u_{k-n}, g(u_0, ..., u_{k-1}))$ - nonlinear stabilizing function and $\varepsilon > 0$ - some small enough number, falls into to the class of difference equations of Volterra [1].

If to enter vector $x_k = (u_{k-1}, ..., u_{k-n})^T$, equation (4) is possible also to note as

$$x_{k+1} = Ax_k + \mu F(x_k, g(x_0, ..., x_k)), \tag{5}$$

where A - stationary value a matrix and F - vectorial function.

Definition 1. The system (3) is named as ε - equivalent in relation to a system (5) on a finite segment of a path $P(x_0, x_k, x_{k+N})$, if for enough small $\varepsilon > 0$ and any integer $N > 0$ there are a strain D0 of a system (3), initial state x_d and some integer $m < \infty$ such, that distance between $P(x_0, x_k, x_{k+N})$ and segment of a path $P_d(x_d, x_{k+m}, x_{k+m+N})$ of a deformed system (3) - $\rho\left(P(x_0, x_k, x_{k+N}), P_d(x_d, x_{k+m}, x_{k+m+N})\right) < \varepsilon$.

The so-called problem of an inverse of shadowing (compatibility with a shadow is coupled to reduced definition) [2], if a shadow to understand a path of a deformed system (3), and under a true path - path of a system (5).

Definition 2. The system (5), ε - equivalent in relation to a system (3), is named steady against enough small strain D1, if there is a strain D0 of a system (3), saving a disposition of the roots of a characteristic polynomial concerning a circle of single radius, in particular, saving number and type of the roots on a circle of single radius, detomining relations of ε_1 - equivalention of a deformed system (5) and aspiring to zero with aspiring to zero of the strain D1 of the system (5).

The theorem. To any linear system (2) or (3), the roots of which characteristic polynomial are on boundary and inside a stability region, thus the roots on boundary (circle of single radius) - simple, it is possible to put in correspondence steady against all small enough strains quasilinear an ε - equivalent system (4) or (5).

Proof is grounded on performance of the equation (4) as:

$$u_k = f_0(u_{k-1},\ldots,u_{k-n}) + \mu\, f_\mu(u_{k-1},\ldots,u_{k-n}) - \mu\, f_\mu(u_{k-1},\ldots u_{k-n}) \cdot g(u_0,\ldots,u_{k-1}), \tag{6}$$

where $f_\mu(u_{k-1},\ldots,u_{k-n}) = \sum_{i=1}^{n} c_i u_{k-i}$ - item providing offset in area of instability of the roots, located on a single circle, of a characteristic polynomial of the equation (2), and $g(u_0,\ldots,u_{k-i})$ - positive definite function. In a matrix form to the equation (6) there corresponds expression

$$x_{k+1} = (A + \mu\, A_\mu) x_k - \mu\, g(x_0,\ldots,x_k) A_\mu\, x_k\,,$$

where A_μ - matrix of strain.

4. Inference

Results obtained in the present paper, namely, gated in concepts ε - equivalence and the stabilities, are connection with methods of paper [1, 3, 4]. Besides the obtained results ensure a possibility of build-up of reliable algorithms of shaping of signals.

REFERENCES

1. V. B. Kolmanovski. On applications of the second Lyapunov method to Volterra equations // Automatika i Telemechanika. 1995, №11, pp 50-64 (In Russian).

2. Ph. Diamond, P. Kloeden, V.S. Kozyakin, A.V. Pokrovsky. Robustness of unobserved behaviour of semi-hyperbolic systems // Automatika i Telemechanika.. 1995, №11, pp 148-159 (In Russian).

3. R.E. Mickens, Periodic Solutions of second-order nonlinear difference equations containing a small parameter – II. equivalent linearization. J. Franklin Inst., Vol. 320, pp. 169-174, No. 3 / 4, 1985.

4. V.B. Kolmanovsky, A.M. Rodionov. On the stability of some discrete Volterra processes // Automatika i Telemechanika. 1995, №5, pp 3-13 (In Russian).