ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА ХАОТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Калинин В.И.

Институт радиотехники и электроники Российской Академии наук
103907, Россия, Москва, Моховая 11, ИРЭ РАН
Tel/Fax: +7-095-2034693/2038414, E-mail: vik166@ire216.msk.su

Реферат: Методом ортогонального проектирования получено взаимно однозначное отображение хаотических сигналов на подпространство вложения, размерность которого более чем в два раза превышает размерность хаотических аттракторов в динамических системах с запаздыванием. При численном представлении хаотических сигналов период дискретизации определяется отношением времени запаздывания системы к размерности пространства вложения. Обсуждаются свойства ортогональных проекций для хаотических сигналов. Представлены алгоритмы для цифровой обработки хаотических сигналов.

1. Введение

В последние годы предложены фрактальные методы обработки сигналов, природа которых определяется динамическим хаосом [1]. Фрактальная обработка основана на численном представлении хаотических сигналов [2]. В фазовом пространстве динамических систем хаотические траектории образуют компактные множества – аттракторы с конечной и дробной размерностью [3]. При восстановлении хаотических аттракторов, численном моделировании хаотических процессов, вычислении размерности фрактальных множеств естественно возникает проблема конечномерного представления непрерывных во времени хаотических траекторий [4]. Хаотические сигналы заданной длительности обладают неограниченным по частоте спектром и по этой причине не имеют точного разложения во временной ряд согласно известной теореме отсчетов [5]. Конечномерную аппроксимацию хаотических сигналов следует выполнять по системе линейно независимых функций для заданного интервала времени [6]. Остается открытым вопрос о выборе оптимального периода дискретизации при ортогональном проектировании хаотических аттракторов, что в свою очередь определяет точность цифровой обработки хаотических сигналов. В настоящей работе рассмотрены методы цифровой обработки непрерывных во времени хаотических сигналов, которые формируются в бесконечномерных динамических системах с запаздыванием.

2. Ортогональное проектирование хаотических сигналов

К проблеме конечномерного представления хаотических сигналов можно подходить, восстанавливая нелинейную динамику систем с хаотическим поведением. Такой подход развивается для бесконечномерных динамических систем с запаздыванием, которые определяются дифференциальным уравнением общего вида

$$dx(t)/dt = F[x(t); x(t-T); \mu] \quad , \qquad (1)$$

где F является нелинейным функционалом, а μ - бифуркационный параметр.

Хаотическое поведение системы (1) наблюдается в области сильной неравновесности [7]. Для нахождения решений системы (1) необходимо задание непрерывных начальных траекторий на интервале времени, равном задержке T. Совокупность всех траекторий $\{x_k(\tau)\}$ длительности T образует компактное множество - аттрактор $M(T)$ в бесконечномерном фазовом пространстве $L^2(T)$ для исходной динамической системы. Фрактальная размерность D_C хаотических аттракторов $M(T)$ в бесконечномерных динамических системах с запаздыванием является конечной величиной. Компактное множество $M(T)$, имеющее конечную размерность D_C, может быть взаимно однозначно спроектировано на подпространство с размерностью вложения [3-4]. Пусть хаотический аттрактор $M(T)$ содержится в компактном многообразии размерности $D \ge D_C$. Конечномерное описание движений на хаотическом аттракторе возможно в пространстве восстановления M^{2D+1} с помощью $N = 2D+1$ новых динамических переменных. Выберем в $L^2(T)$ базис из ортонормальных функций $\{\varphi_i(\tau); i = 1,2,\ldots,N\}$, например, в виде весовых функций со смещением на конечном интервале времени T. Смещение во времени для соседних базисных функций определяется отношением времени запаздывания к размерности вложения $\Delta\tau = T/(2D+1)$. Построим линейное подпространство M^{2D+1}, натянутое на систему из базисных функций $\{\varphi_i\}$. Выполним ортогональное проектирование хаотических функций $\{x_k(\tau)\}$ из $L^2(T)$ на линейное подпространство $M^{2D+!}$.

$$\hat{x}_k(\tau) = \sum_{i=1}^{2D+1} x_k(i)\varphi_i(\tau) \quad , \qquad x_k(i) = (x_k, \varphi_i) \qquad (2)$$

Представительная функция $\hat{x}_k(\tau)$ является взаимно однозначной проекцией в пространстве M^{2D+1} для хаотической функции $x_k(\tau)$. Набор чисел $\{x_k(1), x_k(2), \ldots, x_k(2D+1)\}$ в пространстве $\Re^{2D+1}$ является численным представлением исходной функции. Координаты вектора $X_k = \{x_k(i)\}$ в общем случае отличаются от дискретных отсчетов хаотической траектории. При вычислении координат вектора $X_k = \{x_k(i)\}$ шаг дискретизации равен отношению времени запаздывания в системе к размерности вложения $\Delta\tau = T/(2D+1)$.

Разность $y_k(\tau) = x_k(\tau) - \hat{x}_k(\tau)$ характеризует погрешность аппроксимации для искомой функции. Точность конечномерного приближения определяется нормой

$$\|y_k\| = \left[\|x_k\|^2 - \|\hat{x}_k\|^2\right]^{1/2} = \left[\int_0^T x_k^2(\tau)d\tau - \sum_{i=1}^{2D+1} x_k^2(i)\right]^{1/2} \tag{3}$$

Норма погрешности (3) зависит от самих функций $x_k(\tau)$, однако она может быть сделана сколь угодно малой при выборе достаточно большой размерности $(2D+1)$ пространства восстановления.

3. Цифровая обработка хаотических сигналов

При использовании ортонормальной системы базисных функций с размерностью вложения достигается взаимно однозначное соответствие между хаотическими сигналами $x_k(\tau)$, их представительными функциями $\hat{x}_k(\tau)$ в пространстве восстановления M^{2D+1} и векторами $X_k = \{x_k(1), x_k(2), \ldots, x_k(2D+1)\}$ в пространстве действительных чисел $\Re^{2D+1}$. Установленное взаимно однозначное соответствие позволяет перейти к цифровой обработке хаотических сигналов. Покажем это на примере вычисления квадратичных форм, которые характеризуют энергию и корреляцию хаотических сигналов. Квадратичные формы для хаотических сигналов определяются с заданной точностью квадратичными формами для их представительных функций $(x_k, x_m) \cong (\hat{x}_k, \hat{x}_m)$. Пусть $X_k = \{x_k(i)\}$ являются координатами функции $x_k(\tau)$ в системе $\{\varphi_i\}$, а $X_m = \{x_m(i)\}$ служат координатами функции $x_m(\tau)$ в той же системе. При ортонормальном базисе $\{\varphi_i\}$ имеет место равенство скалярных произведений для представительных функций $\hat{x}_k$ и $\hat{x}_m$ из пространства M^{2D+1} и для соответствующих векторов X_k и X_m из пространства $\Re^{2D+1}$

$$(\hat{x}_k, \hat{x}_m) = (X_k, X_m) = \sum_{i=1}^{2D+1} x_k(i) x_m(i). \tag{4}$$

Следовательно, квадратичная форма для непрерывных хаотических сигналов определяется с некоторой точностью скалярным произведением соответствующих векторов $(x_k, x_m) \cong (X_k, X_m)$. Отсюда как частный случай вычисляется энергия хаотических сигналов

$$W = \int_0^T x_k^2(\tau)d\tau \cong \sum_{i=1}^{2D+1} x_k^2(i) \tag{5}$$

Число слагаемых $N = 2D+1$ в сумме (5) определяется размерностью вложения при реконструкции хаотического аттрактора. Таким образом, обработка непрерывных во времени хаотических сигналов сводится к цифровой обработке конечномерных векторов из построенного пространства $\Re^{2D+1}$ для динамической системы с запаздыванием.

4. Заключение

Разложение хаотических сигналов на конечном интервале времени по системе ортонормальных базисных функций с размерностью вложения обладает замечательными свойствами. В результате ортогонального проектирования устанавливается взаимно однозначное соответствие хаотических сигналов и представительных функций из пространства восстановления. Представительная функция является наиболее близкой к исходному хаотическому сигналу. Численными координатами хаотического сигнала являются коэффициенты разложения по системе ортонормальных функций. Пространство восстановления имеет номинальную размерность порядка $N \geq 2D_C + 1$, которая определяется фрактальной размерностью D_C хаотического аттрактора. Наибольший период дискретизации при вычислении координат хаотических сигналов равен отношению времени запаздывания в динамической системе к размерности вложения $\Delta\tau = T / (2D_C + 1)$. Цифровая обработка непрерывных во времени хаотических сигналов производится с заданной точностью, используя численные координаты в пространстве восстановления. Погрешность конечномерного представления хаотических сигналов может быть сделана сколь угодно малой при достаточно большой размерности вложения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 98-02-16722 и № 00-07-90147.

Литература

1. Oppenheim A.V., Wornell G.W., Isabelle S.N., and Cuomo K.M. Signal processing in the context of chaotic signals //Proc. ICASSP-92, V.4, P. 117-120, San Francisco, CA, 1992.
2. Haykin S., Li X. Detection of Signals in Chaos //Proc. IEEE, - 1995,V.83, NO.1, P. 95-122.
3. Mane R. On the Dimension of the Compact Invariant Sets of Certain Non-Linear Maps // Lect. Notes in Math. – 1981,- V. 898,- P. 230-242.
4. Takens F. Detecting Strange Attraktors in Turbulence //Lect. Notes in Math.–1981,- V. 898,- P.336-381.
5. Котельников В.А. Теория потенциальной помехоустойчивости. М.: Радио и связь, 1998.
6. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.
7. Дмитриев А.С., Кислов В.Я. Стохастические колебания в радиотехнике и электронике, М.: Наука, 1989.

DIGITAL PROCESSING OF CHAOTIC SIGNALS IN DYNAMICAL SYSTEM WITH DELAYED FEEDBACK

Valery I. Kalinin
Institute of Radioengineering and Electronics of Russian Academy of Sciences
Mokhovaya 11, IRE RAS, Moscow 103907, Russia
Tel/Fax: +7-095-2034693/2038414, E-mail: vik166@ire216msk.su

Abstract: The diffeomorphic map of chaotic signals generated by the infinite dynamical system is obtained by orthogonal projecting onto the embedding subspace. The sampling period is determined by the ratio of delayed feedback time to the embedding dimension. The properties of orthogonal projections are discussed. Digital processing of continuous-time chaotic signals is considered.

1. Introduction

In the last decade the fractal methods of signal processing are proposed [1-2]. The fractal processing is based on digital representation of chaotic signals. In the phase space of dynamical system the chaotic trajectories are formed compact subsets of finite dimensions. A strange attractor of finite dimension may be reconstructed from a sampled time waveform of just one component of the state [3-4]. The chaotic signals of finite time length possess an infinitely power spectrum and for this reason they do not sample at the Nyquist frequency [5-6]. The aim of the present paper is to show that the digital representation of chaotic signals in the infinite dynamical system is possible in the embedding subspace.

2. Orthogonal projecting of chaotic signals

Chaotic attractors of finite dimensions live in infinite-dimensional phase space of nonlinear system described by the first order equation with delayed argument

$$dx(t) / dt = F[x(t); x(t-T); \mu] \tag{1}$$

where F is the nonlinear function, and μ is a control parameter [7]. To solve (1) it is necessary to define the continuous-time trajectory $x_0(t)$ at the initial time interval $0 < t \le T$, where T is the time delay of the system feedback. The compact set $M(T) = \{x_k(\tau); t = kT + \tau; 0 < \tau \le T\}$ of the chaotic trajectories of length T forms the chaotic attractor in the infinite-dimensional phase space $L^2(T)$ of the nonlinear system (1). Let the attractor $M(T)$ of fractal dimension D_C be contained in the compact manifold M_D of the dimension $D \ge D_C$. The chaotic attractor $M(T)$ may be one-to-one projecting onto the subspace M^{D_E} of embedding dimension $D_E \ge 2D + 1$ [3-4].

In the infinite-dimensional phase space $L^2(T)$ of initial system (1) we choose the orthonormal basis $\{\varphi_i(\tau); i = 1,2,\ldots,2D+1\}$ contained $(2D+1)$ the orthogonal functions, for example, the rectangular functions of the time shift. The sampling period $\Delta t = T/(2D+1)$ is determined by the ratio of delayed feedback time to the embedding dimension. The linear functional subspace M^{2D+1} based on the orthonormal basis $\{\varphi_i(i\Delta t)\}$ has an embedding dimension $(2D+1)$. Chaotic trajectories $x_k(\tau)$ are orthogonal projected onto M^{2D+1}.

$$\hat{x}_k(\tau) = \sum_{i=1}^{2D+1} x_k(i)\varphi_i(\tau) \quad , \qquad x_k(i) = (x_k, \varphi_i) \tag{2}$$

The projection $[(x_k,\varphi_o),(x_k,\varphi_1),\ldots,(x_k,\varphi_{2D})]^T$ of the chaotic trajectory $x_k(\tau)$ lies on the diffeomorphic image of the chaotic attractor in the embedding subspace. The numerical coefficients $x_k(i)$ determined by scalar product (2), generally, are differed from the sampled time waveforms.

Insert the difference function $y_k(\tau) = x_k(\tau) - \hat{x}_k(\tau)$ that is the approximation error of the initial function $x_k(\tau)$. The accuracy of the finite representation (2) is determined by the appropriate norm of the error

$$\|y_k\| = \left[\|x_k\|^2 - \|\hat{x}_k\|^2\right]^{1/2} = \left[\int_0^T x_k^2(\tau)d\tau - \sum_{i=1}^{2D+1} x_k^2(i)\right]^{1/2} \tag{3}$$

The error norm (3) depends on the same chaotic function $x_k(\tau)$, however, it tends to zero for the embedding dimension exceeding the normal value $(2D_C + 1)$.

3. Digital processing of the chaotic signals

Orthogonal one-to-one projecting the continuous-time function onto the embedding subspace M^{2D+1} offers the possibility to use digital processing of the chaotic signals. Demonstrate it on the calculation of the quadratic forms

$$(x_k, x_m) = \int_0^T x_k(\tau)x_m(\tau)d\tau$$

those determine an energy and cross-correlation of the chaotic signals. In the case of the orthonormal basis $\{\varphi_i(\tau); i = 1,2,\ldots,2D+1\}$ we have the equality of the scalar products

$$(\hat{x}_k, \hat{x}_m) = (X_k, X_m) = \sum_{i=1}^{2D+1} x_k(i)x_m(i) \tag{4}$$

therefore, $(x_k, x_m) \cong (X_k, X_m)$. For example, the energy of the chaotic signals is

$$W = \int_0^T x_k^2(\tau)d\tau \cong \sum_{i=1}^{2D+1} X_k^2 \tag{5}$$

where $(2D+1)$ is the embedding dimension.

We will discuss the properties of the orthogonal projections and will show useful techniques of signal processing of the experimental trajectories, observed in output of dynamical systems with delayed feedback.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project № 98-02-16722; № 00-07-90147).

References

1. Oppenheim A.V., Wornell G.W., Isabelle S.N., and Cuomo K.M. Signal processing in the context of chaotic signals // Proc. ICASSP-92, V.4, P. 117-120, San Francisco, CA, 1992.
2. Haykin S., Li X. Detection of Signals in Chaos //Proc. IEEE, - 1995,V.83, NO.1, P. 95-122.
3. Mane R. On the Dimension of the Compact Invariant Sets of Certain Non-Linear Maps // Lect. Notes in Math. – 1981,- V. 898,- P. 230-242.
4. Takens F. Detecting Strange Attraktors in Turbulence // Lect. Notes in Math. – 1981,- V. 898,- P. 336-381.
5. Kotelnikov V.A. The theory of optimum noise immunity. – New York, Toronto, London: Mc Graw Hill book Co., 1959,-140 p.
6. Ahiezer N. I. The lectures on the approximation theory. – Moscow: Science, 1965.
7. Dmitriev A.S., Kislov V.Ya. Chaotic oscillations in the radio engineering and electronics. – Moscow: Science, 1989.