ОБЪЕДИНЕННЫЙ ПРИНЦИП МАКСИМУМА

Костоглотов А.А

Ростовский военный институт ракетных войск
344027, Ростов – на – Дону, кафедра метрологии

1. Введение

Применение принципа максимума в целях синтеза оптимального управления весьма проблематично, поскольку задача построения эффективной обратной связи в контуре управления, несмотря на совокупность существующих специальных методов [1], является часто трудно разрешимой и требует для реализации больших вычислительных затрат при обработке сигналов от датчиков, характеризующих состояние объекта.

В настоящее время в теории управления наметилась тенденция к разработке оптимальных методов синтеза, максимально использующих информацию о свойствах исследуемого объекта [2]. Она в полной мере согласуется с известным положением о том, что природа объекта определяет физическое и математическое содержание проблемы поиска общих объективных законов процессов управления [3].

В классической механике при исследовании динамических систем давно замечено, что между инвариантно-групповыми свойствами дифференциальных уравнений, описывающих движение механической системы, и физическими законами сохранения существует глубокая и нетривиальная связь. Соответственно учет физических особенностей системы в виде ее инвариантов позволяет существенно продвинуться в решении проблемы синтеза оптимальных систем. Этот принцип лежит в основе синергетического подхода в современной теории управления [2], который основан на конструировании с помощью известных инвариантов системы гиперповерхностей притяжения и сопровождающих функционалов.

В настоящей работе предложен новый подход к получению необходимых условий оптимальности, основанный на использовании инвариантных многообразий в виде признака действительного движения динамической системы, который определяется аналогом принципа Гамильтона – Остроградского для интеграла действия при наличии непотенциальных сил [4]. Применение к этому интегралу игольчатого варьирования Л. С. Понтрягина позволяет получить необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума без введения вектора сопряженных переменных, что существенно упрощает решение задачи синтеза оптимального управления и снижает требования к устройству обработки сигналов управления при реализации обратной связи.

2. Постановка задачи

Исходные положения динамики – аксиомы Ньютона и принцип Даламбера – позволяют сформулировать законы движения в виде дифференциальных уравнений, которые служат составной частью формулировки оптимизационных задач. Однако равноправными являются и вариационные формулировки, устанавливающие стационарные свойства некоторых величин, зависящих от параметров системы [4].

Рассмотрим голономную управляемую динамическую систему, интеграл действия которой имеет вид [4]

$$R = \int_0^{t_1} (T - \Pi + A^*)dt,$$

где T - кинетическая энергия системы, Π - работа потенциальных сил, A^* - работа внешних сил.

При дальнейшем рассмотрении не будем делать различия между внешними и потенциальными силами, тогда

$$R = \int_0^{t_1} (T + A)dt, \quad (1)$$

где $T = \frac{1}{2}\sum_{s,k=1}^{n} a_{sk}\dot{q}_s\dot{q}_k$ - кинетическая энергия; $q = [q_1, \ldots q_n]^T$ - вектор обобщенных координат; a_{sk} - коэффициенты инерции ; $A = \int_{q(0)}^{q(t)} \sum_{s=1}^{n} Q_s dq_s$ - работа обобщенных (внешних и потенциальных) сил; $Q = [Q_1(q,u,t), \ldots, Q_n(q,u,t)]^T$ - вектор обобщенных сил; $u = [u_1, \ldots, u_m]^T$ - вектор управления; $q(0)$, $q(t)$ - соответственно начальное и текущее состояние вектора обобщенных координат; $n = \dim q \geq m = \dim u$; T - знак транспонирования, точкой обозначена производная по времени.

Потребуем, чтобы при движении системы из начального состояния

$$t=0,\ q(0) = [q_{10}, \ldots, q_{n0}]^T,\ \ \dot{q}(0) = [\dot{q}_{10}, \ldots, \dot{q}_{n0}]^T, \quad (2)$$

в конечное состояние

$$t=t_1,\ q(t_1) = [q_{11}, \ldots, q_{n1}]^T,\ \ \dot{q}(t_1) = [\dot{q}_{11}, \ldots, \dot{q}_{n1}]^T, \quad (3)$$

под действием управления u выполнялось соотношение, аналогичное принципу Гамильтона – Остроградского для интеграла действия (1)

$$\delta R = \int_0^{t_1} (\delta T + \delta' A) dt = 0, \tag{4}$$

где знак δ' обозначает бесконечно малую величину, зависящую от вектора вариаций обобщенных координат, но не являющуюся вариацией величины A [4] $\delta' A = \sum_{s=1}^{n} Q_s \delta q_s$.

Отметим, что данное требование позволяет утверждать, что справедливы уравнения Лагранжа второго рода, которые для голономной системы можно записать в виде [4]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s, \quad s = \overline{1,n}. \tag{5}$$

Пусть задана скалярная непрерывная вместе с частными производными знакопостоянная функция $F(q, \dot{q})$.

Сформулируем задачу оптимального уравнения: определить вектор-функцию $u(t)$ и $q(t)$, доставляющие минимум функционалу

$$J_1 = \int_0^{t_1} F(q, \dot{q}) dt \to \mathbf{min}, \tag{6}$$

при условиях (2),(3),(4) и ограничении

$$u \in \overline{G}_u, \tag{7}$$

где $\overline{G}_u$ - замкнутое множество допустимых управлений в пространстве суммируемых на конечном интервале времени $[0, t_1]$ функций.

3. Объединенный принцип максимума

Рассмотрим расширенный функционал следующего вида

$$J = \int_0^{t_1} \{F(q, \dot{q}) + \lambda(T + A)\} dt, \tag{8}$$

где λ - множитель Лагранжа.

Пусть $u \in \overline{G}_u$- произвольное допустимое управление. Тогда, если $\tilde{u}$ доставляет минимум функционалу (8), необходимо, чтобы его вариация была неотрицательна для любых допустимых вариаций δu.

Введем в рассмотрение функцию $\Phi(q, \dot{q}, u)$, которая с учетом соотношения [4] $\delta q = \dot{q} \delta t$, может быть представлена в виде

$$\Phi = \sum_{s=1}^{n} [\lambda Q_s + V_s] \dot{q}_s ,$$

где $V_s = \dfrac{\partial F}{\partial q_s} + \mu \dfrac{\partial F}{\partial \dot{q}_s}$, μ – некоторый размерный множитель.

Доказана следующая теорема.

Теорема.

Если управление $\tilde{u}(t)$ и траектория $\tilde{q}(t)$ доставляют минимум функционалу (6) при условиях (2),(3),(4),(7), то существует такой постоянный множитель Лагранжа λ, что при любом $t \in [0,\ t_1]$ функция Φ переменного $u \in \overline{G}_u$ достигает в точке $\tilde{u}(t)$ максимального значения $\Phi(\tilde{u}) = \max\limits_{u \in \overline{G}_u} \Phi(u, q, \dot{q}, \lambda)$.

Для доказательства теоремы в форме принципа максимума используется аппарат игольчатого варьирования управления [3] и асинхронного варьирования траектории [4].

Доказана следующая лемма.

Лемма.

Пусть $\tilde{u}(t)$ - оптимальное управление, изменяющее за данное время $t_1 \rangle 0$ значение подынтегральной функции $F(q, \dot{q})$ на максимальную величину $F(q(t_1), \dot{q}(t_1)) - F(q(0), \dot{q}(0)) = \Delta F_{\max}$.

Тогда управление $\tilde{u}(t)$ есть оптимальное по быстродействию управление задачи приведения объекта из состояния $(q(0),\dot{q}(0))$ в состояние $(q(t_1),\dot{q}(t_1))$.

Доказательство леммы строится от противного.

4. Пример

Рассмотрим объект управления, описываемый простейшим уравнением $\ddot{x}=u$. Пусть на управление наложено ограничение $|u(t)|\le U$. Функционал, определяющий качество управления, имеет вид

$$J=\frac{1}{2}\int_0^{t_1}\left[x^2(s)+\mu\dot{x}^2(s)\right]ds .$$

Заданы начальные состояния $x(0)=x_0$, $\dot{x}(0)=\dot{x}_0$ и условия в момент времени t_1 $x(t_1)=\dot{x}(t_1)=0$. Ставится задача определения оптимального управления $\tilde{u}(t)$, при котором объект переходит из начального в конечное состояние, при этом выполняется наложенное ограничение, а функционал качества принимает наименьшее значение.

Согласно доказанной теореме, оптимальное управление $\tilde{u}(t)$ доставляет максимум функции $\Phi(x,\dot{x},u)=\lambda u+x+\mu\dot{x}$, откуда, поскольку имеет значение лишь знак множителя λ, оптимальное управление определяется следующим выражением $\tilde{u}(t)=U\,\mathbf{sign}\,\lambda[x+\mu\dot{x}]$, а структура оптимального регулятора имеет вид $\ddot{x}=U\,\mathbf{sign}\,\lambda[x+\mu\dot{x}]$.

Расчёт оптимального управления и траектории для значений параметров

$$t_1=10,\quad U=0.27,\quad \mu=1.65,\ \lambda=1,\quad x(0)=\dot{x}(0)=1,\quad x(t_1)=\dot{x}(t_1)=0,$$

произведен численным методом и полученные результаты представлены на рисунке.

Отметим, что в данном случае изменение подынтегральной функции функционала качества принимает максимальное значение при $t_1=10$. Согласно доказанной лемме это время t_1 будет принимать минимальное значение при решении задачи быстродействия по переводу системы из начального в конечное положение при заданном ограничении на управление. Решение задачи о максимальном быстродействии получено на основе принципа Л.С. Понтрягина, и оно полностью совпадает с решением, полученным на основе предложенного метода для выбранных значений исходных данных.

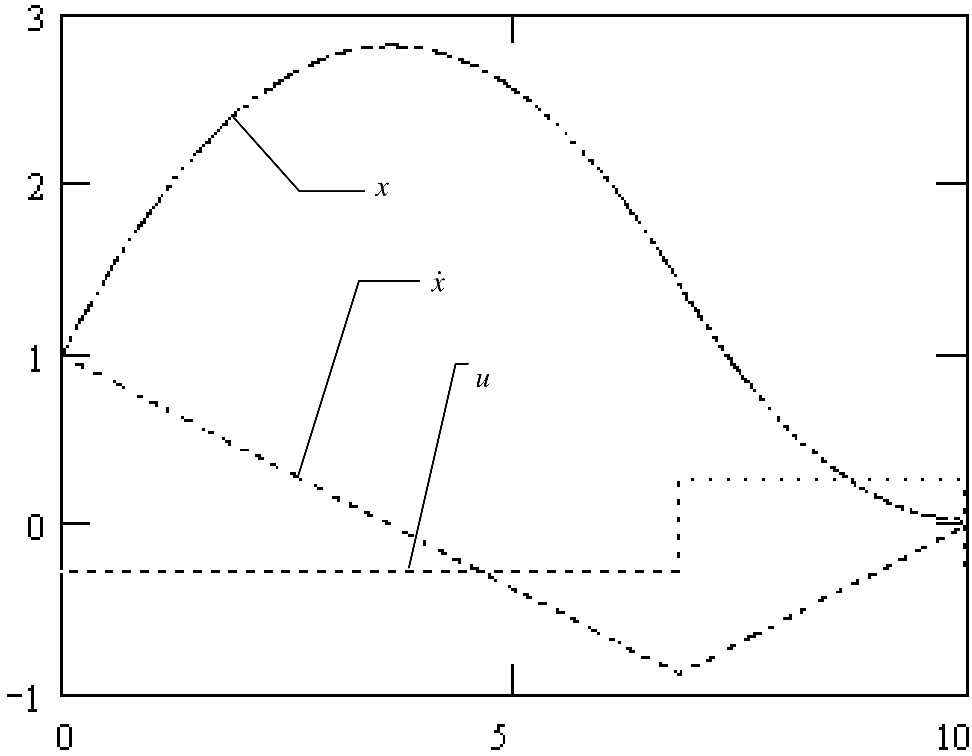
5. Заключение

Анализ полученных результатов позволят сделать выводы:

1. Предложенный метод синтеза оптимального управления не требует решения краевой задачи принципа максимума Л.С. Понтрягина, что значительно сокращает объём вычислительных затрат и понижает сложность оптимизационной задачи при практической реализации процедуры синтеза оптимального управления.

2. Структура оптимального регулятора, построенного по полученному принципу, получается проще регуляторов, построенных на основе метода аналитического конструирования, поскольку не требует решения матричного дифференциального уравнения Риккати.

3. Предложенный метод синтеза обладает свойством универсальности, поскольку даёт возможность решения задач максимального быстродействия, решение которых с использованием классических методов оказывается гораздо более сложным.



Литература

1. Моисеев Н. Н. Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука, 1971.
2. Новые концепции общей теории управления: Сборник научных трудов / Под ред. А. А. Красовского. Москва-Таганрог: ТРТУ, 1995.
3. Красовский А. А. Проблемы физической теории управления // А и Т, 1990. № 11.
4. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Государственное издательство физико - математической литературы, 1961.

INTEGRATED MAXIMUM PRINCIPLE

Kostoglotov A. A

The Rostov military institute of a rocket troops
344027, Rostov - on - Don, stand of a metrology

The application of a maximum principle with the purposes of synthesis optimum control is rather problematic, as a problem of construction of an effective feedback in a control loop, despite of set of existing special methods, is often difficultly soluble and demands for implementation of large computing costs at a signal processing of sensors describing a condition of object.

Now in theory controls the tendency to mining optimum methods of synthesis which is taking the most of the information on properties of investigated object was scheduled. She to the full will be agreed a known situation that the nature of object determines the physical and mathematical contents of a problem of looking up of the common objective laws of control procedures.

In classic mechanics at research of dynamic systems for a long time is remarked, that between invariant - formation properties of differential equations depicting motion of a mechanical system, and physical conservation laws there is a steep and nontrivial connection. Accordingly count of physical features of a system by the way of its invariants allows essentially to advance in a solution of a problem of synthesis of optimum systems. This principle bases the original approach in the modern theory of control, which one is based on designing with the help of known invariants of a system of hypersurfaces of attraction and accompanying functionals.

In the present activity the new approach to obtaining the indispensable optimality conditions, founded on usage of invariant diversities by the way of tag of actual motion of a dynamic system is offered, which one is determined by clone of a principle of Hamilton - Ostrogradskii for an integral of operating, if there is not potential forces. Application to this integral of spicular variation of Pontrjagin L. allows to receive the indispensable optimality conditions in the form of a maximum principle without the introducing of vector of conjugate variables, that essentially simplifies the solution of a problem of synthesis of optimum control and essentially reduces the requirements to a processor of command signals at implementation of a feedback.