ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАДЕЖНОСТИ ПЕРИОДА КОДИРОВАННЫХ ИМПУЛЬСНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Нечаев Ю.Б., Радченко Ю.С., Сохнышев С.В.

Воронежский государственный университет
394693, Воронеж, пл. Университетская, 1, кафедра радиофизики

Импульсные последовательности (ИП) находят достаточно широкое применение в качестве адекватных моделей реальных сигналов при решении различных прикладных задач. Периодический характер ритмики сердца и мозга человека позволяет активно использовать такой тип сигналов в биомедицинских приложениях для аппроксимации электрокардиограмм и электроэнцефалограмм [0]. Потенциальную возможность применения сверхширокополосных кодированных последовательностей импульсов в системах связи, радиолокации и ближней навигации обеспечивает высокая разрешающая способность данных сигналов по дальности и скорости. Отдельного рассмотрения требует расчет надежности оценки периода ИП, т.к. автокорреляционная функция (АКФ) данных сигналов при расстройке по периоду, характеризующая возможность определения скорости, имеет сложную многопиковую структуру, приводящую к возникновению аномальных ошибок I и II рода [0]. Под аномальными ошибками II рода понимается неоднозначность оценки параметра, связанная с многопиковым характером АКФ. Аномальные ошибки I рода возникают под действием больших выбросов шума за пределами главного пика АКФ.

Вероятность надежной оценки периода выражается через многократный интеграл, точный аналитический расчет которого достаточно затруднителен [0]. В данной работе представлены два алгоритма статистического моделирования, позволяющих рассчитать вероятность надежной оценки исследуемого параметра с различной степенью точности. Первый алгоритм (метод коррелированных векторов) разработан на базе метода Монте – Карло и учитывает влияние только аномальных ошибок II рода. Второй алгоритм (метод прямого моделирования выходной статистики) обеспечивает учет полного спектра аномальных ошибок без введения каких – либо дополнительных приближений. Проведен полный анализ результатов статистического моделирования по каждому из алгоритмов.

Пусть в течение времени наблюдения $[0,T_H]$ на вход приемной системы поступает смесь полезного сигнала $s(t|T_0)$ и белого гауссовского шума $n(t)$ с нулевым средним значением и спектральной плотностью мощности $N_0/2$

$$x(t) = s(t|T_0) + n(t) = \sum_{k=0}^{\nu} a_k s_0(t - kT_0) + n(t) \qquad (1)$$

Здесь $\{a_k\} = 0$ или 1, $k = \overline{0,\nu}$ - кодовая последовательность, модулирующая регулярную последовательность импульсов. Будем считать, что количество импульсов $(\nu + 1)$ в полезном сигнале $s(t|T_0)$ определяется временем наблюдения T_H и скважностью ИП, поэтому оно может меняться в широких пределах с изменением периода ИП T_0. Оцениваемый параметр T_0 определен в априорной области $[L_1, L_2]$, значительно большей подобласти, занимаемой главным максимумом АКФ полезного сигнала.

Оптимальный приемник формирует логарифм функционала отношения правдоподобия (ЛФОП) параметра T в области $[L_1, L_2]$ [0], причем $L_1/T < 1$, $L_2/T >> 1$

$$M(T) = \frac{2}{N_0}\int_0^{T_H} x(t) s(t|T)dt - \frac{1}{N_0}\int_0^{T_H} s^2(t|T)dt \qquad (2)$$

Подставляя в (2) выражение для смеси $x(t)$ (1), получаем общий вид статистики на выходе оптимального приемника

$$M(T) = q_0^2\left(S(T_0,T) - (\nu' + 1)/2\right) + q_0 N(T) = q_0^2 S_F(T_0,T) + q_0 N(T), \qquad (3)$$

где $q_0^2 = 2e/N_0$ - энергетическое отношение сигнал/шум (ОСШ) для элементарного импульса ИП.

Опорный сигнал содержит $(\nu' + 1)$ импульс, $\nu' = [T_H/T]$, где $[*]$ - целая часть числа. В выражении (3)

$$S(T_0,T) = \frac{1}{e}\sum_{i=0}^{\nu'}\sum_{k=0}^{\nu} a_i a_k \int_0^{T_H} s_0(t - kT_0) s_0(t - iT)dt = \frac{1}{e}\sum_{i=0}^{\nu'}\sum_{k=0}^{\nu} a_i a_k \psi(kT_0 - iT)$$

- АКФ последовательности импульсов. Здесь $\psi(\cdot)$ - АКФ элементарного импульса ИП с формой $s_0(t)$. $S_F(T_0,T)$ - сигнальная компонента статистики на выходе приемника ИП или сигнальная функция (СФ).

$$N(T)=\int_0^{T_H} n(t)s(t|T)dt \Big/ \sqrt{eN_0/2}$$

- шумовая компонента статистики на выходе оптимального приемника или шумовая функция (ШФ).

В процессе работы было установлено, что АКФ последовательности импульсов при расстройке по периоду имеет достаточно сложную, многопиковую структуру, поведение которой подчиняется ряду закономерностей. Высокий уровень побочных максимумов у АКФ приводит к возникновению аномальных ошибок II рода, существенно влияющих на надежность оценки периода ИП. Нарушение регулярности опорной и принятой ИП при помощи их периодической модуляции кодовыми последовательностями Баркера позволяет существенно уменьшить абсолютную величину побочных пиков. Наиболее эффективной в этом смысле оказалась кодовая последовательность Баркера с длиной кода 7. Статистика (3) на выходе оптимального приемника является гауссовским локально – стационарным процессом: на большом априорном интервале изменения периода $[L_1,L_2]$ она представляет собой нестационарный по среднему, дисперсии и интервалу корреляции процесс, а на отрезках порядка интервала корреляции внутри $[L_1,L_2]$ данная статистика проявляет свойства стационарного в широком смысле процесса [0]. Следовательно, расчет надежности оценки периода ИП в общем случае следует проводить, как для энергетического параметра.

Оценка максимального правдоподобия периода последовательности импульсов определяется, как $T_m = \arg\sup_{T_m} M(T)$. При небольших значениях ОСШ положение абсолютного максимума ЛФОП $M(T)$ может быть связано не только с главным пиком сигнальной компоненты (случай надежной оценки), но и с ее побочными максимумами (случай аномальных ошибок II рода), а также с шумовыми выбросами внутри интервала $[L_1,L_2]$ (случай аномальных ошибок I рода). Обозначим через $M_0 = M(T_0)$ величину абсолютного максимума ЛФОП в окрестности главного пика сигнальной компоненты, через $M_j = M(T_j)$, $j=\overline{1,K}$ - величины абсолютных максимумов ЛФОП в окрестности соответствующих побочных максимумов СФ, а через M_N - величину абсолютного максимума ЛФОП в области, где сигнальная компонента мала. Тогда, для большого априорного интервала изменения периода $[L_1,L_2]$, при $(L_2-L_1)/T_{кор0} >> 1$, где $T_{кор0}$ - ширина главного максимума СФ; при $q_0 >> 1$ вероятность надежной оценки периода ИП будет определяться следующим соотношением [0]

$$P_0 = P[M_0 > \{\{M_j\}M_N\}] = \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 F_N(x_0) \int_{-\infty}^{x_0} \dots \int_{-\infty}^{x_0} W(x_0,x_1,...,x_K) \prod_{j=1}^{K} dx_j \qquad (4)$$

В выражении (4) $F_N(x)$ - функция распределения вероятности шумовых выбросов M_N, $W(x_0,x_1,...,x_K)$ - многомерная плотность вероятности вектора $\vec{M}=(M_0,M_1,..M_K)$. Вследствие локально – стационарного характера статистики $M(T)$, указать аналитический вид функции распределения $F_N(M_0)$ достаточно сложно. Кроме того, даже при известной $F_N(x)$ вычисление многократного интеграла (4) представляет собой достаточно трудоемкую задачу. Простой расчет вероятности надежной оценки периода последовательности импульсов можно осуществить методами статистического моделирования.

Алгоритм коррелированных векторов, разработанный авторами, позволяет учесть влияние только аномальных ошибок II рода на надежность оценки периода последовательности импульсов. В этом случае можно положить $F_N(x_0) \equiv 1$. Тогда, вероятности надежной оценки будет выражаться в первом приближении через $(K+1)$ - кратный нормальный интеграл [0]

$$P_0 = P[M_0 > \{M_j\}_{j=\overline{1,K}}] = \sqrt{\frac{(2\pi)^{-(K+1)}}{\det \hat{R}}} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{x_0} \dots \int_{-\infty}^{x_0} \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{m})\hat{R}^{-1}(\vec{x}-\vec{m})^T\right) \prod_{j=1}^{K} dx_j \, , \qquad (5)$$

где $\vec{m} = \langle \vec{M} \rangle = \{q_0^2 S_F(T_0,T_j)\}$, $j=\overline{0,K}$ - математическое ожидание вектора $\vec{M}$; $\hat{R} = \{R_{ij}\} = q_0^2\{S_F(T_i,T_j)\}$, $i,j=\overline{0,K}$ - корреляционная матрица соответствующих отсчетов ЛФОП. Если учесть влияние всего одного побочного максимума СФ при $T/T_0 = 2$, то из (5) можно получить верхнюю границу вероятности надежной оценки периода ИП $\tilde{P}_0 = \Phi\left(\frac{q_0\sqrt{\nu}}{2\sqrt{2}}\right)$. Алгоритм коррелированных векторов реализует расчет интеграла (5) на базе метода Монте – Карло. Элементарный шаг данного алгоритма включает в себя формирование вектора

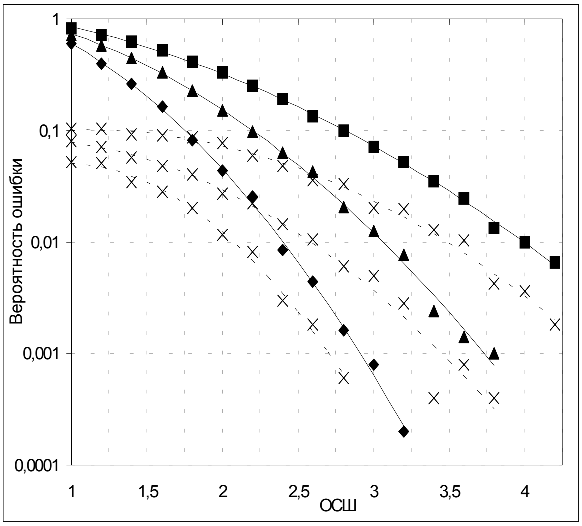
$\eta = \{\eta_j\}$, $j = \overline{0,K}$ из независимых гауссовских случайных чисел $\eta_j \sim N(0,1)$ и расчет элементов корреляционной матрицы $\hat{R}$. Затем вычисляется матричный корень $\hat{A} = \{A_{ij}\}$, $i, j = \overline{0,K}$ путем применения к матрице $\hat{R}$ разложения Холецкого

$$A_{ij} = \left(R_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} A_{ik} A_{jk} \right) \Big/ \sqrt{R_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} A_{jk}^2}\ ,\ A_{ij} = 0 \text{ при } j > i\ ;\ \hat{A}^T \hat{A} = \hat{R}$$

После расчета вектора $\vec{M}$, содержащего отсчеты ЛФОП, с помощью соотношения: $\vec{M}^T = \hat{A}\eta^T + \vec{m}^T$, производится последовательное сравнение отсчета элемента M_0, соответствующего главному максимуму сигнальной компоненты ЛФОП, с остальными элементами вектора $\vec{M}$. Событие $M_0 > \{M_j\}$, $j = \overline{1,K}$ для всех j соответствует попаданию в область надежной оценки (положительный исход). Вероятность надежной оценки находится из отношения числа положительных исходов к полному количеству испытаний.

Рассмотренный алгоритм коррелированных векторов обладает рядом недостатков. Указанный метод не учитывает аномальные ошибки I рода, влияние которых на надежность оценки периода может быть весьма существенным. Кроме того, реализация статистики на выходе оптимального приемника ИП в данном алгоритме аппроксимируются всего лишь набором отсчетов, имеющих гауссовское распределение. Исследования показали, что максимумы СФ имеют различную ширину, а ШФ нестационарна не только по дисперсии, но и по интервалу корреляции [0].

Точное вычисление вероятности надежной оценки периода ИП с учетом всего спектра аномальных ошибок возможно при помощи алгоритма прямого статистического моделирования процесса (3) на выходе оптимального приемника последовательности импульсов. Поскольку строение сигнальной компоненты ЛФОП известно и детально исследовано [0], вся сложность данного метода будет заключаться в моделировании шумовой составляющей, являющейся нестационарным процессом по дисперсии и интервалу корреляции. Алгоритм прямого статистического моделирования является модификацией и обобщением метода скользящего суммирования (МСС). Основная идея алгоритма заключается в разбиении специальным образом априорного интервала изменения периода $[L_1, L_2]$ на некоторые отрезки, где ШФ ведет себя, как локально стационарный случайный процесс, а главный пик ее корреляционной функции имеет ширину $T_{кор\ j}$, где j - номер интервала.



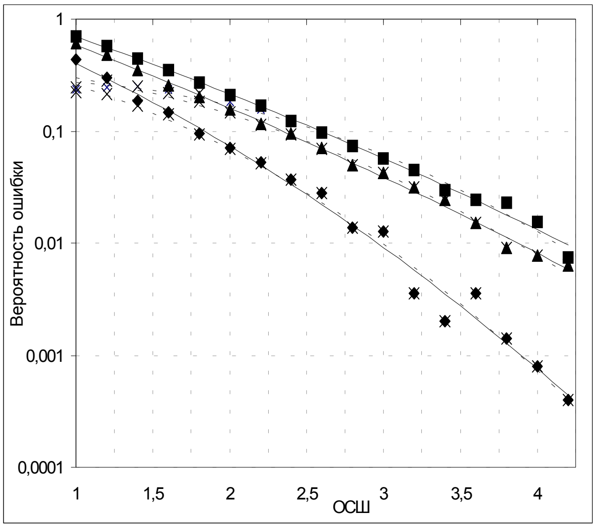


Рис. 1. Вероятности аномальных ошибок II рода и суммарной ошибки при оценке периода регулярной (слева) и модулированной кодовой последовательностью Баркера с длиной кода $M = 7$ (справа) последовательности импульсов.

Отсчеты ШФ генерируются последовательно на каждом интервале стационарности, причем количество и величины коэффициентов для метода скользящего суммирования на таких интервалах различны и вычисляются предварительно. Полученная таким образом статистика будет являться непрерывной реализацией нестационарного случайного процесса. Это позволило реализовать точное распределение максимумов процесса на выходе оптимального приемника ИП при расчете вероятности надежной оценки периода

ИП. Результаты статистического моделирования по данному алгоритму для ИП, состоящих из 7, 10, 15 импульсов, соответственно, представлены на рис. 1.

Из рисунка видно, что увеличение ОСШ и количества импульсов в ИП приводит к уменьшению вероятности аномальных ошибок II рода (крестики и пунктирные кривые) и вероятности суммарной ошибки (фигуры и сплошные кривые). Нарушение регулярности ИП по закону кодовых последовательностей Баркера позволяет существенно понизить вероятность аномальных ошибок II рода.

Литература

1. Микрокомпьютерные медицинские системы: проектирование и применение. // Под ред. Томпкинса У., Уэбстера Дж. Пер. с англ. – М.: Мир, 1983. – 544 с.

2. Радченко Ю.С., Сохнышев С.В. Структура обобщенной функции неопределенности и шумовой функции приемника сверхширокополосных последовательностей. // IV – Международная научно – техническая конференция “Радиолокация, навигация и связь”. Тезисы докладов. – Воронеж, ВГУ, 1998, Т. II. – С. 860 – 868.

3. Теория обнаружения сигналов / П.С. Акимов, П.А. Бакут, В.А. Богданович и др.; Под ред. П.А. Бакута. – М.: Радио и связь, 1984. – 440 с.

4. Куликов Е.И., Трифонов А.П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. – М.: Советское радио, 1978. – 296 с.

5. Радченко Ю.С., Моисеев С.Н. Приближенное вычисление вероятностей на основе многомерного нормального распределения. // Радиотехника и электроника, 1989, Т. 33, №1. С. 201 – 204.

THE COMPUTATION METHODS FOR DETETERMINING THE RELIABILITY OF THE CODED PULSE SEQUENCE PEROID

Nechayev Y.B., Radchenko Y.S., Sokhnyshev S.V.

Voronezh State University
394693, Voronezh, Universitetskaya square, Radiophysics Department.

The article researches the estimation reliability of the coded pulse sequences period, whose auto – correlation function has a complex multi – peak structure leading to anomalous errors of the I and II sort [0]. The anomalous errors of the II sort can be thought of as a parameter estimation ambiguity caused by multi – peak character of auto – correlation function. The anomalous errors of the I sort occur under the influence of large noise overshootings beyond the bounds of the auto – correlation function main peak.

The paper presents two algorithms of statistical modelling allowing calculation of the probability of reliable estimation of a parameter under research with different degree of accuracy. The first algorithm (correlated vector technique) has been developed based on the Monte – Carlo technique and takes into account the impact of the anomalous errors of the II sort only. The second algorithm (the technique of the output statistics direct simulation) allows to take into account the total spectrum of the anomalous errors with no derivation of additional approximations.

Let the mixture $x(t)=s(t|T_0)+n(t)=\sum_{k=0}^{\nu}a_k s_0(t-kT_0)+n(t)$ of the desired signal $s(t|T_0)$ and AWGN $n(t)$ with zero mean and power spectrum density $N_0/2$ be supplied to the input of receiver within the time of $[0,T_H]$. Here $\{a_k\}=0$ or 1, $k=\overline{0,\nu}$ - code sequence simulating regular pulse sequence. The parameter under estimation T_0 is determined in the apriori area $[L_1,L_2]$, which is much more than sub-area occupied by the primary maximum of desired signal auto – correlation function. The optimum receiver generates the logarithm of the maximum likelihood ratio functional $M(T)=\frac{1}{N_0}\int_0^{T_H}(2x(t)-s(t|T))s(t|T)dt$ of T in the area of $[L_1,L_2]$, where $L_1/T<1$, $L_2/T>>1$. The statistics $M(T)$ can be represented as:

$$M(T)=q_0^2(S(T_0,T)-(\nu'+1)/2)+q_0N(T)=q_0^2S_F(T_0,T)+q_0N(T), \qquad (6)$$

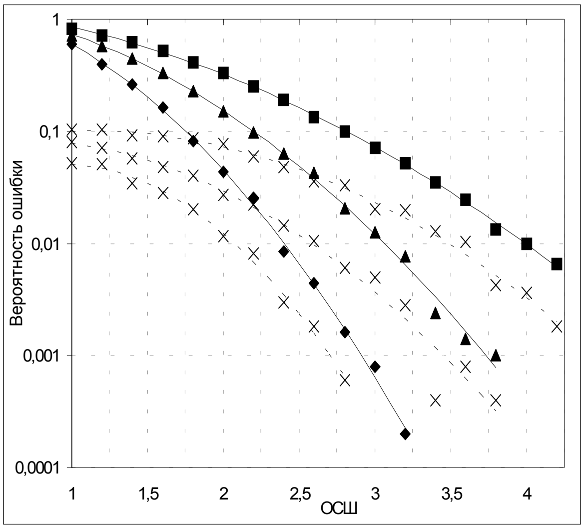
where $q_0^2=2e/N_0$ - signal – to – noise ratio (SNR) for the elementary pulse, $\nu'=[T_H/T]$, where $[*]$ - integer part of number. In expression (6), $S_F(T_0,T)$ – statistics signal component at the output of pulse signal receiver of signal function, $S(T_0,T)=\frac{1}{e}\sum_{i=0}^{\nu'}\sum_{k=0}^{\nu}a_i a_k\int_0^{T_H}s_0(t-kT_0)s_0(t-iT)dt$, $N(T)=\int_0^{T_H}n(t)s(t|T)dt\Big/\sqrt{eN_0/2}$ - statistics noise component at the output of optimum receiver. The maximum likelihood pulse sequence period estimation is given by $T_m=\arg\sup_{T_m}M(T)$. Breaking the regularity of reference and received pulse sequences using their periodic modulation by the Barker code sequences enables dramatic reduction of the absolute value of side peaks. In this sense, the most efficient is the Barker code sequence of code length of 7. Statistics (6) at the output of optimum receiver is the Gaussian locally – stationary process: within the large apriori interval of period change $[L_1,L_2]$ it is non - stationary process by average, variance and correlation interval and within the sections of correlation interval order within $[L_1,L_2]$ this statistics manifests its features of stationary process in broad sense [0].

Denote the values of absolute maximums of the logarithm of maximum likelihood ratio functional within the primary (index - 0) and respective side maximum areas of signal function by $M_j=M(T_j)$, $j=\overline{0,K}$; M_N - absolute maximum value of the logarithm of maximum likelihood ratio functional in area, where signal component is small. Then the probability of reliable estimation of pulse sequence period will be determined by $P_0=P[M_0>\{\{M_j\}M_N\}]$. According to the algorithm of correlated vectors, the probability of reliable estimation in the first approximation will be expressed through $(K+1)$ - multiple normal integral computed by the Monte-Carlo method [0]

$$P_0=P\left[M_0>\{M_j\}_{j=\overline{1,K}}\right]=\sqrt{\frac{(2\pi)^{-(K+1)}}{\det\hat{R}}}\int_{-\infty}^{\infty}dx_0\int_{-\infty}^{x_0}\dots\int_{-\infty}^{x_0}\exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{m})\hat{R}^{-1}(\vec{x}-\vec{m})^T\right)\prod_{j=1}^{K}dx_j\,, \qquad (7)$$

where $\vec{m} = \langle \vec{M} \rangle = \{q_0^2 S_F(T_0, T_j)\}$, $j = \overline{0,K}$ - mathematical expectation of vector $\vec{M}$; $\hat{R} = \{R_{ij}\} = q_0^2 \{S_F(T_i, T_j)\}$, $i, j = \overline{0,K}$ - correlation matrix of samples of the likelihood ratio functional logarithm.

Accurate computation of the probability of reliable estimation of pulse sequence period is possible with the help of the algorithm of direct statistical simulation of the process at the output of optimum receiver. The simulation algorithm is modification and generalization of the sliding summation method. The idea of the algorithm consists in division of the apriori interval $[L_1, L_2]$ into some intervals, where noise functions behaves locally as a stationary random process. Samples of noise functions are generated serially at each stationarity interval, where the number and values of coefficients for the method of sliding summation at such intervals are different and computed previously. The results of statistical simulation of this algorithm for pulse sequence, composed of 7, 10 and 15 pulses, respectively, are presented in fig.1.



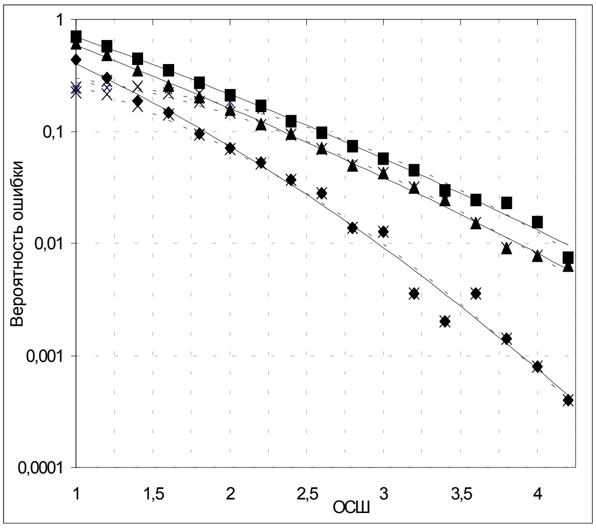


Fig. 1. The II sort anomalous errors (doted line and asterisk) and the combined error (curves and figured points) probabilities under the period estimation of regular (left) and modulated (with Barker's code sequence of code length $M = 7$) (right) pulse sequences.

References

1. Radchenko Y.S., Sokhnyshev S.V. Structure of Generalized Function of Uncertainty and Noise Function of Receiver of Super-Wideband Sequences. // IV – International scientific conference "Radio location, navigation and communications". Proceedings. – Voronezh, VSU, 1998, v II. – pp. 860 – 868.

2. Radchenko Y.S., Moyseev S.N. Approximate Computation of Probabilities Based on Multi-Dimensional Distribution. // Radio Technique and Electronics, 1989, v. 33, #1, pp. 201 – 204.