МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ, ПОСТРОЕННАЯ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА

Султанов Б.В.

Пензенский государственный университет, каф. "Защита информации в системах связи"

1. Введение.

В докладе развиваются идеи, предложенные в работе [1], применительно к анализу цифровых систем фазовой синхронизации (ЦСФС). Объектом исследования являются ЦСФС, отнесенные в одной из последних систематизаций в этой области к классу систем, реализующих алгоритмы цифровой фильтрации [2]. Излагается методика и приводятся результаты определения z - преобразования ядер Вольтерра функциональных систем, входящих в состав полиномиального фильтра 5-го порядка, аппроксимирующего исследуемые ЦСФС.

2. Структура ЦСФС, реализующих алгоритмы цифровой фильтрации.

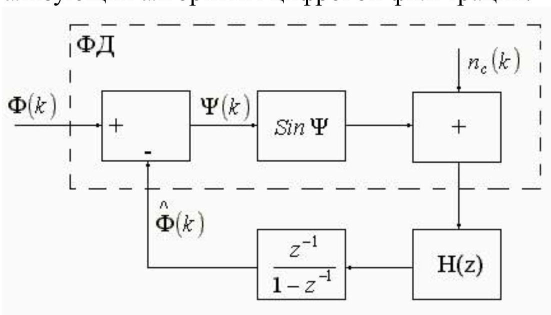

Рисунок 1

На рисунке 1 представлена обобщенная структурная схема ЦСФС, включающая в себя фазовый дискриминатор ФД с синусоидальной нелинейностью, обеспечивающий выделение разности фаз Ψ(k) задающего Φ(k) и подстраиваемого $\hat{\Phi}(k)$ колебаний и преобразующий отсчеты входного шума в $n_c(k)$, цифровой фильтр с передаточной функцией H(z) и цифровой синтезатор подстраиваемого колебания, заданный передаточной функцией $\dfrac{z^{-1}}{1-z^{-1}}$.

В области z - преобразования эта схема описывается уравнением

$$\Psi(z)=\Phi(z)-\left[Z(Sin(\Psi))+n_c(z)\right]\cdot H(z)\cdot\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}, \tag{1}$$

где Z(·) - z - преобразование от выражения в скобках;

$n_c(z)$ - условное обозначение не существующего строго z - преобразования сигнала $n_c(k)$.

Проделав несложные преобразования и введя обозначение

$$X(z)=\Phi(z)\cdot\left(1-z^{-1}\right)-n_c(z)\cdot z^{-1}\cdot H(z), \tag{2}$$

уравнение (1) можно представить в виде

$$\Psi(z)\cdot\left(1-z^{-1}\right)+Z(Sin\Psi)\cdot z^{-1}\cdot H(z)=X(z). \tag{3}$$

Переходя от z - преобразований к временным последовательностям на основе (3) получаем

$$\Psi(k)-\Psi(k-1)+Sin[\Psi(k-1)]*h(k)=x(k). \tag{4}$$

Здесь символ * означает линейную свертку;

$$h(k)=Z^{-1}[H(z)];\qquad x(k)=Z^{-1}[X(z)];$$

$Z^{-1}(\cdot)$ - обратное z - преобразование от выражения в скобках.

3. Модель ЦСФС, построенная на основе метода функциональных разложений Вольтерра.

Одним из универсальных современных подходов к анализу нелинейных систем является метод, основанный на использовании функциональных разложений Вольтерра [3], в соответствии с которым систему, осуществляющую описываемое уравнением (4) нелинейное преобразование x(k) в Ψ(k), будем аппроксимировать полиномиальным фильтром 5-го порядка. При этом выходной сигнал фильтра $\Psi(k)$ можно рассматривать как сумму

$$\Psi(k)=\Psi_1(k)+\Psi_2(k)+\Psi_3(k)+\Psi_4(k)+\Psi_5(k),$$

где $\Psi_1(k),\ldots,\Psi_5(k)$ - отклики на воздействие x(k) функциональных систем первого,…,пятого порядков с ядрами

$$h_1(k_1),\, h_2(k_1,k_2),\, h_3(k_1,k_2,k_3),\, h_4(k_1,k_2,k_3,k_4),\, h_5(k_1,k_2,k_3,k_4,k_5).$$

Для определения ядер воспользуемся методом вариационных уравнений [3]. Предположим, что в α раз изменился масштаб входного воздействия x(k) и оно равным

$$\alpha\cdot x(k). \tag{5}$$

При этом изменится и отклик системы, который будет определяться как

$$\Psi(k)=\alpha\cdot\Psi_1(k)+\alpha^2\cdot\Psi_2(k)+\alpha^3\cdot\Psi_3(k)+\alpha^4\cdot\Psi_4(k)+\alpha^5\cdot\Psi_5(k). \tag{6}$$

Разложив в (4) функцию Sin[Ψ(k-1)] в степенной ряд, подставив в полученное равенство вместо x(k) и Ψ(k) выражения (5) и (6) и приравняв слагаемые с равными степенями α получаем систему разностных уравнений

$$\Psi_1(k)-\Psi_1(k-1)+\Psi_1(k-1)*h(k)=x(k), \quad 7)$$

$$\Psi_2(k)-\Psi_2(k-1)+\Psi_2(k-1)*h(k)=0, \tag{8}$$

$$\Psi_3(k)-\Psi_3(k-1)+\Psi_3(k-1)*h(k)=\frac{1}{6}\cdot\Psi_1^3(k-1)*h(k), \tag{9}$$

$$\Psi_4(k)-\Psi_4(k-1)+\Psi_4(k-1)*h(k)=\frac{1}{2}\cdot\left[\Psi_1^2(k-1)\cdot\Psi_2(k-1)*h(k)\right], \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\Psi_5(k)-\Psi_5(k-1)+\Psi_5(k-1)*h(k)&=\frac{1}{2}\cdot\left[\Psi_1^2(k-1)\cdot\Psi_3(k-1)\right]*h(k)-\\ -\frac{1}{120}\Psi_1^5(k-1)*h(k),&\end{aligned} \tag{11}$$

каждое из которых описывает функциональную систему соответствующего порядка.

Переходя от временных последовательностей к их z - преобразованиям на основе уравнений (7-11) можно получить выражения, определяющие ядра функциональных систем. В частности, уравнение (7) в области z - преобразования принимает вид

$$\Psi_1(z)-\Psi_1(z)\cdot z^{-1}+\Psi_1(z)\cdot z^{-1}\cdot H(z)=X(z). \tag{12}$$

Если в качестве входного воздействия рассматривать последовательность $x_0(k)$ "единичный отсчет" с z - преобразованием $X_0(z)=1$, то описываемая уравнением (12) величина $\Psi_1(z)$ будет представлять собой передаточную функцию $H_1(z)$ линейной функциональной системы. Решая полученное таким образом алгебраическое уравнение относительно $H_1(z)$ находим

$$H_1(z)=\frac{z}{z-[1-H(z)]}. \tag{13}$$

Вычисляя z - преобразование от обеих частей равенства (8) получаем

$$\Psi_2(z)-\Psi_2(z)\cdot z^{-1}+\Psi_2(z)\cdot z^{-1}\cdot H(z)=0,$$

откуда следует, что $\Psi_2(z)=0$, и соответственно, $\Psi_2(k)=0$.

Последнее обстоятельство обуславливает полную идентичность уравнений (8) и (10), (а также и всех остальных полученных аналогичным образом уравнений для $\Psi_n(k)$ с четным n), из чего вытекает, что все $\Psi_n(k)$ с четными n равны нулю. Это говорит о том, что функциональные системы четных порядков в составе рассматриваемого аппроксимирующего полиномиального фильтра отсутствуют.

Возвращаясь к (7) отметим, что это уравнение описывает линейную систему с импульсной реакцией $h_1(k)$, представляющей собой обратное z - преобразование от $H_1(z)$, вследствие чего ее выходной сигнал можно определить и по-другому:

$$\Psi_1(k)=x(k)*h_1(k). \tag{14}$$

Разностное уравнение (9) полностью аналогично (7) и отличается лишь тем, что роль x(k) здесь выполняет $\frac{1}{6}\cdot\Psi_1^3(k-1)*h(k)$. Поэтому по аналогии с (14) выходной сигнал такой системы определяется как

$$\Psi_3(k)=\left[\frac{1}{6}\cdot\Psi_1^3(k-1)*h(k)\right]*h_1(k). \tag{15}$$

Уравнению (15) соответствует структура, показанная на рисунке 2 и построенная с учетом (14). Из схемы видно, что анализируемая функциональная система 3-го представляет собой последовательную комбинацию системы 3-го порядка с ядром

$$H_{3n}(z_1,z_2,z_3)=\prod_{i=1}^{3}H_1(z_i)\cdot z_i^{-1} \tag{16}$$

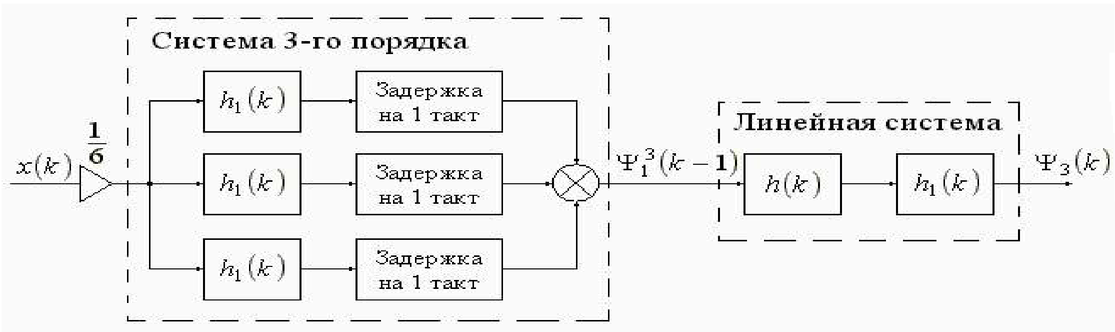

Рисунок 2

и линейной системы с передаточной функцией

$$H_{мин}(z)=H(z)\cdot H_1(z), \tag{17}$$

Можно показать, что в такой ситуации искомое ядро полной системы определяется как

$$H_3(z_1,z_2,z_3)=H_{мин}(z_1\cdot z_2\cdot z_3)\cdot H_{3n}(z_1,z_2,z_3), \tag{18}$$

или, с учетом (13), (17) и (18),

$$H_3(z_1,z_2,z_3)=\frac{1}{6}\cdot\frac{z_1\cdot z_2\cdot z_3\cdot H(z_1\cdot z_2\cdot z_3)}{z_1\cdot z_2\cdot z_3-[1-H(z_1\cdot z_2\cdot z_3)]}\cdot\prod_{i=1}^{3}\frac{1}{z_i-[1-H(z_i)]}. \tag{19}$$

Уравнение (11) также имеет структуру, аналогичную уравнениям (7) и (9) и отличается лишь видом правой части. Поэтому проводя рассуждения, подобные приведенным выше, на его основе можно получить выражения для z - преобразования ядра функциональной системы 5-го порядка, которое имеет вид

$$H_5(z_1,z_2,z_3,z_4,z_5)=\frac{1}{12}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{5}Z_i\cdot H\left(\prod_{i=1}^{5}Z_i\right)}{\prod_{i=1}^{5}Z_i-\left[1-H\left(\prod_{i=1}^{5}Z_i\right)\right]}\cdot \tag{20}$$

$$\cdot\prod_{i=1}^{5}\frac{1}{z_i-[1-H(z_i)]}\left\{\frac{H(z_3\cdot z_4\cdot z_5)}{z_3\cdot z_4\cdot z_5-[1-H(z_3\cdot z_4\cdot z_5)]}-0{,}1\right\}$$

Таким образом, математической моделью рассматриваемых систем синхронизации при выбранной точности аппроксимации является полиномиальный фильтр, включающий функциональные системы 1-го, 3-го и 5-го порядков с ядрами, задаваемыми выражениями (13), (19) и (20) и при входном воздействии вида (2).

4. Заключение.

Найденные в работе выражения для z - преобразования ядер Вольтерра позволяют провести статистический анализ нелинейной модели ЦСФС различных порядков, определяемых видом H(z), при разнообразных (в том числе и случайных) законах изменения задающей фазы Φ(k) на фоне аддитивного дискретного белого гауссовского шума. Методология этого анализа базируется на использовании правила ассоциирования многомерного z - преобразования, теорем о конечных значениях, равенства Парсеваля и т.д., его результатом являются аналитические выражения для математического ожидания и дисперсии стационарной фазовой ошибки Ψ(k).

Литература

1. Ван Трис. Функциональные методы анализа нелинейного систем фазовой автоподстройки частоты. ТИИЭР, 1964, т.52, №8, стр. 957-975.

2. Van Trees H.L. Functional Techniques for the Analysis of the Nonlinear Behavior of Phase-Locked Loops. Proceedings of the IEEE, volume 58, number 8, august, 1964.

3. Шахтарин Б.И. Статистическая динамика систем синхронизации, М., "Радио и связь", 1998 г.

4. Rugh W.J. Nonlinear System Theory. The JOHNS HOPKINS university Press. Baltimor and London.

MATHEMATICAL MODEL OF DIGITAL PHASE-LOCKED LOOPS OPERATING A METHOD OF VOLTERRA'S FUNCTIONAL DISINTEGRATINGS.

Sultanov B.V.

1. Introduction.

The report is dedicated to development of ideas published in the article [1], with reference to the analysis of digital phase-locked loops (DPLL). Object of research are the DPLL referred in one of last systematizations in this area to the class of systems, realising algorithms of digital filtration [2]. The technique of obtaining is set up and the resultant expressions for Z-transformation of Volterra's cores of functional systems which are included in a structure of the polynomial filter of the fifth order, appoximating investigated DPLL are given.

2. Pattern of DPLL realising algorithms of a digital filtration.

The pattern includes a phase discriminator with sinusoidal non-linearity ensuring allocation of a phase difference ψ(k) specifying ϕ(k) and adjustable $\hat{\Psi}(k)$ oscillations, digital filter of a feedback circuit with a transfer function H(Z) and digital synthesizer of adjustable oscillation with a transfer function $\frac{Z^{-1}}{1-Z^{-1}}$. It is possible to show, that this scheme is described by a difference equation

$$\Psi(k)-\Psi(k-1)+Sin[\Psi(k-1)]*h(k)=x(k). \tag{1}$$

where ∗ is the sign of a linear convolution, h(k) is inverse z-transform of H(Z) and x(k) are samples of input, spotted by a specifying phase and additive noise.

3. Model of DPLL operating a method of Voterra's functional disintegratings.

The idea of the analysis DPLL with the help of Volterra's functional disintegratings consists in approximating a system executing depicted equation (1) nonlinear transformations x(k) into ψ(k) polynomial filter, the output signal can be esteemed which one as the sum of responses n of functional systems 1,2,...,nth orders. (In the report it is accepted n=5). The cores of functional systems can be defined on the basis of the variational equation approach [3].

Having decomposed in (1) function sin[ψ(k-1)] in a power series with the help of this method we receive a set of difference equations, each of which describes a system of the applicable order:

$$\Psi_1(k)-\Psi_1(k-1)+\Psi_1(k-1)*h(k)=x(k), \tag{2}$$

$$\Psi_2(k)-\Psi_2(k-1)+\Psi_2(k-1)*h(k)=0, \tag{3}$$

$$\Psi_3(k)-\Psi_3(k-1)+\Psi_3(k-1)*h(k)=\frac{1}{6}\cdot\Psi_1^3(k-1)*h(k), \tag{4}$$

$$\Psi_4(k)-\Psi_4(k-1)+\Psi_4(k-1)*h(k)=\frac{1}{2}\cdot\left[\Psi_1^2(k-1)\cdot\Psi_2(k-1)*h(k)\right], \tag{5}$$

$$\Psi_5(k)-\Psi_5(k-1)+\Psi_5(k-1)*h(k)=\frac{1}{2}\cdot\left[\Psi_1^2(k-1)\cdot\Psi_3(k-1)\right]*h(k)-\\-\frac{1}{120}\Psi_1^5(k-1)*h(k), \tag{6}$$

Deciding an equation (2) in the terms of z-transformation rather $\psi_1(z)$ at x(z)=1 we receive expression for the z- transformation of a core of a linear system

$$H_1(z) = \frac{z}{z - [1 - H(z)]}. \tag{7}$$

The analysys of equations (3) and (5) demonstrates, that at even n $\psi_n(k)=0$.

The equations (4) and (6) have pattern similar (2), and differ only by kind of a right member. Passing from sequences to z-transformations, using properties of multidimensional z-transformations in view of this circumstance it is possible to receive expressions for cores of systems of 3-rd and 5-th order, which one look like:

$$H_3(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot H(z_1 \cdot z_2 \cdot z_3)}{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 - [1 - H(z_1 \cdot z_2 \cdot z_3)]} \cdot \prod_{i=1}^{3} \frac{1}{z_i - [1 - H(z_i)]}. \tag{8}$$

$$H_5(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) = \frac{1}{12} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{5} Z_i \cdot H\left(\prod_{i=1}^{5} Z_i\right)}{\prod_{i=1}^{5} Z_i - \left[1 - H\left(\prod_{i=1}^{5} Z_i\right)\right]} \cdot \tag{9}$$

$$\cdot \prod_{i=1}^{5} \frac{1}{z_i - [1 - H(z_i)]} \left\{ \frac{H(z_3 \cdot z_4 \cdot z_5)}{z_3 \cdot z_4 \cdot z_5 - [1 - H(z_3 \cdot z_4 \cdot z_5)]} - 0{,}1 \right\}$$

Thus, a mathematical model of considered DPLL at selected accuracy at approximating is the polynomial filter including functional systems 1-st, 3-rd and 5-th orders with cores assigned expressions (7), (8), (9).

4. Conclusion.

The expressions, retrieved in this report, for z-transformation of Volterra's cores allow to conduct a statistical analysis of nonlinear model DPLL of the different orders spotted by a kind H(Z), at miscellaneous (including random) laws of change of a specifying phase $\phi(k)$ on a background additive discrete white Gaussian noise. The methodology of such analysis is founded on usage of a rule of association of multidimensional z- transformation, theorems of final values, equaliting of the Parseval etc., its outcome are the analytical for expectation and dispersion of a phase error $\psi(k)$.

References

1. Ван Трис. Функциональные методы анализа нелинейного систем фазовой автоподстройки частоты. ТИИЭР, 1964, т.52, №8, стр. 957-975.

2. Van Trees H.L. Functional Techniques for the Analysis of the Nonlinear Behavior of Phase-Locked Loops. Proceedings of the IEEE, volume 58, number 8, august, 1964.

3. Шахтарин Б.И. Статистическая динамика систем синхронизации, М., "Радио и связь", 1998 г.

4. Rugh W.J. Nonlinear System Theory. The JOHNS HOPKINS university Press. Baltimor and London.