БЫСТРЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ОЦЕНКИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИСТОЧНИКОВ СИГНАЛОВ

Курикша А.А.
ОАО "МАК Вымпел"
125319, Москва, 4 ул. 8 Марта, 3, e-mail askurik@astroinform.ru

Постановка задачи

Требуется оценить плотность $f(\vec{r})$ распределения в объеме *V* источников, каждый из которых излучает сигнал $u(t)$ (*t* - время). Приемник, расположенный в точке $\vec{r}_j$, принимает сигнал

$$y_j(t) = y(t,\vec{r}_j) = A\int_V \frac{1}{|\vec{r}_j - \vec{r}|}\cdot u(t-\frac{1}{v}|\vec{r}_j - \vec{r}|)\cdot f(\vec{r})d\vec{r}\ , \tag{1}$$

где *A*- амплитудный множитель, *v* - скорость распространения сигнала (в задачах активной локации, если излучатель и приемник совмещены, можно использовать (1), уменьшая формально скорость в два раза). Требуется определить $f(\vec{r})$, используя сигналы датчиков, расположенных, в некотором множестве точек.

Задача такого рода возникает в медицине - в ультразвуковой и в оптикоакустической диагностике [1, 2, 3], в радиолокаторах подповерхностного зондирования [4], в радиолокаторах с синтезированной апертурой [5] и в других приложениях.

Быстрые алгоритмы обратной проекции для плоской решетки датчиков

Для решения сформулированной задачи используется [1-4] так называемый «алгоритм обратной проекции», заключающийся в суммировании в каждой точке объема *V* сигналов от всех датчиков с соответствующими задержками и с весами, компенсирующими ослабление сигналов. В результате получается

$$g(\vec{r}) = \sum_j A(|\vec{r}_j - \vec{r}|)z(|\vec{r}_j - \vec{r}|/v)\,, \tag{2}$$

где $z_j(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} y_j(t)u(t-\tau)d\tau$ - результат фильтрации сигнала по времени, *A(r)*- весовой множитель, учитывающий ослабление сигнала с расстоянием.

Этот результат можно получить с меньшими затратами производительности, используя быстрое преобразование Фурье (БПФ).

Трехмерное преобразование Фурье (2) есть

$$\tilde{g}(\vec{\kappa}) = \sum_j Z_j(v\kappa)\exp(-i\vec{\kappa}\,\vec{r}_j), \tag{3}$$

где $Z_j(v\kappa) = -\frac{4\pi v}{\kappa}\operatorname{Im}\tilde{z}_j(v\kappa)$, если решетка находится внутри исследуемого объема, и $Z_j(v\kappa) = -\frac{2\pi v}{i\kappa}(\tilde{z}_j(0) - \tilde{z}_j(v\kappa))$, если элементы решетки находятся на границе объема, а $\tilde{z}_j(\omega)$ - спектр функции *A(vt) vt* $z_j(t)$. Задача состоит в том, чтобы представить (3) в виде, допускающем расчет с использованием БПФ.

Плоская решетка. Дополнив формально решетку датчиков до ближайшей прямоугольной эквидистантной решетки и заменяя сигналы во вновь вводимых элементах решетки нулями, можно представить (3) как результат Фурье-преобразования множества сигналов *A(vt) vt* $z_j(t)$ сначала по времени с формированием $\operatorname{Im}\tilde{z}_j(\omega)/|\omega|$ или $\frac{1}{i\omega}[\tilde{z}_j(0) - \tilde{z}_j(\omega)]$, а затем по плоскости размещения датчиков. Обозначив этот результат как $Z(\omega, \vec{\kappa}_p)$, получим $\tilde{g}(\vec{\kappa}) = Z(v\sqrt{\kappa_\perp^2 + \kappa_p^2}, \vec{\kappa}_p)$, где $\kappa_\perp$ - пространственная частота по нормали к плоскости решетки, а $\vec{\kappa}_p$- вектор пространственных частот в плоскости решетки. Отсюда $g(\vec{r})$ получается обратным преобразованием Фурье.

Приближенная оценка требуемого числа операций (типа умножения + сложения комплексных чисел) показывает, что данный алгоритм требует $M^2N\,log_2M^2N$ операций (*M* – размер решетки, *N* – размер объема *V* по каждой координате в элементах разрешения) на формирование (3) и $N^3\,log_2N^3$ на обратное преобразование Фурье (здесь и далее учитываются только главные по порядку величины слагаемые). Это примерно в 1,6M/log_2N раз меньше, чем прямое выполнение обратной проекции. Например, при $N=128$, $M=32$ выигрыш составит 7 раз.

В работе автора [6] показано, что в случае, когда датчики плотно заполняют плоскость, распределение источников определяется с точностью до любой нечетной относительно плоскости решетки функции.

<u>Кольцевая решетка</u>. Пусть элементы решетки расположены равномерно на окружности радиуса R. В этом случае

$$g(\vec{\kappa}) = \sum_j Z_j(\nu\kappa)\exp\left[-i\kappa_p R\cos(\varphi_\kappa - j\frac{2\pi}{M})\right], \tag{4}$$

где φ_κ - угол между осью X и вектором $\vec{\kappa}_p$. Переходя к дискретным значениям этого угла и дополняя, при необходимости, решетку до достаточно плотной на кольце с нулевыми сигналами в добавляемых элементах, можно преобразовать (4) к виду дискретной круговой свертки и вычислять свертку с использованием БПФ:

$$g(\vec{\kappa}) = \frac{1}{M}\sum_\mu C_\mu(\kappa_p R)\exp(i\frac{2\pi}{M}\mu\, m)\sum_j Z_j(\nu\kappa)\exp(i\frac{2\pi}{M}\mu\, j), \tag{5}$$

где m – целая часть $M\varphi_\kappa / 2\pi$, а

$$C_\mu(\kappa_p R) = \sum_j \exp\left[-i\kappa_p R\cos(\frac{2\pi}{M}j) - i\frac{2\pi}{M}\mu j\right]. \tag{6}$$

Полагая дополненное число элементов решетки равным периметру объема (в элементах разрешения), получим, что на формирование (5) требуется примерно 25 $N^2 \log_2 N$ операций.

Для визуализации распределения источников требуется обычно формировать проекции пространственного распределения на координатные плоскости. Чтобы получить проекцию трехмерного распределения источников на плоскость решетки, достаточно положить проекцию вектора пространственных частот в (5) на нормаль к плоскости решетки равной нулю и произвести двумерное обратное преобразование Фурье. Число операций на обратное преобразование уменьшится в 1,5N раз. Выигрыш по сравнению с непосредственной реализацией алгоритма обратной проекции составит примерно 0,15 $MN/\log_2 N$ раз. При M=32, N=128 – более чем в 80 раз.

<u>Объект наблюдения в дальней зоне. Радиолокатор с синтезированной апертурой.</u> В этом случае наблюдаются высокочастотные сигналы от объекта в дальней зоне (размеры объекта малы по сравнению с расстоянием до него) в небольшом диапазоне равноотстоящих ракурсов. Вместо (2) имеем

$$g(d,x) = A\sum_j z_j\left(2\frac{d + j\theta\, x}{v}\right)\exp(-i\frac{4\pi}{\lambda}j\theta\, x), \tag{7}$$

где d - дальность, x - координата в плоскости изменения ракурса, θ - разность соседних ракурсов, λ - длина волны. Выходом радиолокатора является квадрат модуля (7).
Реализация алгоритма (7) требует порядка $2NM^2$ операций. Переходя к спектрам, можно записать (7) как

$$g(d,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa d}d\kappa\cdot\tilde{Z}\left[\kappa,(-\frac{4\pi}{\lambda}+\kappa)\theta\, x\right];\ \tilde{Z}(\kappa,\xi) = \sum_j \tilde{z}_j(\kappa)e^{-i\xi j}. \tag{8}$$

Для реализации алгоритма (8) требуется порядка $MN\log_2 MN^2$ операций. При $M=N=128$ получается выигрыш в 12 раз.

<u>Объект наблюдения в дальней зоне. Томография с неполными данными.</u> В результате трехмерного Фурье-преобразования (2) при $r_j >> L$ (размер исследуемого объема) получаем

$$g(\vec{\kappa}) = 4\pi v^2\sum_j \frac{1}{r_j}\tilde{z}_j(-v\vec{\kappa}\vec{\rho}_j)\exp(i\vec{\kappa}\vec{r}_j)\delta^{(2)}(\vec{\kappa} - (\vec{\kappa}\vec{\rho}_j)\vec{\rho}_j). \tag{9}$$

Спектр представлен набором дискретных по направлениям векторов пространственных частот. В этом случае переход к пространственному спектру не дает явного выигрыша в числе операций. Однако позволяет проще осуществить процедуры рекуррентного уточнения распределения источников при неполных данных (когда набор направлений недостаточно плотный или покрывает диапазон меньше 2π страдиан (в двумерном случае - π радиан)).

Заключение

Применение алгоритмов, использующих быстрое преобразование Фурье с преобразованием координат в частотном пространстве, дает возможность существенно ускорить получение оценок распределения источников по излучаемым или рассеиваемым ими сигналам.

Это преимущество является принципиальным в задачах, где для уточнения результатов обратной проекции при наличии ограничений на искомую функцию используются рекуррентные процедуры (максимизации правдоподобия или проекции на выпуклое множество [7]).

Часть описанных алгоритмов реализована программно (томография с неполными данными и синтез апертуры). Алгоритм для кольцевой решетки находится в стадии моделирования. Результаты будут представлены в полном тексте доклада.

Настоящее исследование выполнено частично благодаря гранту № RP2 – 2109 АФГИР.

Литература.

1. Физика визуализации изображений в медицине, под ред. С. Уебба, пер. с англ. Москва, «Мир», 1991.

2. A. A. Oraevsky, S. L. Jacques, R. O. Esenaliev, F. K. Tittel: Laser Opto-Acoustic Tomography for medical diagnostics: principles, Proc. SPIE 1996; 2671; 22-31.

3. V. G. Andreev et al: Opto-acoustic tomography of breast cancer with arc-array transducer, Proc. SPIE 2000; 3916; 36-47.

4. А. Ю. Гринев и др. Подповерхностная РЛС с видеоимпульсным сигналом, Труды XXVIII конференции по теории и технологии антенн, 22-24 сентября 1998 г.

5. Справочник по радиолокации, под ред. М. Сколника, пер. с англ. Москва, «Сов. Радио», 1977, т.2.

6. А. А. Курикша, Об обратной задаче восстановления распределения источников сигналов в полупространстве по наблюдениям сигналов на поверхности, «Радиотехника и электроника», 2000, том 45, № 6.

7. A. Levi, H. Stark: Image restoration by the method of generalized projection, JOSA A/vol.1 No. 9/Sept. 1989.

FAST ALGORITHMS FOR ESTIMATION OF SIGNAL'S SOUTH'S DISTRIBUTION

Kuriksha A.A.

e-mail askurik@astroinform.ru

Problem statement

It is frequent a need for estimation of south's density $f(\vec{r})$ in volume *V,* every of which emit the signal $u(t)$ (*t*- time). The receiver (sensor) in the point $\vec{r}_j$ receive the signal

$$y_j(t) = y(t, \vec{r}_j) = A \int_V \frac{1}{\left|\vec{r}_j - \vec{r}\right|} \cdot u(t - \frac{1}{v}\left|\vec{r}_j - \vec{r}\right|) \cdot f(\vec{r}) d\vec{r} \, , \tag{1}$$

where *A* – amplitude multiplier, , *v* – velocity of wave's propagation. We need to estimate $f(\vec{r})$ having the set of points { $\vec{r}_j$ }.

This problem occur in medicine – in ultrasonic and opto-acoustic diagnostics [1,2,3], in the undersurface radars [4], in the synthetic aperture radars [5] and in other applications.

Fast back-projection algorithms for the planar sensor's array

For decision of the formulated problem it is used [1-4] the back-projection algorithm consisting in summation of signals (1) in every point of *V* with the corresponding delays and with the multipliers for compensation of signal's attenuation. The result is

$$g(\vec{r}) = \sum_j A(\left|\vec{r}_j - \vec{r}\right|) z(\left|\vec{r}_j - \vec{r}\right| / v) \, , \tag{2}$$

where $z_j(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} y_j(t) u(t - \tau) d\tau$ - result of time-filtering of signal, *A(r)*- the compensating multiplier.

It is feasible to get this result with the lower requirements for computation's capacity using fast Fourier-transform (FFT) and coordinate-transformation in frequencies space. Three-dimensional Fourier-transform of (2) is

$$\tilde{g}(\vec{\kappa}) = \sum_j Z_j(v\kappa)\exp(-i\vec{\kappa}\,\vec{r}_j), \tag{3}$$

where $Z_j(v\kappa) = -\frac{4\pi v}{\kappa}\operatorname{Im}\tilde{z}_j(v\kappa)$ if array is inside of the researched volume and $Z_j(v\kappa) = -\frac{2\pi v}{i\kappa}(\tilde{z}_j(0) - \tilde{z}_j(v\kappa))$ if array's elements are on bounder of it, $\tilde{z}_j(\omega)$ - specter of function *A(vt) vt* $z_j(t)$. The task consists in representation (3) in form what allows to use FFT.

The planar array. Padding the array to get the rectangular equidistant array it is possible to represent (3) as a result of the sequential Fourier-transform of the set of signals *A(vt) vt* $z_j(t)$ on time with forming of $\operatorname{Im}\tilde{z}_j(\omega)/|\omega|$ or $\frac{1}{i\omega}\left[\tilde{z}_j(0) - \tilde{z}_j(\omega)\right]$ and on plane of sensors location. Designating result of this transformation as $Z(\omega, \vec{\kappa}_p)$, became $\tilde{g}(\vec{\kappa}) = Z(v\sqrt{\kappa_\perp^2 + \kappa_p^2}, \vec{\kappa}_p)$, where $\kappa_\perp$ - space-frequency on normal to the plane of array, and $\vec{\kappa}_p$ - space-frequency vector in the plane of array. Then the $g(\vec{r})$ may be derived with inverse Fourier-transform.

The rough evaluation of the required operations number (type of multiplexing+summing for the complex numbers) is $M^2N\ log_2M^2N$ (M – size of sensor's array, N – size of V on every axis in resolution's elements) for (3) forming and $N^3\ log_2N^3$ for inverse Fourier-transform (here and farther only the main terms on the magnitude are taken into account) It is about $1{,}6M/log_2N$ times less then calculation with (2). For example, if $N=128$, $M=32$, the profit reaches 7 times.

In author's paper [6] it is derived, that if the sensors are disposed on whole plane with little intervals the south's distribution in semi space may be estimated exactly.

The ring array. The sensors are equally spaced on the circle with radius R. In this case

$$g(\vec{\kappa}) = \sum_j Z_j(v\kappa)\exp\left[-i\kappa_p R\cos(\varphi_\kappa - j\frac{2\pi}{M})\right] \tag{4}$$

where φ_κ - angle contained by угол axis X and vector $\vec{\kappa}_p$. At the discrete values of this angle and adding the array by elements with null-signals it is possible to represent (4) as the discrete round convolution and calculate it using FFT:

$$g(\vec{\kappa}) = \frac{1}{M}\sum_\mu C_\mu(\kappa_p R)\exp(i\frac{2\pi}{M}\mu\ m)\sum_j Z_j(v\kappa)\exp(i\frac{2\pi}{M}\mu\ j), \tag{5}$$

where m – integer part of $M\varphi_\kappa/2\pi$, and

$$C_\mu(\kappa_p R) = \sum_j \exp\left[-i\kappa_p R\cos(\frac{2\pi}{M}j) - i\frac{2\pi}{M}\mu j\right]. \tag{6}$$

This calculation requires near $25\ N^2\ log_2N$ operations.

Usually for imaging of south's distribution the projections of it on coordinate planes are used. To get projection $g(\vec{r})$ on the array's plane it is sufficient to substitute $\kappa_z = 0$(κ_z - projection on normal to array's plane) and use 2D- inverse Fourier-transform. Required number of operations is in 1.5N times less then 3D transform. The profit in comparison with direct back-projection reaches near $0{,}15\ MN/log_2N$ times. If M=32, N=128 – more 80 times.

The object disposed in far zone. Synthesis aperture radar. In this case high-frequency signals are received from object with sizes small in comparison with the range to it in little diapason of the equidistant directions. Instead of (2) we have

$$g(d,x) = A\sum_j z_j\left(2\frac{d + j\theta\ x}{v}\right)\exp(-i\frac{4\pi}{\lambda}j\theta\ x), \tag{7}$$

where d - range, x - cross-range in direction-change plane, θ - difference of neighbouring directions, λ - wave length. Output of radar is square of the module (7).

It is required for algorithm (7) near of $2NM^2$ operations. In spectrum representation

$$g(d,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa d}d\kappa \cdot \tilde{Z}\left[\kappa, (-\frac{4\pi}{\lambda} + \kappa)\theta\ x\right];\ \tilde{Z}(\kappa,\xi) = \sum_j \tilde{z}_j(\kappa)e^{-i\xi j}. \tag{8}$$

The realization of (8) requires near $MN\ log_2\ MN^2$ operations. If $M=N=128$ the profit reaches 12 times.

The object disposed in far zone. The tomography with not full data. After 3D Fourier-transform (2) under condition $r_j >> L$ (size of V) we have

$$g(\vec{\kappa}) = 4\pi v^2 \sum_j \frac{1}{r_j} \tilde{z}_j(-v\vec{\kappa}\vec{\rho}_j)\exp(i\vec{\kappa}\vec{r}_j)\delta^{(2)}(\vec{\kappa} - (\vec{\kappa}\vec{\rho}_j)\vec{\rho}_j)\,. \tag{9}$$

The spectrum consist of M components which are discrete on directions. In this case Fourier-transform give not the profit in number of operations. But it make available more simple procedures for the recurrent correction of south's distribution with not full date (if set's of the directions density is not sufficient or its diapason is less then 2π steradian (for 2D - π radian)).

Conclusion

The algorithms using fast Fourier-transform and coordinates transformation in frequency space allows to accelerate the calculation of the signals-south distribution.
This advantage is principal for tasks with the recurrent correction of estimations (by the likelihood maximization or by generalized projection on convex set [7].

Part of described algorithms was realized as programs (tomography with not full date and aperture's synthesis) The algorithm for the ring array is on simulation phase. The results will be presented probably in full text of this report.

The research described in this publication was made possible in part by award No. RP2-2109 of CRDF (American Civilian Research and Development Foundation for the Independent States of the former Soviet Union)

References:

1. The Physics of Medical Imaging, Ed. By Steve Webb, Adam Hilder, Bristol and Philadelphia, 1988.

2. A. A. Oraevsky, S. L. Jacques, R. O. Esenaliev, F. K. Tittel: Laser Opto-Acoustic Tomography for medical diagnostics: principles, Proc. SPIE 1996; 2671; 22-31.

3. V. G. Andreev et al: Opto-acoustic tomography of breast cancer with arc-array transducer, Proc. SPIE 2000; 3916; 36-47.

4. А. Ю. Гринев и др. Подповерхностная РЛС с видеоимпульсным сигналом, Труды XXVIII конференции по теории и технологии антенн, 22-24 сентября 1998 г.

5. Справочник по радиолокации, под ред. М. Сколника, пер. с англ. Москва, «Сов. Радио», 1977, т.2.

6. А. А. Курикша, Об обратной задаче восстановления распределения источников сигналов в полупространстве по наблюдениям сигналов на поверхности, «Радиотехника и электроника», 2000, том 45, № 6.

7. A. Levi, H. Stark: Image restoration by the method of generalized projection, JOSA A/vol.1 No. 9/Sept. 1989.