

ОПТИМАЛЬНАЯ ЦИФРОВАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛОВ С УЧЕТОМ ВОЗДЕЙСТВИЯ СЛУЧАЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Мальцев А.А., Польдин О.В., Силаев А.М.

Нижегородский государственный университет
603600, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, кафедра статистической радиофизики

1. Введение и постановка задачи

В данной работе рассматривается задача оптимального оценивания состояния динамической дискретной системы, подверженной шумовым и импульсным возмущениям, появляющимся в случайный момент времени. При этом одновременно с оцениванием состояния системы производится и оценивание величины (амплитуды) импульса. Такого типа задачи возникают при обработке измерительной информации, например с целью технической диагностики машин и механизмов, обнаружении случайных импульсных сигналов в акустике, при обнаружении и измерении величины "разладок" различных технологических процессов [1].

В предыдущей работе авторов [2] был получен алгоритм оптимального нелинейного оценивания вектора состояния динамической системы и амплитуды возмущения на основе рекуррентного вычисления их совместной апостериорной плотности вероятности. Однако, во-первых, предложенный ранее алгоритм требует очень больших вычислительных затрат и, во-вторых, во многих задачах обработки сигналов не требуется непосредственно находить апостериорную плотность вероятности амплитуды импульсного возмущения, а достаточно ограничиться текущим оцениванием математического ожидания и дисперсии. Настоящая работа посвящена нахождению и численному исследованию характеристик такого более простого алгоритма обнаружения-оценивания.

Математически описанная задача формулируется следующим образом. Будем предполагать, что импульсное возмущение, действующее на динамическую систему, можно представить в виде отклика некоторой линейной системы на дельта-импульсное воздействие со случайной амплитудой в случайный момент времени. В отличие от шумов, которые имеют хаотический характер, импульсные возмущения обладают квазидетерминированной структурой и могут быть описаны функциями времени, определенными с точностью до неизвестных параметров. Объединим компоненты оцениваемого сигнала и возмущения импульсного типа в вектор $\mathbf{x}(t)$. Пусть векторный процесс $\mathbf{x}(t)$ и наблюдаемый векторный процесс $\mathbf{y}(t)$ задаются следующими уравнениями в дискретном времени

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{f}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t)\xi(t) + \mathbf{A}\delta(t, \tau), \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(t)\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\eta}(t), \quad (2)$$

где $\mathbf{f}(t)$, $\mathbf{g}(t)$, $\mathbf{h}(t)$ - известные матрицы; $\xi(t)$, $\boldsymbol{\eta}(t)$ - последовательности независимых векторных случайных величин с известными плотностями вероятностей, описывающие шумовые возмущения в моделях сигнала и наблюдений; $\mathbf{A}\delta(t, \tau)$ - дельта-импульсное возмущение сигнала $\mathbf{x}(t)$, возникающее в случайный момент времени τ со случайной векторной амплитудой \mathbf{A} ; $\delta(t, \tau)$ - символ Кронекера.

Предполагается, что в начальный момент времени $t=0$ заданы плотности вероятностей $P(\mathbf{x}_0)$, $P_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})$ начального состояния сигнала \mathbf{x}_0 и случайной амплитуды импульсного возмущения \mathbf{A} , а также априорные вероятности $P_{\tau}(\tau)$ возможных дискретных значений случайного момента появления импульса. Задача заключается в том, чтобы найти алгоритм оптимального оценивания в момент времени t сигнала $\mathbf{x}(t)$ и амплитуды импульсного возмущения \mathbf{A} по реализации наблюдаемого процесса $\mathbf{y}_1^t = \{\mathbf{y}(1), \mathbf{y}(2), \dots, \mathbf{y}(t)\}$, а также исследовать точность получаемых оценок.

2. Уравнения для плотностей вероятности сигнала и амплитуды

Вычислить оптимальные оценки векторов $\mathbf{x}(t)$ и \mathbf{A} по любому критерию качества для текущего момента времени позволяет совместная апостериорная плотность вероятности совокупности $\{\mathbf{x}(t), \mathbf{A}\}$

$$P(\mathbf{x}(t), \mathbf{A}, t | \mathbf{y}_1^t) = W(\mathbf{x}(t), \mathbf{A}).$$

Поскольку в каждый момент времени выполняется одна из двух возможных ситуаций -- импульсное возмущение еще не появилось ($t \leq \tau$) или уже появилось ($t > \tau$), то функцию $W(\mathbf{x}(t), \mathbf{A})$ можно представить в виде суммы

$$W(\mathbf{x}(t), \mathbf{A}) = W_0(\mathbf{x}(t), \mathbf{A})p_0(t) + W_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{A})p_1(t),$$

где $p_0(t) = P(t \leq \tau | \mathbf{y}_1^t)$ и $p_1(t) = P(t > \tau | \mathbf{y}_1^t)$ имеют смысл апостериорных вероятностей непоявления и появления импульсного возмущения до момента времени t ; $W_0(\mathbf{x}(t), \mathbf{A})$ и $W_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{A})$ -- апостериорные условные плотности вероятностей совокупности оцениваемых векторов.

Уравнение состояния динамической системы (1) и уравнение наблюдений (2) запишем используя вектор $\mathbf{X}(t) = \{\mathbf{x}^T(t), \mathbf{A}^T\}^T$ в стандартном виде

$$\mathbf{X}(t+1) = \mathbf{F}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{G}(t)\xi(t), \quad (3)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\eta}(t), \quad (4)$$

где

$$\mathbf{F}(t) = \begin{cases} \mathbf{F}_0(t), & t \neq \tau, \\ \mathbf{F}_1(t), & t = \tau, \end{cases}, \quad \mathbf{F}_0(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(t) & | & [\mathbf{0}] \\ \text{---} & + & \text{---} \\ [\mathbf{0}] & | & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_1(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(t) & | & \mathbf{I} \\ \text{---} & + & \text{---} \\ [\mathbf{0}] & | & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{g}(t) & | & [\mathbf{0}] \\ \text{---} & + & \text{---} \\ [\mathbf{0}] & | & [\mathbf{0}] \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H}(t) = (\mathbf{h}(t), 0, \dots, 0), \quad \boldsymbol{\xi}(t) = (\boldsymbol{\zeta}^T(t), \dots, 0, 0)^T.$$

С учетом введенных обозначений система уравнений для апостериорной плотности вероятности вектора $\mathbf{X}(t)$ будет иметь вид

$$W(\mathbf{X}(t)) = W_{00}(\mathbf{X}(t))p_0(t) + W_1(\mathbf{X}(t))p_1(t), \quad (5)$$

$$W_1(\mathbf{X}(t)) = W_{01}(\mathbf{X}(t))\frac{p_{01}(t)}{p_1(t)} + W_{11}(\mathbf{X}(t))\frac{p_{11}(t)}{p_1(t)},$$

$$W_{00}(\mathbf{X}(t+1)) = \psi(\mathbf{y}(t+1) - \mathbf{H}(t+1)\mathbf{X}(t+1)) \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(\mathbf{X}(t+1) - \mathbf{F}_0(t)\mathbf{X}(t)) W_{00}(\mathbf{X}(t)) d\mathbf{X}(t) / \Phi_{00}(t+1),$$

$$W_{01}(\mathbf{X}(t+1)) = \psi(\mathbf{y}(t+1) - \mathbf{H}(t+1)\mathbf{X}(t+1)) \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(\mathbf{X}(t+1) - \mathbf{F}_1(t)\mathbf{X}(t)) W_{00}(\mathbf{X}(t)) d\mathbf{X}(t) / \Phi_{01}(t+1),$$

$$W_{11}(\mathbf{X}(t+1)) = \psi(\mathbf{y}(t+1) - \mathbf{H}(t+1)\mathbf{X}(t+1)) \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(\mathbf{X}(t+1) - \mathbf{F}_0(t)\mathbf{X}(t)) W_1(\mathbf{X}(t)) d\mathbf{X}(t) / \Phi_{11}(t+1),$$

$$p_0(t+1) = p_0(t)[1 - \nu(t)] \frac{\Phi_{00}(t+1)}{\Phi(t+1)}, \quad p_1(t) = p_{01}(t) + p_{11}(t),$$

$$p_{01}(t+1) = p_0(t)\nu(t) \frac{\Phi_{01}(t+1)}{\Phi(t+1)}, \quad p_{11}(t+1) = p_1(t) \frac{\Phi_{11}(t+1)}{\Phi(t+1)},$$

$$\Phi_{00}(t+1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\mathbf{y}(t+1) - \mathbf{H}(t+1)\mathbf{X}(t+1)) \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(\mathbf{X}(t+1) - \mathbf{F}_0(t)\mathbf{X}(t)) W_{00}(\mathbf{X}(t)) d\mathbf{X}(t) d\mathbf{X}(t+1),$$

$$\Phi_{01}(t+1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\mathbf{y}(t+1) - \mathbf{H}(t+1)\mathbf{X}(t+1)) \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(\mathbf{X}(t+1) - \mathbf{F}_1(t)\mathbf{X}(t)) W_{00}(\mathbf{X}(t)) d\mathbf{X}(t) d\mathbf{X}(t+1),$$

$$\Phi_{11}(t+1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\mathbf{y}(t+1) - \mathbf{H}(t+1)\mathbf{X}(t+1)) \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(\mathbf{X}(t+1) - \mathbf{F}_0(t)\mathbf{X}(t)) W_1(\mathbf{X}(t)) d\mathbf{X}(t) d\mathbf{X}(t+1),$$

$$\Phi(t+1) = p_0(t)[1 - \nu(t)]\Phi_{00}(t+1) + p_0(t)\nu(t)\Phi_{01}(t+1) + p_1(t)\Phi_{11}(t+1),$$

$$\nu(t) = \frac{P_\tau(\tau)}{\sum_{k=l}^{\infty} P_\tau(k)}.$$

Функции $\pi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$, входящие в эти уравнения, выражаются через плотности вероятности случайных векторов $\boldsymbol{\xi}(t)$ и $\boldsymbol{\eta}(t)$ на основе формул (3), (4).

В силу громоздкости полученных выражений дальнейшие упрощения алгоритма обнаружения-оценивания (5) дадим на основе следующего примера.

3. Пример. Результаты численного моделирования

Рассмотрим в качестве примера динамическую модель второго порядка оцениваемого сигнала при скалярных наблюдениях, описываемую уравнениями

$$x(t+1) = a_0 x(t) + a_1 x(t-1) + A\delta(t, \tau), \quad (6)$$

$$y(t) = x(t) + \eta(t). \quad (7)$$

Сигнал $x(t)$ представляет собой отклик на дельта-импульсное воздействие, появляющееся в момент τ с амплитудой A .

Применяя стандартную гауссовскую аппроксимацию функций $W_{00}(\mathbf{X}(t))$, $W_{01}(\mathbf{X}(t))$, $W_{11}(\mathbf{X}(t))$, $W_1(\mathbf{X}(t))$, из системы (5) вместо выражений для плотностей вероятностей можно получить алгоритм уравнения оценивания апостериорного математического ожидания вектора $\mathbf{X}(t) = (x(t), A)^T$ и матрицы ковариации этой оценки. Этот алгоритм представляет собой систему двух дискретных фильтров Калмана третьего порядка, нелинейно связанных между собой.

Численное моделирование этой системы уравнений оценивания проводилось при следующих значениях параметров сигналов. Коэффициенты уравнения модели (6) задавались равными $a_0=0,95$, $a_1=-0,65$.

Априорная вероятность $P_x(\tau)$ появления импульсного воздействия предполагалась равномерной на интервале времени от 0 до 60. Априорная плотность вероятностей амплитуды импульсного возмущения A считалась гауссовской с нулевым средним и дисперсией равной 1.

На рис.1 представлен пример реализации сигнала $x(t)$, появляющегося в момент $\tau=35$ с «амплитудой» $A=1$, а также реализация наблюдаемого процесса $y(t)$ при дисперсии шума наблюдений равной 0.1. Пунктиром на этом же рисунке дана текущая оценка амплитуды. Видно, что до момента появления импульса оценка амплитуды импульсного возмущения практически совпадает с математическим ожиданием ее априорной плотности вероятностей. После момента времени $t=\tau$ алгоритм обнаруживает возмущение и вырабатываемая оценка амплитуды еще до окончания импульсного возмущения становится весьма близкой к истинному значению амплитуды. Эволюция во времени усредненного по ансамблю из 1000 реализаций квадрата ошибки оценивания амплитуды $\varepsilon_A^2(t) = (A^{est} - A)^2$, где A^{est} - оценка амплитуды, A - истинное значение равное 1, приведена на рис.2.

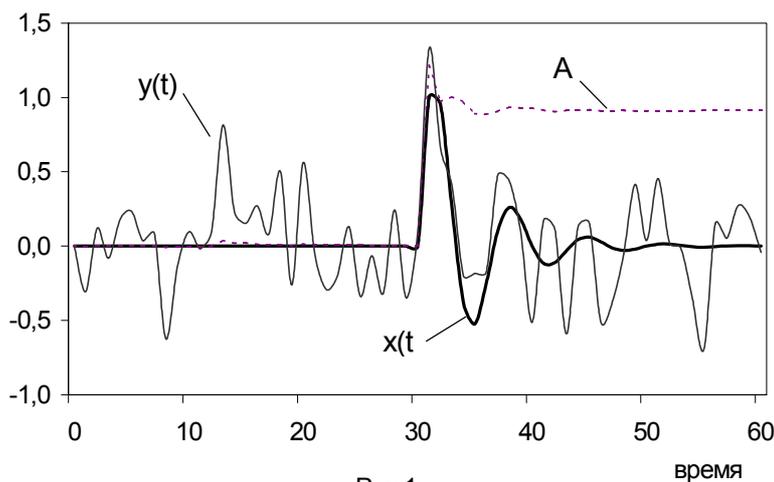


Рис.1.

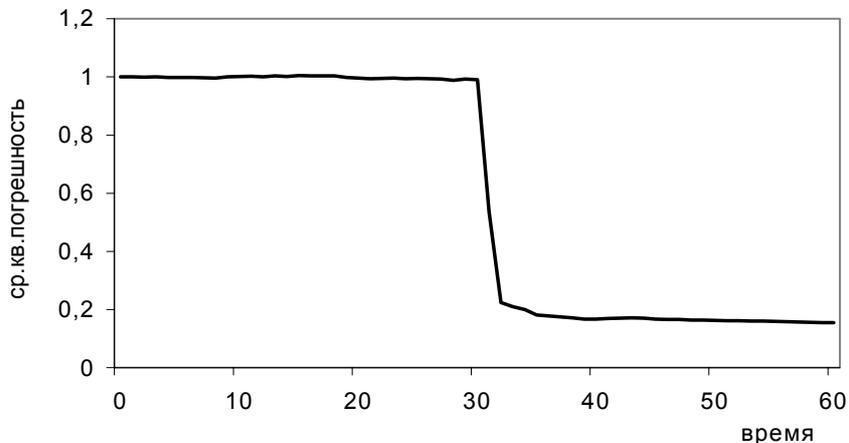


Рис.2.

Приведенные результаты численного моделирования показывают, что полученный в работе алгоритм уже при относительно небольшом превышении величины импульсного возмущения над уровнем шума наблюдения демонстрирует достаточно высокую эффективность.

Работа выполнена при поддержке грантов Российского фонда фундаментальных исследований № 00-02-17602, № 00-15-96620 и INTAS №96-2352.

Литература

1. Обнаружение изменения свойств сигналов и динамических систем. / Под ред. М.Бассвиль, А.Банвениста. М.: Мир, 1989. - 278 с.
2. Польдин О.В., Силаев А.М. Алгоритм оптимальной фильтрации случайных марковских сигналов с оцениванием амплитуд импульсных возмущений. // Известия вузов. Радиофизика. 1996. т. 39. № 4. С.496-513.



Nizhny Novgorod State University
603600, Nizhny Novgorod, Gagarina ave 23, Statistical Radiophysics Department

1. Introduction and problem setting.

The problem is considered of optimal estimating the state of dynamic discrete system subjected to noise and impulse disturbances that arrive at random time. Simultaneously with system state vector, the impulse disturbance amplitude is estimated. This kind of task arises at measurement data processing, technical system monitoring, signal detection in acoustic, etc. [1].

In the previous work of the authors [2], there was derived an algorithms of optimal non-linear estimating dynamic system state vector and disturbance amplitude, based on recursive calculation of their joint a posteriori probability density function (PDF). However, in some applications there is no need to have the very PDF of amplitude, its current values of expectation and variance are sufficient. In the paper presented, we demonstrate how such simpler algorithm can be obtained, and illustrate its efficiency by simulation.

Mathematically, the problem is stated as follows. The impulse disturbance affecting dynamic system is described as response of linear system to delta-impulse with random amplitude and time of arrival. We denote by $\mathbf{x}(t)$ a vector that comprises the components of useful signal and impulse disturbance. Dynamics of $\mathbf{x}(t)$ is given by

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{f}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t)\xi(t) + \mathbf{A}\delta(t, \tau), \tag{1}$$

and $\mathbf{y}(t)$ is the observed vector

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(t)\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\eta}(t), \tag{2}$$

where $\mathbf{f}(t)$, $\mathbf{g}(t)$, $\mathbf{h}(t)$ are known matrices; $\xi(t)$, $\boldsymbol{\eta}(t)$ are random vector variables with given probability density functions; $\mathbf{A}\delta(t, \tau)$ is delta-impulse disturbance of $\mathbf{x}(t)$ that arrives at random time point τ and has random vector amplitude \mathbf{A} ; $\delta(t, \tau)$ is Kronecker delta.

At $t=0$, the a priori PDFs $P(\mathbf{x}_0)$, $P_A(\mathbf{A})$, $P_\tau(\tau)$ are supposed to be known. The problem is to find the optimal estimates of $\mathbf{x}(t)$ and \mathbf{A} at any t , given the set of observations $\mathbf{y}_1^t = \{\mathbf{y}(1), \mathbf{y}(2), \dots, \mathbf{y}(t)\}$.

In order to find optimal estimates of $\mathbf{x}(t)$ and \mathbf{A} for any quality criterion at time t , we can use the joint a posteriori PDF of $\{\mathbf{x}(t), \mathbf{A}\}$
 $P(\mathbf{x}(t), \mathbf{A}, t | \mathbf{y}_1^t) = W(\mathbf{x}(t), \mathbf{A})$.

Because at time t , the impulse disturbance whether has already arrived ($t > \tau$) or not ($t \leq \tau$), the function $W(\mathbf{x}(t), \mathbf{A})$ can be written as a sum

$$W(\mathbf{x}(t), \mathbf{A}) = W_0(\mathbf{x}(t), \mathbf{A})p_0(t) + W_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{A})p_1(t),$$

where $p_0(t) = P(t \leq \tau | \mathbf{y}_1^t)$ and $p_1(t) = P(t > \tau | \mathbf{y}_1^t)$ are a posteriori probabilities of non-occurrence and occurrence of the impulse disturbance before t ; $W_0(\mathbf{x}(t), \mathbf{A})$ и $W_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{A})$ are a posteriori conditional PDFs of the estimated vectors.

The equations for signal (1) and observation (2) can be rewritten in standard form through vector $\mathbf{X}(t) = \{\mathbf{x}^T(t), \mathbf{A}^T\}^T$

$$\mathbf{X}(t+1) = \mathbf{F}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{G}(t)\xi(t), \tag{3}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\eta}(t), \tag{4}$$

where

$$\mathbf{F}(t) = \begin{cases} \mathbf{F}_0(t), & t \neq \tau, \\ \mathbf{F}_1(t), & t = \tau, \end{cases}, \quad \mathbf{F}_0(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(t) & | & [\mathbf{0}] \\ \text{---} & + & \text{---} \\ [\mathbf{0}] & | & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_1(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(t) & | & \mathbf{I} \\ \text{---} & + & \text{---} \\ [\mathbf{0}] & | & \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}(t) = (\mathbf{h}(t), 0, \dots, 0), \quad \xi(t) = (\zeta^T(t), \dots, 0, 0)^T,$$

$$\mathbf{G}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{g}(t) & | & [\mathbf{0}] \\ \text{---} & + & \text{---} \\ [\mathbf{0}] & | & [\mathbf{0}] \end{pmatrix}.$$

The system of equations that enables us to calculate the probabilities $p_0(t)$ $p_1(t)$, and the PDFs $W_0(\mathbf{X}(t))$ and $W_1(\mathbf{X}(t))$ was derived using approach based on methods of non-linear filtering Markov random processes [2]. From this system using Gaussian approximation of auxiliary PDFs, the recursive algorithm for estimating the expectation of $\mathbf{X}(t)$ and covariance matrix of this estimate can be derived. The algorithm has a form of a set of Kalman filtering equations mutually non-linearly linked. Because it is rather cumbersome, below we illustrate the algorithm performance efficiency by computer simulation.

2. Example. Computer simulation results.

As an example, we consider the second order dynamic model of signal with scalar observations

$$x(t+1) = a_0x(t) + a_1x(t-1) + A\delta(t, \tau),$$

$$y(t) = x(t) + \eta(t).$$

The recursive algorithm for estimates $\mathbf{X}(t) = (x(t), A)^T$ was simulated with parameters $a_0=0,95$, $a_1=-0,65$, a priori PDF $P_\tau(\tau)$ is uniform on time span between 0 and 60, a priori PDF of A is Gaussian with zero mean and variance equal to 1.

In Fig.1 are shown graphs against time of: simulated signal $x(t)$ that arrived at $\tau=35$ with $A=1$, the observed process $y(t)$ that is mix of $x(t)$ and noise, and current estimate of A (dotted line). Prior to τ , the estimate is close to a priori expectation. After $t=\tau$, the algorithm detects the disturbance and works out the estimate that is close to actual value of A .

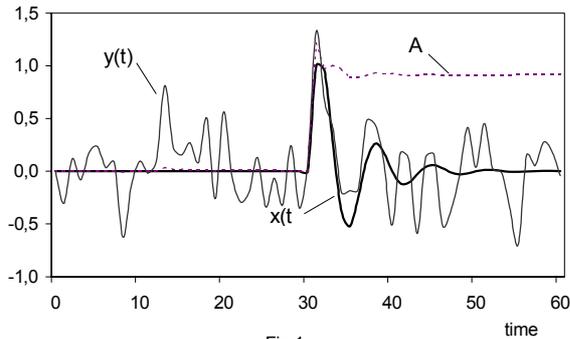


Fig.1.

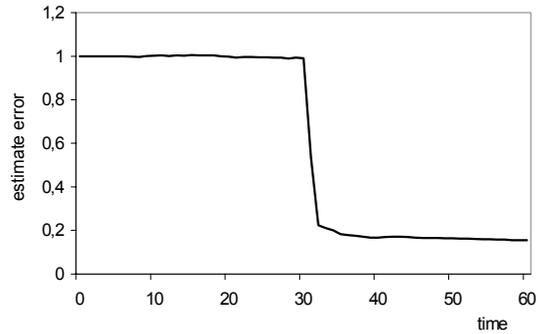


Fig.2.

The evolution of the mean square error $\mathcal{E}_A^2(t) = \overline{(A^{est} - A)^2}$ averaged over ensemble of 1000 realizations, where A^{est} is amplitude estimate, A is actual value, is shown in Fig.2. These results demonstrate the efficiency of the developed algorithm even when the impulse disturbance exceeds the noise level by a relatively small margin.

This work was supported by grants of Russian fund of fundamental research № 00-02-17602, №00-15-96620, and INTAS №96-2352

Reference

1. M. Basseville, A. Benveniste, eds. Detection of Abrupt Changes in Signals and Dynamical Systems. Lecture Notes in Control and Information Sciences, LNCIS 77, Springer, New York. 1986.
2. Poldin O.V., Silaev A.M. Algorithm of optimal filtering of random Markov signals with pulse-disturbance-amplitude estimation // Radiophysics and Quantum Electronics. 1996. Vol. 39. No.4. pp.336-345.