

ВАРИАЦИЯ ИСХОДНЫХ ПАРАМЕТРОВ В ЗАДАЧАХ СИНТЕЗА ЦИФРОВЫХ КИХ-ФИЛЬТРОВ С КОНЕЧНОЙ ДЛИНОЙ СЛОВА КОЭФФИЦИЕНТОВ

Мингазин А.Т.

РАДИС Лтд.

Россия, 107005, Москва, ул. Радио, 12/2,
тел. 535-04-73, факс. 267-45-39, e-mail: alexmin@orc.ru

Реферат. Метод вариации исходных параметров распространен на синтез цифровых КИХ-фильтров с конечной длиной слова коэффициентов. Эффективность метода подтверждена на конкретных примерах синтеза фильтров с минимальным полным числом сумматоров в структурах без умножителей или с оптимальными в минимаксном смысле АЧХ при заданной длине слова.

Привлекательность использования вариации исходных параметров (ВИП) для синтеза цифровых фильтров с конечной длиной слова коэффициентов обусловлена малой размерностью задач оптимизации, не зависящей от порядка передаточной функции, и независимостью базового алгоритма от вида целевой функции. Эффективность ВИП-алгоритмов подтверждена на примерах синтеза БИХ-фильтров каскадной структуры [1-3] и структуры на основе параллельного соединения двух фазовых цепей [4]. Возможности ВИП в задачах синтеза КИХ-фильтров фактически не изучены. Так, в [5] техника ВИП применена лишь для минимизации статистической длины слова коэффициентов, а в [6] получены отрицательные результаты по ее использованию для синтеза с заданной длиной слова. В данной работе показано, что применительно к синтезу КИХ-фильтров с линейными фазо-частотными характеристиками техника ВИП дает превосходные решения как с минимальным полным числом сумматоров в структурах без умножителей, так и с оптимальными в минимаксном смысле АЧХ при заданной длине слова коэффициентов.

Метод ВИП для синтеза цифровых КИХ-фильтров. Вектор коэффициентов КИХ-фильтров $\mathbf{h}=(h_0, h_1, \dots, h_{N-1})$ представим как некоторую вектор-функцию вектора исходных параметров \mathbf{p} , т.е.

$$\mathbf{h}=\mathbf{F}(\mathbf{p}).$$

Для расчета \mathbf{h} используем метод взвешивания [7]. В этом случае вид этой функции будет зависеть от типа идеального фильтра и используемой весовой функции (окна). Можно показать, что для фильтров со стандартными требованиями при $N=\text{const}$ вектор параметров

$$\mathbf{p}=(p_1, p_2, p_3, p_4)=(\Delta f, \beta, A, f_0),$$

где Δf полоса пропускания идеального фильтра, f_0 - центральная частота (для фильтров нижних и верхних частот $f_0=0$), β - параметр используемого окна (для некоторых окон этот параметр фиксирован или отсутствует) и A - масштабный множитель, изменение которого приводит к пропорциональному изменению коэффициента передачи фильтра.

Для расчета \mathbf{h} КИХ-фильтров Найквиста используем функцию типа приподнятый косинус [8]. В этом случае

$$\mathbf{p}=(p_1, p_2)=(\alpha, A),$$

где α - коэффициент расширения полосы.

Синтез частотных КИХ-фильтров с помощью ВИП заключается в нахождении такого вектора исходных параметров $\mathbf{p} \in \mathcal{S}(\mathbf{p})$, который приводит к оптимальной или допустимой (по выбранному критерию) АЧХ после квантования (округления) непрерывных коэффициентов с шагом $q=2^{-M}$. Здесь M - длина слова дробной части коэффициентов в их двоичном представлении. Полная длина слова $V=M + \text{знаковый бит} + \text{биты целой части}$. Для фильтров Найквиста, кроме того, требуется импульсная характеристика с определенными свойствами [8].

Можно выдвинуть дополнительные требования, а именно, число ненулевых бит в знако-разрядных кодах коэффициентов K ограничено (задача с неравномерным распределением области допустимых дискретных значений коэффициентов) или их полное число минимально или полное число сумматоров Σ (все структурные сумматоры + сумматоры, заменяющие умножители) минимально. Поиск таких решений обычно выполняется для ряда значений N и M .

Ниже представлены примеры синтеза частотных КИХ-фильтров с помощью метода ВИП, в которых использовались стратегии поиска решений, подобные описанным в [2-4] для БИХ-фильтров. Во всех этих стратегиях учитывается тот факт, что на данном интервале изменения того или иного компонента вектора \mathbf{p} имеется лишь конечное число решений с квантованными коэффициентами. Важно в процессе поиска не пропустить ни одного из них и выбрать приемлемое решение. Это, в частности, отличает ВИП-алгоритмы [2-4] от описанных в [1,6].

Пример 1. Требования МККТТ к АЧХ фильтра нижних частот канала с ИКМ следующие: неравномерности в полосах пропускания (F_i , $i=1,2,3$) от $f=0$ до 2.4 кГц: ≤ 0.4 дБ, от 2.4 до 3 кГц: ≤ 0.7 дБ, от 3 до 3.4 кГц: ≤ 1.1 дБ, ослабление в полосе задерживания (F_4) от $f=4.6$ кГц до 16 кГц: ≥ 30.2 дБ. Все уровни отсчитываются относительно максимума АЧХ фильтра, принятого за +0.2 дБ. Частота дискретизации $f_d=32$ кГц.

Задачу синтеза сформулируем следующим образом. Требуется найти решения с максимальной ошибкой вида

$$\tilde{\epsilon} = \max_i \frac{\tilde{\delta}_i}{\delta_{i\max}} \leq 1, \quad i = 1,2,3,4,$$

где $\tilde{\delta}_i$ - относительный уровень пульсаций АЧХ в полосе F_i , а $\delta_{i\max}$ - его допустимое значение, $\tilde{\delta}_i = 1 - \min_{f \in F_i} \{\tilde{H}(f, \mathbf{p})\} / \tilde{H}_m$, $i=1,2,3$, $\tilde{\delta}_4 = \max_{f \in F_4} \{\tilde{H}(f, \mathbf{p})\} / \tilde{H}_m$, $\tilde{H}_m = \max_{0 \leq f \leq 0.5} \tilde{H}(f, \mathbf{p})$, $\tilde{H}(f, \mathbf{p})$ - АЧХ фильтра, $\mathbf{p} \in S(\mathbf{p})$, $\mathbf{p}=(\Delta f, \beta, A)$, знак \sim означает соответствие параметров квантованным коэффициентам.

Частоты нормированы относительно f_d и оценка $\tilde{\epsilon}$ выполняется на дискретном наборе частот.

В табл.1 представлены координаты в области $S(\Delta f, \beta, A)$ для некоторых решений поставленной задачи полученных предложенным методом ВИП. Использовались окно Кайзера (ОК) и обобщенное окно Хэмминга (ООХ).

Таблица 1.

| Вариант | $S(\Delta f, \beta, A)$ | ϵ |
|---------|---|----------------|
| 1 | S(0.1220, 2.40, 1.000000), ОК | 1.089 |
| 2 | S(0.1230, 2.40, 0.937277), ОК | 1.166 |
| 3 | S(0.1230, 2.40, 1.151283), ОК S(0.1230, 0.77, 1.170000), ООХ | 1.166 0.984 |
| 4 | S(0.1230, 2.40, 1.181975), ОК | 1.166 |
| 5 | S(0.1230, 2.40, 1.253962), ОК S(0.1230, 0.76, 1.255364), ООХ | 1.166 1.131 |
| 6 | S(0.1230, 2.10, 1.644463), ОК | 1.006 |
| 7 | S(0.1225, 0.76, 1.226189), ООХ | 0.957 |
| 8 | S(0.1220, 1.90, 1.609016), ОК | 1.327 |

Для функции ОК параметр β соответствует записи функции в [7]. В табл.1 приведены также значения ошибки ϵ для непрерывных коэффициентов.

Параметры полученных решений с квантованными коэффициентами, соответствующие координатам табл.1, представлены в табл.2. Там же показаны параметры решений из [6,9], для которых расчеты $\tilde{\epsilon}$, \tilde{H}_m и Σ выполнены автором данной работы. В [6] синтез фильтров проводился с заданной длиной слова коэффициентов, а в [9] с ограничением на число ненулевых бит. Алгоритмы целочисленного программирования позволяют получить допустимые решение при $N=38$ [6] и при $N=36$ [9], тогда как ВИП-алгоритм, описанный в [6], - только при $N=45$ (см. табл.2). Интересно, что в случае с непрерывными коэффициентами требования к АЧХ удовлетворяются при $N = N_{\min} = 35$ [6].

Таблица 2.

| Вариант | N | M | B | K | $\tilde{\epsilon}$ | \tilde{H}_m , дБ | Σ |
|-----------|----|---|---|---|--------------------|--------------------|------------|
| 1 или [6] | 38 | 5 | 7 | 3 | 0.974 | 12.67 | 37+9-4=42 |
| 2 | 38 | 5 | 6 | 2 | 1.023 | 12.04 | 37+9-4=42 |
| 3 | 38 | 5 | 7 | 3 | 1.000 | 13.84 | 37+10-2=45 |
| 4 | 38 | 5 | 7 | 3 | 0.975 | 14.14 | 37+9-2=44 |
| 5 | 38 | 5 | 7 | 2 | 0.990 | 14.63 | 37+5-2=40 |
| 6 | 38 | 5 | 7 | 3 | 0.803 | 16.91 | 37+14-2=49 |
| 7 | 38 | 5 | 7 | 3 | 0.998 | 14.34 | 37+9-2=44 |
| 8 | 37 | 5 | 7 | 4 | 1.002 | 16.60 | 36+10=46 |
| [6] | 45 | 5 | 7 | 3 | 1.011 | 12.17 | 44+8-10=42 |
| [9] | 36 | 7 | 9 | 2 | 0.958 | 14.50 | 35+12=47 |

Как видно из табл.2 некоторые параметры, полученные предложенным методом ВИП, лучше, чем параметры решений из [6,9]. Лучшим по параметру Σ является вар.5, для которого

$$\begin{array}{lll}
 h_0 = 0.03125 = h_{37} & h_6 = -0.03125 = h_{31} & h_{12} = -0.21875 = h_{25} \\
 h_1 = 0.03125 = h_{36} & h_7 = 0.06250 = h_{30} & h_{13} = -0.25000 = h_{24} \\
 h_2 = 0.00000 = h_{35} & h_8 = 0.12500 = h_{29} & h_{14} = -0.12500 = h_{23} \\
 h_3 = -0.03125 = h_{34} & h_9 = 0.12500 = h_{28} & h_{15} = 0.18750 = h_{22} \\
 h_4 = -0.06250 = h_{33} & h_{10} = 0.03125 = h_{27} & h_{16} = 0.62500 = h_{21} \\
 h_5 = -0.06250 = h_{32} & h_{11} = -0.09375 = h_{26} & h_{17} = 1.00000 = h_{20} \\
 & & h_{18} = 1.25000 = h_{19}.
 \end{array}$$

Расчет полного числа сумматоров Σ в табл.2 необходимо пояснить. Например, для вар.5 число 37 - количество структурных сумматоров, равное N-1, число 5 - количество сумматоров, заменяющих все множители, и число 2 - количество коэффициентов равных нулю. Заметим, что максимум АЧХ \tilde{H}_m можно уменьшить путем умножения всех h_i на масштабный множитель, равный степени числа два, или размещением его на входе фильтра. Так, если множитель равен 2^{-2} , то для вар.5 получим $\tilde{H}_m = 14.62-12.04=2.58$ дБ.

Пример 2. Требуется минимизировать максимальную ошибку вида

$$\tilde{\epsilon} = \max_f W(f) |D(f) - \tilde{H}(f, \mathbf{p})|$$

при условиях

$$D(f) = 1, \quad W(f) = 1, \quad 0 \leq f \leq 0.2,$$

$$D(f) = 0, \quad W(f) = 1, \quad 0.25 \leq f \leq 0.5,$$

$$\mathbf{p} \in S(\mathbf{p}), \quad \mathbf{p} = (\Delta f, \beta, A), \quad N = 40, \quad M = 9,$$

где D(f) - желаемая АЧХ фильтра нижних частот, а W(f) - весовая функция.

Предполагается, что перед квантованием вектор \mathbf{h} нормируется относительно среднего коэффициента передачи фильтра в полосе пропускания и оценка $\tilde{\epsilon}$ выполняется на дискретном наборе частот. Ниже приведены решения, полученные с помощью предложенного метода ВИП при использовании двух типов функций окна.

Для окна Кайзера: $S(\Delta f, \beta, A) = S(0.225701, 2.730263, 1.000750)$, $\tilde{\epsilon} = 0.01500$ и

$$\begin{array}{llll}
 \hat{h}_0 = 1 = \hat{h}_{39} & \hat{h}_5 = 6 = \hat{h}_{34} & \hat{h}_{10} = 10 = \hat{h}_{29} & \hat{h}_{15} = 3 = \hat{h}_{24} \\
 \hat{h}_1 = 3 = \hat{h}_{38} & \hat{h}_6 = 2 = \hat{h}_{33} & \hat{h}_{11} = -8 = \hat{h}_{28} & \hat{h}_{16} = -44 = \hat{h}_{23} \\
 \hat{h}_2 = -1 = \hat{h}_{37} & \hat{h}_7 = -7 = \hat{h}_{32} & \hat{h}_{12} = -17 = \hat{h}_{27} & \hat{h}_{17} = -25 = \hat{h}_{22} \\
 \hat{h}_3 = 4 = \hat{h}_{36} & \hat{h}_8 = -5 = \hat{h}_{31} & \hat{h}_{13} = 5 = \hat{h}_{26} & \hat{h}_{18} = 91 = \hat{h}_{21} \\
 \hat{h}_4 = 0 = \hat{h}_{35} & \hat{h}_9 = 8 = \hat{h}_{30} & \hat{h}_{14} = 27 = \hat{h}_{25} & \hat{h}_{19} = 212 = \hat{h}_{20}.
 \end{array}$$

Для обобщенного окна Хэмминга: $S(\Delta f, \beta, A) = S(0.225238, 0.710764, 0.998469)$, $\tilde{\epsilon} = 0.01657$, а все h_i , за исключением $\hat{h}_0 = \hat{h}_{39} = 2$, $\hat{h}_{16} = \hat{h}_{23} = -43$, $\hat{h}_{18} = \hat{h}_{21} = 92$, совпадают с приведенными. Реальные коэффициенты, которым соответствуют указанные значения $\tilde{\epsilon}$, равны $h_i = \hat{h}_i 2^{-9}$. Применение общецелевого алгоритма целочисленного программирования приводит к $\tilde{\epsilon} = 0.01719$ [10], а - алгоритма, основанного на имитации процесса отжига, к $\tilde{\epsilon} = 0.01408$ [11]. Как видно предложенный метод ВИП дает соизмеримые значения $\tilde{\epsilon}$.

Пример 3. Для фильтра нижних частот с $F_1: (0, 0.15)$, $F_2: (0.25, 0.5)$ и N=25 метод [12] приводит к нормированному максимальному уровню пульсаций АЧХ -44.09 дБ и суммарному числу ненулевых бит в коэффициентах 21. Это решение лучше существующих и его можно получить предложенным ВИП методом. Решение: окно Кайзера, N=25, M=8, $S(\Delta f, \beta, A) = S(0.2, 3.74, 1)$, а коэффициенты h_i совпадают с приведенными в [12] при умножении их на 2.

Заключение. В данной работе метод вариации исходных параметров распространен на синтез КИХ-фильтров с конечной длиной слова коэффициентов. Предложенный подход позволяет найти эквивалентные или улучшенные решения конкретных задач в сравнении с существующими решениями, полученными алгоритмами целочисленного программирования. Результаты работы ставят под сомнение известное утверждение: простое округление значительно уступает алгоритмам целочисленного программирования в случае неравномерного распределения области допустимых дискретных значений коэффициентов.

Литература

1. Dehner G. On the design Causer filters with coefficients of limited wordlength// АЕÜ. 1975. V.26. №4. P. 165-168.
2. Мингазин А.Т. Метод синтеза цифровых фильтров с коэффициентами конечной разрядности// Электросвязь. 1983. №7. С. 49-53.
3. Мингазин А.Т. Синтез рекурсивных цифровых фильтров при ограниченной разрядности коэффициентов// Электросвязь. 1987. №9. С. 58-62.
4. Мингазин А.Т. Синтез цифровых фильтров на основе фазовых цепей с конечной длиной слова коэффициентов. - 2-я международная конференция 'Цифровая обработка сигналов и ее применения' (DSPA-99).- М.: Т.1. С.112-116.
5. Grenez F. Design of FIR linear phase digital filters to minimise the statistical word length of the coefficients// Electron. Circuits and Syst. 1977. Sept. P. 181-185.
6. Lim Y. C., Parker S. R., Constantinides A. G. Finite word length FIR filter design using integer programming over a discrete coefficient space// IEEE Trans. 1982. ASSP-30. № 4. P. 661-664.
7. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов.-М.: Мир, 1978.-848с.
8. Беллами Дж. Цифровая телефония.-М.: Радио и связь, 1986.-544с.
9. Lim Y.C., Parker S. R. FIR filter design over a discrete powers-of-two coefficient space// IEEE Trans. 1983. ASSP-31. №.3. P. 583-591.
10. Kodek D. Design of optimal finite wordlength FIR digital filters using integer programming techniques// IEEE Trans. 1980. ASSP-28. № 3. P. 304-308.
11. Benvenuto N., Marchesi M. Digital filters design by simulated annealing// IEEE Trans. 1989. CAS-36. № 3. P.459-460.
12. Ciloglu T. Design of FIR filters for low implementation complexity// Electron. Lett. 1999. V. 35. № 7. P. 529-530.



VARIATION OF INITIAL PARAMETERS IN DESIGN FIR DIGITAL FILTERS WITH FINITE WORDLENGTH COEFFICIENTS

Mingazin A.T.

RADIS Ltd

Radio, 12/2, 107005, Moscow, Russia,

Tel. 535-0473, Fax. 267-4539, e-mail: alexmin@orc.ru

Abstract. A method based on the variation of initial parameters is extend on the finite wordlength coefficient design of FIR digital filters. Their efficiency is confirmed on particular examples of the filter design with minimum of the total number of adders in multiplierless structures or with optimal magnitude responses in a minimax sense at the given coefficient wordlength.

The small dimension of optimization problems, which is not dependent on a transfer function order, and the independence of the base algorithm from an objective function kind involve attention to the use of the variation of initial parameters (VIP) in the finite wordlength coefficient design of FIR digital filters. The efficiency of VIP algorithms was confirmed on design examples of cascade IIR filters [1-3] and filters based on parallel connection of two allpass networks [4]. Opportunities of VIP in design problems of FIR digital filters were actually not investigated. So, in [5] VIP technique only for minimization of the statistical coefficient wordlength was applied, and in [6] negative results on its using for the design with the given real coefficient wordlength were obtained. In this paper is shown that VIP technique gives excellent results in respect to the FIR linear phase digital filter design both with minimum of the total number of adders in multiplierless structures and with optimal magnitude responses in a minimax sense at the given coefficient wordlength.

VIP method in design FIR digital filters. We shall present the coefficient vector of FIR filters $\mathbf{h}=(h_0, h_1, \dots, h_{N-1})$ as some vector-function of an initial parameter vector \mathbf{p} , i.e. $\mathbf{h}=\mathbf{F}(\mathbf{p})$.

We use a method of weighing [7] to definition \mathbf{h} . In this case the kind of the function will depend on the type of an ideal filter and on the used weight function (window). It is possible to show that for the filters with standard requirements at $N=\text{const}$ the vector of parameters is

$$\mathbf{p}=(p_1, p_2, p_3, p_4)=(\Delta f, \beta, A, f_0),$$

where Δf is the passband of the ideal filter, f_0 - the central frequency (for low- and highpass filters $f_0=0$), β - the parameter of the used window (for some windows this parameter is fixed or away) and A is the scale factor, which change results in proportional change of the filter gain.

We use the function of raised-cosine type to definition \mathbf{h} of FIR Nyquist filters [8]. In this case

$$\mathbf{p}=(p_1, p_2)=(\alpha, A),$$

where α is the rolloff factor.

The design of FIR frequency-domain filters by VIP consists in the finding of such initial parameter vector $\mathbf{p} \in S(\mathbf{p})$ that results to the optimal or allowable magnitude response (on chosen criterion) after the quantization (rounding) of continuous coefficients with the step $q=2^{-M}$. Here M is the fractional part wordlength of coefficients in their binary representation. The complete wordlength is $B=M + \text{sign bit} + \text{bits}$. For Nyquist filters besides the impulse response with the certain properties is also required [8].

It is possible to put forward the additional requirements, namely the number of non-zero bits in CSD code coefficients K is limited (a nonuniformly distributed space of allowable discrete coefficient values) or their the total number is minimum or the total number of adders Σ (all structural adders + adders that replace multipliers) is minimum. The search of such solutions is usually executed for the number of values N and M .

Below the design examples of FIR frequency-domain filters by the VIP method are presented, in that the strategy of search similar to described in [2-4] for IIR filters were used. In all these strategy that fact is taken into account that on the given interval of change of that or other component of the vector \mathbf{p} there is only the limited number of solutions with quantized coefficients. It is important during the search not to miss one of them and to choose the acceptable solution. This, in particular, distinguishes VIP algorithms [2-4] from the described in [1,6].

Example 1. PCM channel CCITT requirements to the lowpass filter are the attenuation in passbands (F_i , $i=1,2,3$) from $f=0$ up to 2.4 kHz: ≤ 0.4 dB, from 2.4 up to 3 kHz: ≤ 0.7 dB, from 3 up to 3.4 kHz: ≤ 1.1 dB, the attenuation in the stopband (F_4) from $f=4.6$ kHz up to 16 kHz: ≥ 30.2 dB. All levels are measured in relation to the maximum filter gain, accepted +0.2 dB. The sampling frequency $f_s=32$ kHz.

We shall formulate the design problem as follows. It is required to find solutions with the maximum error

$$\tilde{e} = \max_i \frac{\tilde{\delta}_i}{\delta_{i\max}} \leq 1, \quad i = 1,2,3,4,$$

where $\tilde{\delta}_i$ is the magnitude response ripple in the band F_i , and $\delta_{i\max}$ its the tolerable value, $\tilde{\delta}_i = 1 - \min_{f \in F_i} \{\tilde{H}(f, \mathbf{p})\} / \tilde{H}_m$, $i=1,2,3$, $\tilde{\delta}_4 = \max_{f \in F_4} \{\tilde{H}(f, \mathbf{p})\} / \tilde{H}_m$, $\tilde{H}_m = \max_{0 \leq f \leq 0.5} \tilde{H}(f, \mathbf{p})$, $\tilde{H}(f, \mathbf{p})$ is the magnitude response, $\mathbf{p} \in S(\mathbf{p})$, $\mathbf{p}=(\Delta f, \beta, A)$, the symbol \sim means conformity of parameters to the quantized filter coefficients.

It is supposed, that the frequencies are normalized in relation to f_s and the evaluation \tilde{e} is executed on a discrete set of frequencies.

In Table 1 the coordinates in the space $S(\Delta f, \beta, A)$ for some solutions of the formulated problem obtained by the proposed VIP method are presented. We applied the Kaiser window (KW) and generalized Hamming window (GHW).

Table 1

| Variant | $S(\Delta f, \beta, A)$ | e |
|---------|--------------------------------|-------|
| 1 | S(0.1220, 2.40, 1.000000), KW | 1.089 |
| 2 | S(0.1230, 2.40, 0.937277), KW | 1.166 |
| 3 | S(0.1230, 2.40, 1.151283), KW | 1.166 |
| | S(0.1230, 0.77, 1.170000), GHW | 0.984 |
| 4 | S(0.1230, 2.40, 1.181975), KW | 1.166 |
| 5 | S(0.1230, 2.40, 1.253962), KW | 1.166 |
| | S(0.1230, 0.76, 1.255364), GHW | 1.131 |
| 6 | S(0.1230, 2.10, 1.644463), KW | 1.006 |
| 7 | S(0.1225, 0.76, 1.226189), GHW | 0.957 |
| 8 | S(0.1220, 1.90, 1.609016), KW | 1.327 |

The parameter β of the WK function corresponds to the representation of this function in [7]. In the Table 1. values e for continuous coefficients are also shown.

The parameters of the obtained solutions with quantized coefficients, appropriate to coordinates Table1, are presented in Table 2. The parameters of solutions from [6,8] are also shown. The computations $\tilde{\epsilon}$, \tilde{H}_m and Σ are executed by author of the given work. In [6] the design of filters was conducted with the given coefficient wordlength, and in [8] with restriction on the number of non-zero bits. Algorithms of integer programming permit to obtain of the allowable solutions at $N=38$ [6] and at $N=36$ [8] whereas a VIP algorithm from [6]- only at $N=45$ (see Table 2). It is interesting that in the case with continuous coefficients the filter specifications are satisfied at $N = N_{\min} = 35$ [6].

Table 2

| Variant | N | M | B | K | $\tilde{\epsilon}$ | \tilde{H}_m, dB | Σ |
|----------|----|---|---|---|--------------------|--------------------------|------------|
| 1 or [6] | 38 | 5 | 7 | 3 | 0.974 | 12.67 | 37+9-4=42 |
| 2 | 38 | 5 | 6 | 2 | 1.023 | 12.04 | 37+9-4=42 |
| 3 | 38 | 5 | 7 | 3 | 1.000 | 13.84 | 37+10-2=45 |
| 4 | 38 | 5 | 7 | 3 | 0.975 | 14.14 | 37+9-2=44 |
| 5 | 38 | 5 | 7 | 2 | 0.990 | 14.63 | 37+5-2=40 |
| 6 | 38 | 5 | 7 | 3 | 0.803 | 16.91 | 37+14-2=49 |
| 7 | 38 | 5 | 7 | 3 | 0.998 | 14.34 | 37+9-2=44 |
| 8 | 37 | 5 | 7 | 4 | 1.002 | 16.60 | 36+10=46 |
| [6] | 45 | 5 | 7 | 3 | 1.011 | 12.17 | 44+8-10=42 |
| [8] | 36 | 7 | 9 | 2 | 0.958 | 14.50 | 35+12=47 |

In Table 2, it can be seen, that some parameters obtained by the proposed VIP method are better than parameters of the solutions from [6,8]. The best of the parameter Σ is Var.5 for which

$$\begin{aligned}
 h_0 &= 0.03125 = h_{37} & h_6 &= -0.03125 = h_{31} & h_{12} &= -0.21875 = h_{25} \\
 h_1 &= 0.03125 = h_{36} & h_7 &= 0.06250 = h_{30} & h_{13} &= -0.25000 = h_{24} \\
 h_2 &= 0.00000 = h_{35} & h_8 &= 0.12500 = h_{29} & h_{14} &= -0.12500 = h_{23} \\
 h_3 &= -0.03125 = h_{34} & h_9 &= 0.12500 = h_{28} & h_{15} &= 0.18750 = h_{22} \\
 h_4 &= -0.06250 = h_{33} & h_{10} &= 0.03125 = h_{27} & h_{16} &= 0.62500 = h_{21} \\
 h_5 &= -0.06250 = h_{32} & h_{11} &= -0.09375 = h_{26} & h_{17} &= 1.00000 = h_{20} \\
 & & & & h_{18} &= 1.25000 = h_{19}.
 \end{aligned}$$

The computation of the total number of adders in Table 2 needs to be explained. As example, for Var.5 the number 37 is the quantity of structural adders equal $N-1$, the number 5 is the quantity of adders replacing all multipliers, and the number 2 is the quantity of coefficients, which equal to zero. Notice, that the maximum gain \tilde{H}_m can be reduced by multiplication all h_i on the power-of-two factor or by inclusion its on the filter input. So, if the factor is 2^{-2} then for Var.5 we shall obtain $\tilde{H}_m = 14.62-12.04=2.58 \text{ dB}$.

Example 2. It is required to minimize the maximum error

$$\tilde{\epsilon} = \max_f W(f) |D(f) - \tilde{H}(f, \mathbf{p})|$$

under the conditions

$$\begin{aligned}
 D(f) &= 1, \quad W(f) = 1, \quad 0 \leq f \leq 0.2 \quad (\text{passband}), \\
 D(f) &= 0, \quad W(f) = 1, \quad 0.25 \leq f \leq 0.5 \quad (\text{stopband}), \\
 \mathbf{p} &\in S(\mathbf{p}), \quad \mathbf{p} = (\Delta f, \beta, A), \quad N = 40, \quad M = 9,
 \end{aligned}$$

where $D(f)$ is the desired frequency response, a $W(f)$ is the weight function.

It is supposed, that before the quantization the vector \mathbf{h} is normalized in relation to the mean value of passband gain and the evaluation is executed on a discrete set of frequencies. The indicated below solutions are obtained by the proposed VIP method with use of two window functions.

For the Kaiser window: $S(\Delta f, \beta, A) = S(0.225701, 2.730263, 1.000750)$, $\tilde{\epsilon} = 0.01500$ и

$$\begin{array}{cccc}
 \hat{h}_0 = 1 = \hat{h}_{39} & \hat{h}_5 = 6 = \hat{h}_{34} & \hat{h}_{10} = 10 = \hat{h}_{29} & \hat{h}_{15} = 3 = \hat{h}_{24} \\
 \hat{h}_1 = 3 = \hat{h}_{38} & \hat{h}_6 = 2 = \hat{h}_{33} & \hat{h}_{11} = -8 = \hat{h}_{28} & \hat{h}_{16} = -44 = \hat{h}_{23} \\
 \hat{h}_2 = -1 = \hat{h}_{37} & \hat{h}_7 = -7 = \hat{h}_{32} & \hat{h}_{12} = -17 = \hat{h}_{27} & \hat{h}_{17} = -25 = \hat{h}_{22} \\
 \hat{h}_3 = 4 = \hat{h}_{36} & \hat{h}_8 = -5 = \hat{h}_{31} & \hat{h}_{13} = 5 = \hat{h}_{26} & \hat{h}_{18} = 91 = \hat{h}_{21} \\
 \hat{h}_4 = 0 = \hat{h}_{35} & \hat{h}_9 = 8 = \hat{h}_{30} & \hat{h}_{14} = 27 = \hat{h}_{25} & \hat{h}_{19} = 212 = \hat{h}_{20}
 \end{array}$$

For the generalized Hamming window: $S(\Delta f, \beta, A) = S(0.225238, 0.710764, 0.998469)$, $\tilde{\epsilon} = 0.01657$, and all h_i at exception $\hat{h}_0 = \hat{h}_{39} = 2$, $\hat{h}_{16} = \hat{h}_{23} = -43$, $\hat{h}_{18} = \hat{h}_{21} = 92$ coincide with above. The real coefficients which correspond above the values $\tilde{\epsilon}$ are $h_i = \hat{h}_i 2^{-9}$. A general-purpose integer-programming algorithm results to $\tilde{\epsilon} = 0.01719$ [10], and a simulated annealing algorithm result to $\tilde{\epsilon} = 0.01408$ [11]. It can be seen the proposed VIP method gives the commensurable values $\tilde{\epsilon}$.

Example 3. For the low pass filter with $F_1 : (0, 0.15)$, $F_2 : (0.25, 0.5)$ and $N=25$ a method [12] results in the normalized peak ripple -44.09 dB and the total number of non-zero bits in coefficients 21. This solution better than the existing and it can be obtained by the proposed VIP method. The solution is the Kaiser window, $N=25$, $M=8$, $S(\Delta f, \beta, A) = S(0.2, 3.74, 1)$ and the coefficients coincide with indicated in [12] at multiplication them on 2.

Conclusions. In this work the method based on the variation of initial parameters is extend on the design of FIR finite coefficient wordlength digital filters. The proposed approach permits to find equivalent or improved solutions of particular problems in comparison to existing results obtained by integer programming. The work puts under doubt the known statement: Simple rounding considerably concedes to the integer programming in the case of nonuniformly distributed space of allowable discrete coefficient values.

References

1. Dehner G. On the design Caue filters with coefficients of limited wordlength// *AEÜ*. 1975. V.26. №4. P. 165-168.
2. Mingazin A.T. Design of digital filters with finite wordlength coefficients// *Elektrosvyaz*. 1983. №7. P. 49-53.
3. Mingazin A.T. Synthesis of recursive digital filters with limited coefficient wordlength// *Telecommunications and Radio Engineering*. 1987. V. 41/42. № 11. P. 26-32.
4. Mingazin A.T. Finite wordlength coefficient design of digital filters based on allpass networks.- *DSPA-99*. V.1. P. 117-121.
5. Grenez F. Design of FIR linear phase digital filters to minimise the statistical word length of the coefficients// *Electron. Circuits and Syst*. 1977. Sept. P. 181-185.
6. Lim Y. C., Parker S. R., Constantinides A. G. Finite word length FIR filter design using integer programming over a discrete coefficient space// *IEEE Trans*. 1982. ASSP-30. № 4. P. 661-664.
7. Rabiner L.R., Gold B. *Theory and application of digital signal processing*.-Englewood Clifs, NJ: Prentifce-Hall, 1975.
8. Bellamy J. *Digital telephony*.- John Wiley & Sons, Inc.,1982.
9. Lim Y.C., Parker S. R. FIR filter design over a discrete powers-of-two coefficient space// *IEEE Trans*. 1983. ASSP-31. № 3. P. 583-591.
10. Kodek D. Design of optimal finite wordlength FIR digital filters using integer programming techniques// *IEEE Trans*. 1980. ASSP-28. № 3. P. 304-308.
11. Benvenuto N., Marchesi M. Digital filters design by simulated annealing// *IEEE Trans*. 1989. CAS-36. № 3. P.459-460.
12. Ciloglu T. Design of FIR filters for low implementation complexity// *Electron. Lett*. 1999. V. 35. № 7. P. 529-530.