ОПТИМИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ ОБРАБОТКИ ЦИФРОВОЙ ИНФОРМАЦИИ

Пантелеев С.В., Данилин С.Н., Яковлев А.В.

Муромский институт Владимирского государственного университета
602200, Владимирская обл., Муром, ул. Орловская, 23, кафедра КиПРА, тел. (092-34)2-29-04

Большинство современных алгоритмов цифровой обработки различных одномерных и многомерных сигналов включают в себя вычисление элементарных функций. Такие функции вычисляются, как правило, внутри циклов, что существенно увеличивает общее время обработки. Наиболее часто используемыми элементарными функциями являются синус и косинус, алгоритмы вычисления которых можно существенно оптимизировать.

Рассмотрим методы уменьшения погрешности при разложении в ряд Маклорена для используемых на практике применений, когда число разрядов представления функции равно 10 при изменении аргумента от 0^0 до 90^0.

При разложении в ряд Маклорена функций sinβ и cosβ имеем:

$$\begin{aligned} \sin\beta &= \beta - \frac{\beta^3}{3!} + \frac{\beta^5}{5!} - \ldots \\ \cos\beta &= 1 - \frac{\beta^2}{2!} + \frac{\beta^4}{4!} - \ldots \end{aligned} \tag{1}$$

Абсолютные погрешности вычисления с помощью первых трех членов ряда разложения Маклорена показаны на рисунке 1. Для наглядности значения погрешностей приведены в единицах десятого разряда двоичного представления результата.

В соответствии с выражением (1) при $\beta_1=\pi/4$ и $\beta_2=\pi/2$ получим значения погрешностей для двух членов разложения в ряд для синуса, которые определяется первым отбрасываемым членом:

$$\Delta_{1\sin} = \frac{\beta_1^5}{5!} = \left(\frac{\pi}{4}\right)^5 \frac{1}{5!} = 0.00249 = 2.55 \times 2^{-10};$$

$$\Delta_{2\sin} = \frac{\beta_2^5}{5!} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^5 \frac{1}{5!} = 0.07969 = 81.6 \times 2^{-10}.$$

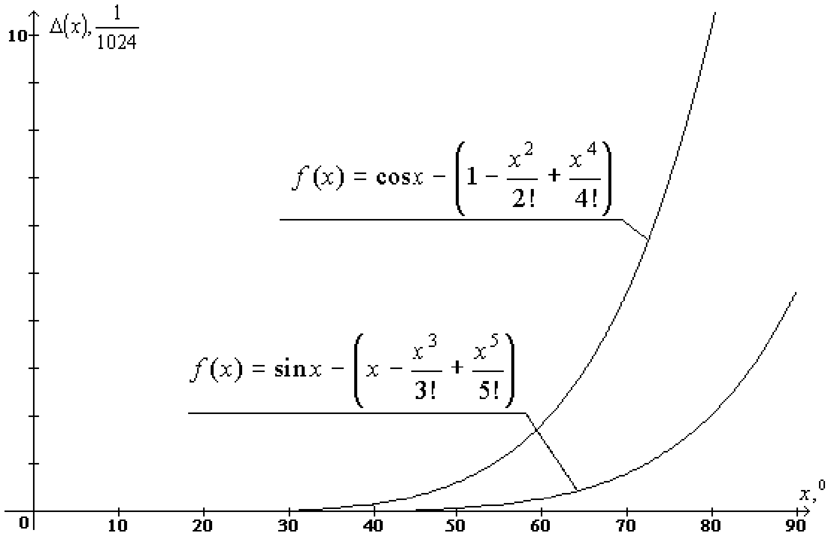

Рисунок 1 -Абсолютные погрешности вычисления значений синуса и косинуса по трем первым членам ряда Маклорена.

Таким образом, даже для значения аргумента π/4 погрешность метода составляет 2,55 единицы десятого разряда результата и поэтому неприемлема. Для косинуса имеем еще большее значение погрешности:

$$\Delta_{1\cos} = \frac{\beta_1^4}{4!} = \left(\frac{\pi}{4}\right)^4 \frac{1}{4!} = 0.01585 = 16.23 \times 2^{-10};$$

$$\Delta_{2\cos} = \frac{\beta_2^4}{4!} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 \frac{1}{4!} = 0.25367 = 259.76 \times 2^{-10}.$$

Оптимальным решением в данном случае будет подбор коэффициенты для полинома по критерию минимальной погрешности.

Функция для вычисления синуса выглядит следующим образом:

$$f(x) = k_1 \times x - k_2 \times x^3. \qquad (2)$$

График этой функции представлен на рисунке 2.

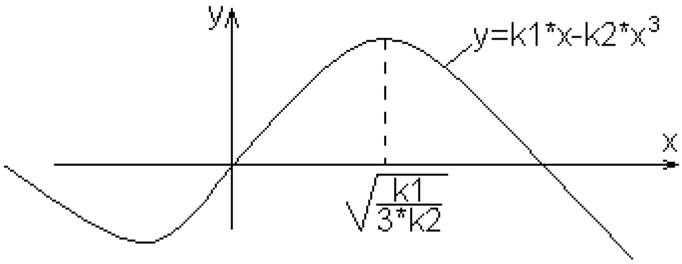

Рисунок 2 - График функции $f(x) = k_1 \times x + k_2 \times x^3$ и её экстремум.

Эта функция нечетная, то есть она симметрична относительно начала координат. Но в данном случае нас будет интересовать только положительная полуось, так как мы рассматриваем функцию синуса в интервале от нуля до 90^0. Также на рисунке 2 показан экстремум данной функции, то есть для достижения минимальной погрешности экстремумы полинома и синуса должны совпадать, то есть

$$k_1\sqrt{\frac{k_1}{3k_2}} - k_2\left(\sqrt{\frac{k_1}{3k_2}}\right)^3 = 1.$$

Возьмем еще одну промежуточную точку, π/6, значение функции в которой равно половине максимального значения:

$$k_1\frac{\pi}{6} - k_2\left(\frac{\pi}{6}\right)^3 = \frac{1}{2}.$$

Полученная в результате система уравнений выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} 4k_1{}^3 - 27k_2 = 0; \\ k_1 - \dfrac{\pi^2}{36}k_2 = \dfrac{3}{\pi}. \end{cases}$$

После решения системы уравнений были получены следующие значения коэффициентов: $к_1$=0.98862 и $к_2$=0.14314.

Для указанных значений коэффициентов получено максимальное значение погрешности метода $\delta_{3\sin} = 0.00724 = 7.41 \times 2^{-10}$ при изменении аргумента от 0 до 90^0. Значение погрешности $\delta_{3\sin}$ меньше значения $\delta_{2\sin}$ в 11 раз, но для применения на практике такое значение целесообразно не более чем для 7-ми разрядного представления результата. В связи с этим были подобраны значения коэффициентов более точно по критерию получения минимального значения погрешности метода. Получен следующий полином

$$\sin\beta = 0.98557\beta - 0.14260\beta^3. \qquad (3)$$

Выражение (3) обеспечивает максимальное значение погрешности в диапазоне изменения аргумента от 0^0 до $89{,}9217^0$ 0.00448 или 4.58 единицы десятого разряда. На практике такое значение целесообразно при использовании не более чем 8-разрядного представления результата. Поэтому ограничим диапазон изменения аргумента интервалом от 0 до π/4. После решения систем уравнений для функций sinβ и cosβ

$$\begin{cases} k_1\dfrac{\pi}{4} - k_2\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}; \\ k_1\dfrac{\pi}{6} - k_2\left(\dfrac{\pi}{6}\right)^3 = \dfrac{1}{2}; \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} k_1 - k_2\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}; \\ k_1 - k_2\left(\dfrac{\pi}{6}\right)^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases}$$

и уточнения коэффициентов получены следующие полиномы

$$\begin{aligned} \sin\beta &= \beta\left(0.99904 - 0.16037\beta^2\right) \\ \cos\beta &= 0.99809 - 0.47490\beta^2 \end{aligned} \qquad (4)$$

Погрешность для синуса и косинуса составила соответственно 0.15×2^{-10} и 1.96×2^{-10}. Такие значения уже являются приемлемыми для практических применений с 10-разрядным представлением результата. Значения функций sinβ и cosβ для углов от 45^0 до 90^0 вычисляются по формулам приведения известных из тригонометрии.

Для уменьшения погрешности функции cosβ можно предложить вычисление значений синуса от 0 до 56.25^0 и косинуса от 0 до 33.75^0. В этом случае максимальное значение погрешности функций синуса и косинуса соответственно равны 0.47×2^{-10} и 0.62×2^{-10} при значениях коэффициентов 0.99767, 0.15689 и 0.99939, 0.48578 соответственно.

Для дальнейшего повышения точности можно предложить разложение в ряд с тремя членами разложения и уточненными значениями коэффициентов, предложенных в [1]

$$\begin{aligned} \sin\beta &= \beta\left(1-\beta^2\left(0{,}16605-0{,}00761\beta^2\right)\right),\\ \cos\beta &= 1-\beta^2\left(0{,}4967-0{,}03705\beta^4\right). \end{aligned} \qquad (5)$$

При использовании обычного ряда Маклорена максимальное значение погрешности составляет для синуса и косинуса соответственно 4.65×2^{-10} и 20×2^{-10}, для выражения (5) погрешности соответственно равны 0.17×2^{-10} и 1.22×2^{-10}.

При подборе с учетом первого члена разложения для функции sinβ с коэффициентами 0.99969, 0.16566 и 0.00751 получено максимальное значение погрешности $0.071\times 2^{-10} = 1.14\times 2^{-14}$. График изменения абсолютной погрешности с данными коэффициентами представлен на рисунке 3.

$$\sin\beta = \beta\left(1-\beta^2\left(0{,}16605-0{,}00761\beta^2\right)\right) \qquad (6)$$

В соответствии с выражением (6) для вычисления функции sinβ необходимо осуществить 6 арифметических операций (4 умножения и 2 сложения) и выборку трех констант. Для вычисления функции cosβ необходимо произвести выполнение шести операций. С учетом полученных значений погрешностей целесообразно функцию cosβ вычислять с использованием разложения для функции sinβ, при этом дополнительно вычисляется значение 90^0-β, то есть производится выборка дополнительной константы и алгебраическое вычитание.

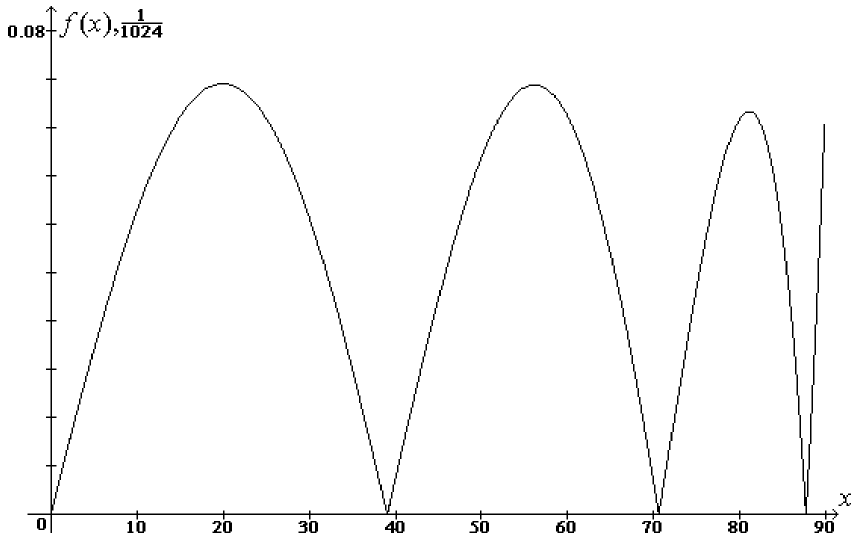

Рисунок 3 - Погрешность вычисления значений синуса по выражению (6), взятая по модулю.

При использовании выражения (4) для вычисления функции sinβ необходимо выполнить четыре арифметических операции, выбрать две константы, а также осуществить операции сравнения аргумента со значением 45^0 и условного перехода и при β>45^0 осуществить алгебраическое вычитание 90^0-β. Для реализации алгоритма со значениями β>56.25^0 имеем аналогичные условия, но погрешность при этом меньше.

При использовании алгоритма (6) погрешность уменьшается в 66 раз по сравнению с обычным рядом Маклорена с первыми тремя членами и составляет около одной единицы 14-го разряда, т.е. разложение с тремя членами ряда практически обеспечивает возможность с учетом знакового разряда функции sinβ формировать шестнадцатиразрядное представление результата. Эквивалентный результат дает вычисление функции синуса используя ряд Маклорена с пятью первыми членами:

$$\sin\beta = \beta - \frac{\beta^3}{3!} + \frac{\beta^5}{5!} - \frac{\beta^7}{7!} + \frac{\beta^9}{9!}$$

или для уменьшения числа операций преобразованного к виду

$$\sin\beta = \beta\left(1 - \beta^2\left(\frac{1}{3!} - \beta^2\left(\frac{1}{5!} - \beta^2\left(\frac{1}{7!} - \frac{\beta^2}{9!}\right)\right)\right)\right) \qquad (7)$$

Для вычисления полинома (7) необходимо произвести 10 арифметических операций (6 умножений и 4 сложения) и выборку 5 констант.

Практическая реализация полученного алгоритма (6), по сравнению с классическим вариантом (7) при работе с шестнадцатиразрядными числами, снижает в среднем в $2 \times N$ раза время обработки сигнала, где N - число итераций цикла.

Литература

1. Акчурин Э.А. Программная реализация взаимных преобразований алгебраического и экспоненциального представления комплексного сигнала на цифровых сигнальных процессорах // Радиотехника. 1995. №1-2. С. 21-23