НЕРЕКУРСИВНЫЕ ЛОПАСТНЫЕ ФИЛЬТРЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Приоров А.Л., Лукашевич Ю.А.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
150000, Россия, Ярославль, ул. Советская, 14. Тел.: (0852) 32-11-94. E-mail: cat@uniyar.ac.ru

Реферат. Исследованы частотные свойства двумерных нерекурсивных цифровых фильтров первого порядка. Определены области параметров цифровой системы, соответствующие лопастным фильтрам. Получены выражения для линий среза их частотных характеристик.

1. Введение

Использование двумерных нерекурсивных цифровых фильтров в обработке изображений и телевизионных сигналов обусловлено наличием у них уникальных свойств – устойчивости системы при любом выборе значений параметров, а также возможности реализации строго линейной фазовой характеристики. Последнее особенно важно, поскольку человеесккий глаз весьма чувствителен к фазовым искажениям. В работах [1-7] проведен анализ частотных свойств некоторых типов двумерных цифровых систем. Данная работа посвящена исследованию возможности реализации лопастных фильтров на базе двумерной нерекурсивной цифровой системы первого порядка.

Алгоритм работы двумерного нерекурсивного цифрового фильтра первого порядка описывается разностным уравнением вида [7]:

$$y(n_1,n_2)= x(n_1,n_2)+a(1,0)x(n_1-1,n_2)+a(0,1)x(n_1,n_2-1)+a(1,1)x(n_1-1,n_2-1), \qquad (1)$$

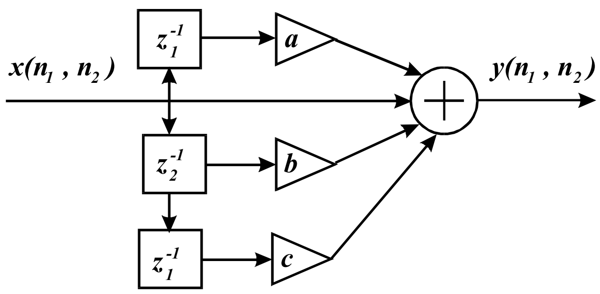


Рис.1.

где $x(n_1,n_2)$ – двумерный сигнал на входе фильтра, $y(n_1,n_2)$ – сигнал на его выходе, $a(i, j)$ – параметры фильтра, причем принято, что $a(0, 0)=1$. Взяв z-преобразование от обеих частей уравнения (1) и проведя соответствующие преобразования, получим передаточную функцию системы

$H(z_1, z_2)=1 + az_1^{-1} + bz_2^{-1} + cz_1^{-1} z_2^{-1}$.

Структурная схема фильтра приведена на рис.1. Здесь и далее для упрощения используются следующие обозначения:

$a=a(1,0)$, $b=a(0,1)$, $c=a(1,1)$.

Частотную характеристику найдем, сделав подстановку

$$z_1 = e^{j\omega_1},\ z_2 = e^{j\omega_2},$$

тогда

$$H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = 1 + ae^{j\omega_1} + be^{j\omega_2} + ce^{j(\omega_1+\omega_2)},$$

где ω_1, ω_2 – пространственные частоты.

Для исследования частотных свойств системы удобнее работать с квадратом модуля частотной характеристики, который после преобразований можно записать в виде:

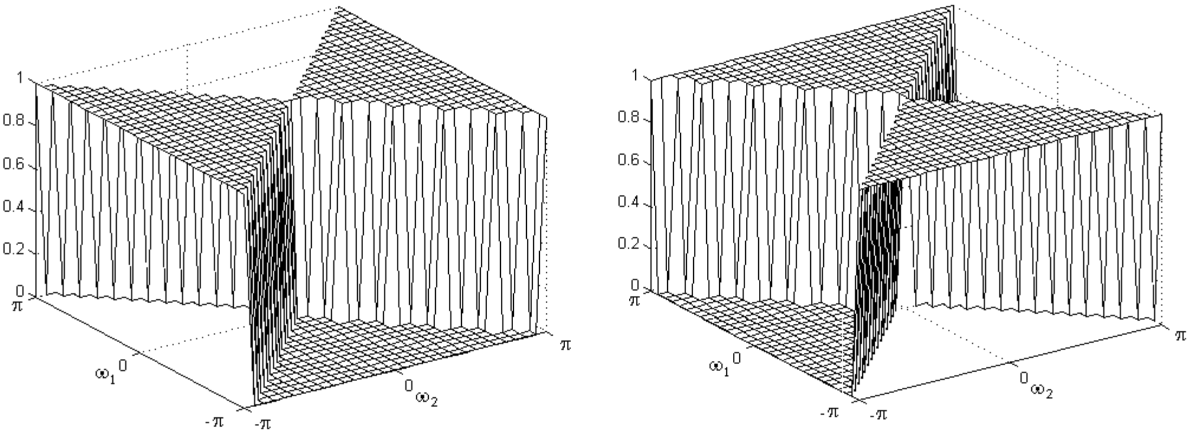
$$|H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})|^2 = 1 + a^2 + b^2 + c^2 + 2(a+bc)cos\,\omega_1 + 2(b+ac)cos\,\omega_2 +$$
$$+ 2c\,cos(\omega_1+\omega_2) + 2ab\,cos(\omega_1-\omega_2).$$

Двумерный характер амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) таких фильтров позволяет кроме фильтров нижних и верхних частот, известных из теории одномерных фильтров, реализовывать фильтры с другими видами АЧХ, которых в одномерном случае не существует. В качестве примера можно привести лопастные фильтры, которые используются при обработке сейсмических сигналов. Это фильтры, удовлетворяющие следующим условиям:

лопастной фильтр по ω_1 пропускает частоты, лежащие в области $|\omega_1| < \alpha|\omega_2|$ и задерживает частоты лежащие вне этой области (рис.2*а*);

лопастной фильтр по ω_2 пропускает частоты, лежащие в области $|\omega_1| > \alpha|\omega_2|$ и задерживает частоты лежащие вне этой области (рис.2*б*).

В радиотехнике весьма важны свойства системы в спектральной области, в частности такие ее характеристики как частоты среза системы, полосы пропускаемых частот, резонансные частоты. Именно они определяют возможность применения конкретной системы для той или иной задачи, и именно по этим параметрам системы подразделяют на типы. Поскольку АЧХ цифровых фильтров симметрична относительно начала координат, то дальнейшие исследования можно проводить, рассматривая область частот $\omega_2 \geq 0$.



а) *б*)

Рис.2.

2. Частотные характеристики

Определение условий, которые необходимо наложить на параметры системы, чтобы получить лопастные фильтры, проводилось с использованием аппарата дифференциальной геометрии в пространстве. Этот метод был предложен в [1]. Он заключается в определении знака отклонения поверхности АЧХ от плоскости, касательной в экстремальных точках. Для лопастного фильтра по ω_1 максимум АЧХ должен находиться в точке $(\pi, 0)$, что соответствует условию

$$\begin{cases} (a+c)(1+b) < 0 \\ (a+c)(1+b)(b-c)(a-1)-(c-ab)^2 > 0. \end{cases}$$

Кроме того, необходимо, чтобы значение АЧХ в точке $(0, \pi)$ не превышало $1/\sqrt{2}$ от максимального значения (в точке $(\pi, 0)$), т.е. должно выполняться условие

$$\frac{f(0,\pi)}{f(\pi,0)} = \left(\frac{1+a-b-c}{1-a+b-c}\right)^2 < \frac{1}{2}.$$

В случае лопастного фильтра по ω_2 максимум АЧХ должен находиться в точке $(0, \pi)$, соответствующее условие имеет вид

$$\begin{cases} (a-c)(b-1) < 0 \\ (a-c)(b-1)(b+c)(a+1)-(c-ab)^2 > 0, \end{cases}$$

и значение АЧХ в точке $(\pi, 0)$ не должно превышать $1/\sqrt{2}$ от максимального значения (в точке $(0, \pi)$), что соответствует условию

$$\frac{f(\pi,0)}{f(0,\pi)} = \left(\frac{1-a+b-c}{1+a-b-c}\right)^2 < \frac{1}{2}.$$

Эти условия задают области параметров указанных типов фильтров. Графическая интерпретация решения приведена на рис.3. Здесь представлено сечение пространства параметров фильтра (a,b,c) плоскостями, соответствующими различным значениям параметра c.

3. Линия среза

Селектирующие свойства одномерных цифровых фильтров принято характеризовать частотой среза, соответствующей затуханию АЧХ на уровне 3 дБ. Для двумерного случая введем понятие линии среза, точки которой имеют координаты $(\omega_{C1},\omega_{C2})$, удовлетворяющие условию:

$$\frac{|H|^2(\omega_{c1},\omega_{c2})}{|H|^2_{max}} = \frac{1}{2}.$$

Уравнение линии среза лопастного фильтра по ω_1 получено в следующем виде:

$$1+a^2+b^2+c^2+2(a+bc)\cos\omega_{c1}+2(b+ac)\cos\omega_{c2}+$$

$$+2c\cos(\omega_{c1}+\omega_{c2})+2ab\cos(\omega_{c1}-\omega_{c2})=\frac{1}{2}(1-a+b-c)^2,$$

а для лопастного фильтра по ω_2 его можно записать как:

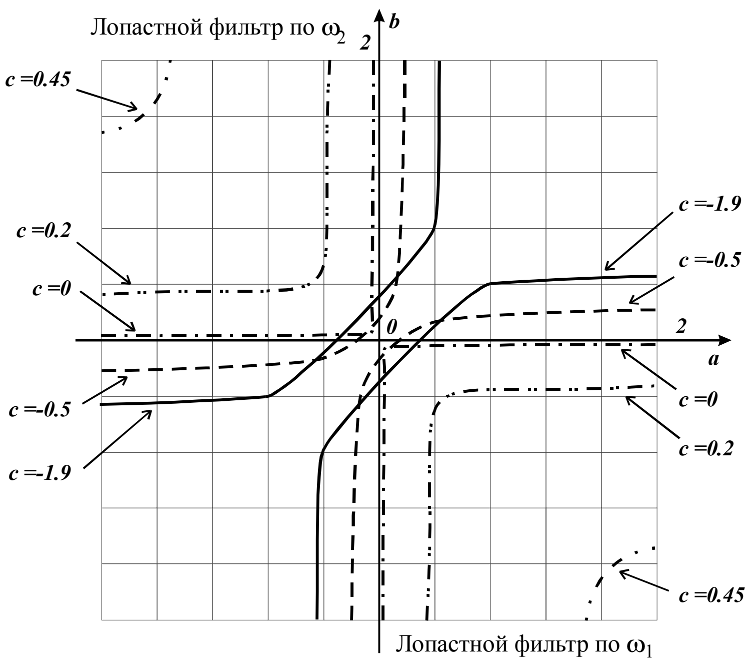
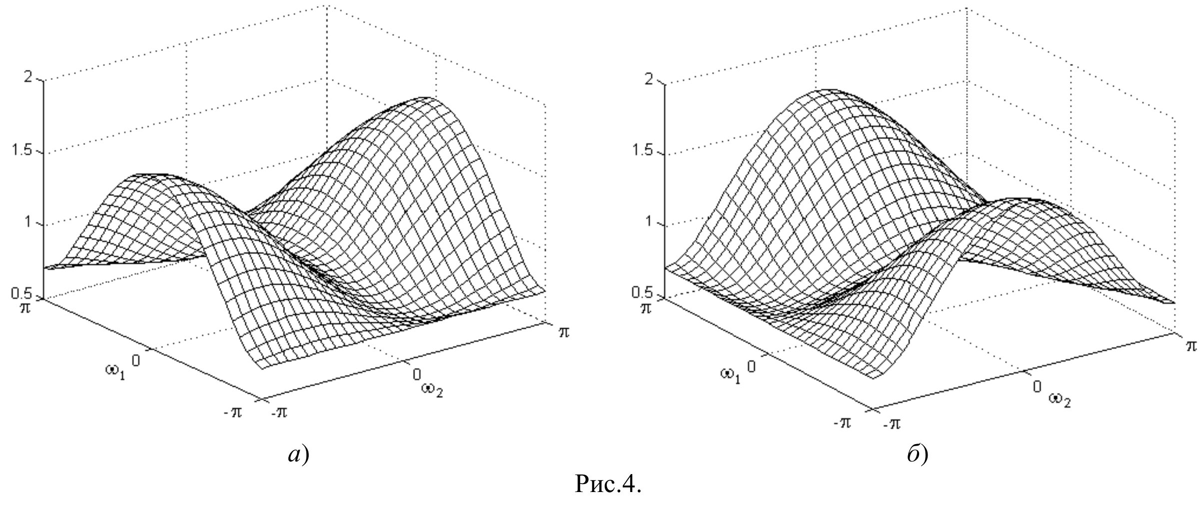


Рис.3.

Примеры АЧХ лопастных фильтров по ω_1 и ω_2 приведены на рис.4 *а* и *б* соответственно.



а) *б*)

Рис.4.

$$1+a^2+b^2+c^2+2(a+bc)\cos\omega_{c1}+2(b+ac)\cos\omega_{c2}+$$

$$+2c\cos(\omega_{c1}+\omega_{c2})+2ab\cos(\omega_{c1}-\omega_{c2})=\frac{1}{2}(1+a-b-c)^2.$$

Эти формулы относительно сложны для анализа, поэтому была проведена аппроксимация линии среза уравнением эллипса, которое наиболее точно его описывает:

$AX_1^2+2BX_1X_2+CX_2^2=R^2$,

где коэффициенты A, B, C, R и координаты X_1, X_2 определяются следующими выражениями:

для лопастного фильтра по ω_1

$A=-2(a+c)(1+b)$, $B=-2(c-ab)$, $C=2(b-c)(1-a)$,

$R=(1-a+b-c)$, $X_1=\pi-\omega_{C1}$, $X_2=\omega_{C2}$; (2)

для лопастного фильтра по ω_2

$$A=-2(a-c)(b-1),\quad B=-2(c-ab),\quad C=-2(b+c)(a+1),$$
$$R=(1+a-b-c),\quad X_1=\omega_{C\,1},\quad X_2=\pi-\omega_{C\,2}. \qquad (3)$$

Равенства (2) и (3) позволяют количественно оценить значения ω_C по обеим частотным координатам.

Таким образом, исследована двумерная нерекурсивная цифровая система первого порядка, получены ограничения на параметры системы для существования лопастных фильтров. Получено уравнение линии среза двумерной цифровой системы в удобном для практического применения виде.

Результаты работы могут использоваться для расчета и анализа двумерных фильтрующих систем, используемых для двумерной и трехмерной обработки сигналов и изображений.

Библиография

1. Брюханов Ю.А., Приоров А.Л., Мясников Е.А., Калинин С.А. Частотные свойства двумерных рекурсивных цифровых систем первого порядка // Радиоэлектроника, 1995. № 4, С.26-30. (Изв. высш. учеб. заведений).

2. Balusov I.L., Priorov A.L. Research of two-dimensional recursive digital second order filters in frequency area. In Proc. DSPA'98, Moscow, Russia, 1998. P.142-145.

3. Приоров А.Л., Тарасов В.Л. Синтез двумерных цифровых рекурсивных БИХ-фильтров с заданными характеристиками// Радио и волоконно-оптическая связь, локация и навигация, Воронеж, 1996. С.1122-1125.

4. Приоров А.Л., Тарасов В.Л. Исследование двумерных рекурсивных цифровых ФНЧ и ФВЧ второго порядка// Радио и волоконно-оптическая связь, локация и навигация, Воронеж, 1997. С.1006-1010.

5. Балусов И.Л., Приоров А.Л., Елагин А.А. Анализ некоторых типов двумерных рекурсивных цифровых фильтров второго порядка//Актуальные проблемы физики: Сборник научных трудов. Яросл. гос. ун-т. Ярославль, 1997. С.149-155.

6. Балусов И.Л., Приоров А.Л. Классификация типов фильтров, получаемых на базе двумерной рекурсивной системы второго порядка//Современные проблемы радиофизики и электроники: Сборник научных трудов. Яросл. гос. ун-т, Ярославль, 1998. С.148-154.

7. Лукашевич Ю.А., Приоров А.Л. Анализ частотных свойств двумерных нерекурсивных цифровых фильтров первого порядка // докл. 2-ой междунар. конф. и выставки “Цифровая обработка сигналов и ее применения” (DSPA’99), Москва, 1999. Т.3. С.615-619.

DIGITAL FAN-FILTERS OF THE FIRST ORDER

Priorov A.L., Lukashevich Yu.A.

Yaroslavl State University

150000, Russia, Yaroslavl, Sovetskaja, 14. Phone: (0852) 32-11-94. E-mail: cat@uniyar.ac.ru

Abstract. Frequency properties of 2-D first order nonrecursive digital filters are researched. Domains of the filter parameters corresponding to fan-filters are established. Expressions of the cut-off line of their amplitude-frequency response are derived.

Two-dimensional nonrecursive digital filters using in image and TV-signal processing is due to their unique properties. These are system stability by any parameters and the possibility to construct linear phase filters. The lather is especially important, as the human eye is rather sensitive to phase distortions. Frequency properties of some 2-D digital systems are researched in [1, 2]. This paper is devoted to the realization of fan-filters on the base of 2-D nonrecursive digital system of the first order.

The algorithm of 2-D first order nonrecursive digital filter is described by the following difference equation

$y(n_1,n_2)= x(n_1,n_2)+a(1,0)x(n_1-1,n_2)+a(0,1)x(n_1,n_2-1)+a(1,1)x(n_1-1,n_2-1)$,

where $x(n_1,n_2)$ – is a 2-D signal on the filter input, $y(n_1,n_2)$ – is a signal on its output, $a(i,j)$ – are the filter parameters, whereby it’s assumed that $a(0,0)=1$. Performing z-transform of this equation we obtain the transfer function of the system

$H(z_1, z_2)=1 + az_1^{-1} + bz_2^{-1} + cz_1^{-1}z_2^{-1}$.

Here and further for the simplification sake the following denotions are assumed: $a=a(1,0)$, $b=a(0,1)$, $c=a(1,1)$. The amplitude-frequency response we obtain after the substitution $z_1 = e^{j\omega_1}$, $z_2 = e^{j\omega_2}$

$$H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = 1 + ae^{j\omega_1} + be^{j\omega_2} + ce^{j(\omega_1+\omega_2)},$$

where ω_1, ω_2 – are space frequencies.

To investigate frequency properties of the system it is preferable to investigate the squared modulo of the amplitude-frequency response, which can be written as follows:

$$|H(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2})|^2=1+a^2+b^2+c^2+2(a+bc)cos\,\omega_1+2(b+ac)cos\,\omega_2+$$
$$+2c\,cos(\omega_1+\omega_2)+2ab\,cos(\omega_1-\omega_2).$$

The 2-D character of amplitude-frequency responses of such filters allows to realize not only low pass band and high pass band filters known from the theory of 1-D filters, but also filters with other amplitude-frequency responses, that can not be obtained in 1-D case. For example it can be a fan filter. These are the filters that satisfy the follow conditions: a fan filter along ω_1 lets the frequencies from the domain $|\omega_1|<\alpha|\omega_2|$ pass and suppresses frequencies outside this domain; a fan filter along ω_2 lets the frequencies from the domain $|\omega_1|>\alpha|\omega_2|$ pass and suppresses frequencies outside this domain.

Conditions that the system parameters should satisfy to construct a fan filter were found by methods of differential geometry in space. This approach was proposed in [1]. It consists in determining the sign of the elevation of amplitude-frequency response surface from the plane tangent in extreme points. The maximum of amplitude-frequency response of a fan filter along ω_1 must be at the point $(\pi, 0)$ that conforms to the conditions:

$$\begin{cases}(a+c)(1+b)<0\\(a+c)(1+b)(b-c)(a-1)-(c-ab)^2 > 0.\end{cases}$$

In addition it's necessary that the magnitude of the amplitude-frequency response at the point $(0, \pi)$ does not exceed $1/\sqrt{2}$ of the maximum (at the point $(\pi, 0)$), i.e. the condition should be held

$$\frac{f(0,\pi)}{f(\pi,0)}=\left(\frac{1+a-b-c}{1-a+b-c}\right)^2<\frac{1}{2}.$$

For a fan filter along ω_2 the maximum of the amplitude-frequency response should be at the point $(0, \pi)$. The corresponding condition is this

$$\begin{cases}(a-c)(b-1)<0\\(a-c)(b-1)(b+c)(a+1)-(c-ab)^2 > 0,\end{cases}$$

and the magnitude of the amplitude-frequency response at the point $(\pi, 0)$ should not exceed $1/\sqrt{2}$ of the maximum (at $(0, \pi)$), that is

$$\frac{f(\pi,0)}{f(0,\pi)}=\left(\frac{1-a+b-c}{1+a-b-c}\right)^2<\frac{1}{2}.$$

These conditions determine the domains of parameters for the mentioned filters.

Selective properties of 1-D digital filters are usually characterized by the cutoff frequency at which the amplitude-frequency response suppressed at 3 dB. In 2-D case let us introduce the notion of the cutoff line. It can rather exactly be approximated by an ellipse equation:
$AX_1^2+2BX_1X_2+CX_2^2=R^2$,
where coefficients A, B, C, R and coordinates X_1, X_2 are determined by the following expressions:
for a fan filter along ω_1
$A=-2(a+c)(1+b)$, $B=-2(c-ab)$, $C=2(b-c)(1-a)$,
$R=(1-a+b-c)$, $X_1=\pi-\omega_{C\,1}$, $X_2=\omega_{C\,2}$;
for a fan filter along ω_2
$A=-2(a-c)(b-1)$, $B=-2(c-ab)$, $C=-2(b+c)(a+1)$,
$R=(1+a-b-c)$, $X_1=\omega_{C\,1}$, $X_2=\pi-\omega_{C\,2}$.

These equations make it easy to estimate the values of ω_C along both frequency coordinates.
Two-dimensional nonrecursive digital system of the first order is investigated. The domains of parameters corresponding to fan filters are established. The equation of the cutoff line for the 2-D digital system is derived in a form suitable for practical use.

The results of the work can be helpful in design and analyze of 2-D filtering systems used in 2-D and 3-D signal and image processing.

Bibliography

1. Balusov I.L., Priorov A.L. Research of two-dimensional recursive digital second order filters in frequency area. // Proc. of 1nd Int. Conf. "Digital Signal Processing and Its Applications" (DSPA'98), Moscow, 1998. V. III-E, pp.142-145.

2. Lukashevich Yu.A., Priorov A.L. Analysis of frequency properties of 2-D first order nonrecursive digital filters // Proc. of 2nd Int. Conf. "Digital Signal Processing and Its Applications" (DSPA'99), Moscow, 1999. V.3, pp.620-621.