

В отличие от задачи проектирования линейных фильтров, которая, как правило, базируется на аппроксимации заданной частотной характеристики идеального фильтра (например, низких или высоких частот), синтез нелинейных фильтров в частотной области не допускает такой простой и наглядной трактовки. Преобразование спектра входного процесса при нелинейной фильтрации является гораздо более сложным процессом, приводящим к расширению входного спектра, возникновению многочисленных комбинационных гармоник и другим нелинейным эффектам [1, 2]. В то же время использование этих более сложных и богатых по своей природе нелинейных явлений как раз и позволяет решать задачи, перед которыми линейные методы фильтрации оказываются бессильными.

В работе рассматривается класс цифровых нелинейных фильтров, представленных отрезком дискретного ряда Вольтерра, называемых также полиномиальными или фильтрами Вольтерра [1, 3]. Представление таких фильтров в частотной области позволяет рассматривать нелинейную фильтрацию как процесс преобразования гармонических составляющих входного сигнала в множество комбинационных составляющих выходного сигнала, определяемых частотными свойствами и степенью нелинейности фильтра. Для описания частотных свойств нелинейных фильтров вводятся понятия нелинейного спектра входного и выходного сигналов и интегральной частотной характеристики.

Как известно [2, 3], нелинейная система M -го порядка в частотной области характеризуется набором из M частотных характеристик (ядер) $H_1(\omega), H_2(\omega_1, \omega_2), \dots, H_M(\omega_1, \dots, \omega_M)$, позволяющих рассчитать частотный отклик $Y(\omega)$ системы на любое воздействие $X(\omega)$ по формуле

$$Y(\omega) = \sum_{m=1}^M Y_m(\omega) = H_1(\omega)X(\omega) + \sum_{m=2}^M \frac{1}{(2\pi)^{m-1}} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} H_m(\omega_1, \dots, \omega_m) \delta\left(\omega + \sum_{i=1}^m \omega_i\right) \prod_{i=1}^m X(\omega_i) d\omega_i, \quad (1)$$

где $X(\omega)$ – преобразование Фурье входного сигнала $x(n)$. Первый член $Y_1(\omega)$ в выражении (1) характеризует линейную составляющую системы, а остальные $(M - 1)$ – представляют собой нелинейные составляющие $Y_m(\omega)$, $m = 2, \dots, M$ различного порядка. Несмотря на свой исчерпывающий характер, представление (1) неудобно для практического синтеза систем, так как нелинейные члены определяются через многомерные интегралы.

С целью упрощения частотного анализа рассмотрим спектр m -й степени входного сигнала $x(n)$, определяемый оператором $S_m[X(\omega)]$ вида [3]

$$X_m(\omega) = S_m[X(\omega)] = \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega + \omega_1 - \dots - \omega_m) \prod_{i=1}^m X_i(\omega_i) d\omega_i, \quad (2)$$

в частотном диапазоне которого представлены все спектральные составляющие, обусловленные нелинейностью m -го порядка. Назовем для краткости $X_m(\omega)$ *нелинейным входным спектром*, а составляющую $Y_m(\omega)$ – *нелинейным выходным спектром порядка m* . Для описания зависимости, связывающей компоненты данных спектров на частоте ω , определим функцию

$$G_m(\omega, X(\omega)) = \frac{Y_m(\omega)}{X_m(\omega)} \quad (3)$$

для $X_m(\omega) \neq 0$. Данная функция при $m = 1$ совпадает с частотной характеристикой $H_1(\omega)$ линейного фильтра и зависит только от ω . Для $m \geq 2$ она зависит также от $X(\omega)$ и дает квазилинейное описание нелинейности m -го порядка. Как следует из (2)–(4) функция $G_m(\omega, X(\omega))$ определяет линейную взаимосвязь между частотными компонентами спектров $X_m(\omega)$ и $Y_m(\omega)$, полученных интегрированием вдоль гиперплоскостей $\omega_1 + \dots + \omega_m = \omega$. Поэтому в отличие от ядер $H_m(\omega_1, \dots, \omega_m)$, определяющих частотные свойства системы в отдельных точках частотной области, функцию $G_m(\omega, X(\omega))$ можно рассматривать как *интегральную частотную характеристику m -го порядка* [3].

На основании определения (4) частотный отклик нелинейного фильтра M -го порядка можно представить в виде

$$Y(\omega) = G_1(\omega)X(\omega) + \sum_{m=2}^M G_m(\omega, X(\omega))X_m(\omega). \quad (4)$$

Данный ряд дает эквивалентное представление нелинейного фильтра в виде структуры, аналогичной модели Гаммерштейна с тем отличием, что здесь функции $G_m(\omega, X(\omega))$ зависят от входного спектра $X(\omega)$.

В отличие от линейных фильтров при синтезе нелинейных фильтров с заданным частотными свойствами необходимо заранее определить класс входных сигналов. Использование синусоидальных воздействий при проектировании нелинейных фильтров, так же, как и в линейном случае, позволяет существенно упростить анализ и синтез в частотной области и получить не только качественную картину происходящих процессов, но и дать практические рекомендации по выбору параметров нелинейных фильтров в зависимости от специфики решаемой задачи.

В частности, для практически важного класса квадратичных фильтров при синусоидальных воздействиях $x(n) = A_0 + A_1 \cos \lambda n$ выражения (2), (3) приобретают вид

$$X_2(\omega) = 2\pi[(A_0^2 + 2A_1^2)\delta(\omega) + 2A_0A_1\delta(\omega - \lambda) + A_1^2\delta(\omega - 2\lambda)],$$

$$G_2(\omega, A_0, A_1) = \begin{cases} \frac{A_0^2 H_2(0,0) + 2A_1^2 H_2(-\lambda, \lambda)}{A_0^2 + 2A_1^2}, & \omega = 0; \\ H_2(0, \lambda), & \omega = \lambda; \\ H_2(\lambda, \lambda), & \omega = 2\lambda; \end{cases} \quad (5)$$

Следует заметить, что интегральная частотная характеристика $G_2(\omega)$ определена на частотах $\omega = 0$, $\omega = \lambda$, $\omega = 2\lambda$, для которых $X_2(\omega) \neq 0$, и может быть выражена через срезы двухмерного ядра $H_2(\omega_1, \omega_2)$. Аналогично m -мерная интегральная частотная характеристика определяется одномерными срезами ядра $H_m(\omega_1, \dots, \omega_m)$ порядка m .

Таким образом, частотные свойства синтезируемого фильтра можно формировать путем задания значений ядер в частотной области вдоль плоскостей, характеризующих вклад различных комбинационных гармоник в суммарную реакцию фильтра. Например, для подавления постоянной составляющей и второй гармоники выходного сигнала квадратичного фильтра необходимо, чтобы $H_2(0, 0) = H_2(-\lambda, \lambda) = H_2(\lambda, \lambda) = 0$. Требования, предъявляемые к сечениям ядер в частотной области, могут быть преобразованы в эквивалентные условия относительно нелинейных импульсных характеристик $h(n_1, n_2)$.

Для синтеза нелинейных фильтров с заданными частотными свойствами можно воспользоваться хорошо разработанным арсеналом средств проектирования линейных фильтров [4], если свести задачу проектирования нелинейного фильтра к построению линейного фильтра-прототипа. Покажем правомерность такого подхода на примере синтеза нелинейных фильтров для оценки параметров синусоидальных сигналов.

Рассмотрим одномерный квадратичный фильтр с синусоидальным сигналом $x(n) = A \sin \lambda n$ на входе. В соответствии с (5) интегральная частотная характеристика в этом случае имеет вид

$$G_2(\omega) = \begin{cases} H_2(-\lambda, \lambda), & \omega = 0; \\ H_2(\lambda, \lambda), & \omega = 2\lambda. \end{cases} \quad (6)$$

На выходе фильтра будут присутствовать постоянная составляющая и вторая гармоника. При этом выходной спектр будет равен

$$Y(\omega) = G_2(\omega)X_2(\omega) = A^2 H_2(-\lambda, \lambda)\delta(\omega) + A^2 H_2(\lambda, \lambda)\delta(\omega - 2\lambda).$$

При синтезе фильтра с целью измерения параметров входного сигнала на выходе желательно получить постоянный сигнал, пропорциональный измеряемому параметру. Для подавления нежелательной второй гармоники необходимо, чтобы сечение $H_2(\omega, \omega) = 0$. В зависимости от выбора сечения $H_2(-\omega, \omega)$ могут быть получены фильтры с различными свойствами, в частности:

1. Если $H_2(-\omega, \omega) = \alpha$, $\omega \in [0, \omega_c]$, что соответствует ФНЧ с частотой среза ω_c , выходной сигнал фильтра будет пропорционален мощности сигнала, т. е. $y_1(n) = \alpha A^2$.

2. Если $H_2(-\omega, \omega) = \beta \omega$, $\omega \in [0, \omega_c]$, что соответствует дифференциатору, на выходе фильтра формируется сигнал $y_2(n) = \beta A^2 \omega$, пропорциональный произведению частоты на мощность входного сигнала.

Легко видеть, что в качестве оценки частоты синусоидального сигнала с изменяющейся амплитудой можно использовать отношение

$$\frac{y_2(n)}{y_1(n)} = \frac{\beta}{\alpha} \omega. \quad (7)$$

Таким образом, согласно (7) необходимо синтезировать два нелинейных фильтра с выходными сигналами в виде $y_1(n) = \alpha A^2$ и $y_2(n) = \beta A^2 \omega$. Данные сигналы обусловлены значениями частотного ядра $H_2(-\omega, \omega)$, лежащими на диагонали $\omega_1 - \omega_2 = 0$, пересекающей II и IV квадранты частотной области. Поэтому для первого фильтра сечение ядра вдоль данной диагонали должно иметь постоянное значение, а для второго – линейно возрастать в зависимости от частоты. В то же время с целью исключения нежелательной второй гармоники, обусловленной значениями ядра на диагонали $\omega_1 + \omega_2 = 0$, необходимо обеспечить равенство нулю ядра $H_2(\omega_1, \omega_2)$ фильтра в I и III квадрантах частотной области.

Для синтеза нелинейных фильтров, обладающих такими свойствами, удобно воспользоваться двумерными трансформирующими функциями [5]. Обычно, в качестве трансформирующей функции используется частотная характеристика 3×3 -точечного фильтра с нулевой фазой

$$F(\omega_1, \omega_2) = A + B \cos \omega_1 + C \cos \omega_2 + D \cos(\omega_1 - \omega_2) + E \cos(\omega_1 + \omega_2), \quad (8)$$

где A, B, C, D, E – параметры, определяющие форму трансформирующей функции.

Для наших целей можно воспользоваться трансформацией вида

$$F(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2} [\cos(\omega_1 + \omega_2) - \cos(\omega_1 - \omega_2)]$$

с параметрами $A = B = C = 0, D = -1/2, E = 1/2$, принимающей положительные значения в II и IV квадрантах частотной плоскости и отрицательные – в I и III.

Из расположения линий уровня и соответствия $F(\omega_1, \omega_2) \leftrightarrow \cos(\omega)$ следует, что для подавления частотного отклика нелинейного фильтра в I и III квадрантах частотной области в качестве прототипов необходимо использовать низкочастотные фильтры с частотой среза $\omega_c = \pi/2$. Первый фильтр-прототип должен иметь равномерную частотную характеристику в полосе пропускания $[0, \pi/2]$. Так как частота $\omega = 0$ преобразуется в точку $(-\pi/2, \pi/2)$ частотной плоскости, для получения линейно возрастающего на интервале $0 \div \pi/2$ сечения $H_2(-\omega, \omega)$ ядра в качестве второго прототипа необходимо использовать низкочастотный фильтр с линейно ниспадающей частотной характеристикой на том же интервале. Для определения частотных ядер $H_{2,i}(\omega_1, \omega_2), i = 1, 2$ квадратичных фильтров, соответствующих линейным прототипам, использовалось выражение

$$H_{2,i}(\omega_1, \omega_2) = h_i(0) + 2 \sum_{n=1}^{(N-1)/2} h_i(n) T_n [F(\omega_1, \omega_2)], \quad i = 1, 2, \quad (9)$$

где полиномы $T_n[x]$ Чебышева рассчитывались по известной рекуррентной формуле.

Хотя импульсные характеристики $h_{2,i}(n_1, n_2)$, соответствующие частотным ядрам $H_{2,i}(\omega_1, \omega_2)$, могут быть рассчитаны с помощью обратного двумерного преобразования Фурье, более эффективно использовать рекуррентную процедуру, вычисляя $h_{2,i}(n_1, n_2)$ одновременно с $H_{2,i}(\omega_1, \omega_2)$.

В итоге из импульсных характеристик $h_i(n)$ фильтров-прототипов длительностью N отсчетов формируются $N \times N$ -матрицы

$$\mathbf{H}_i = [h_{2,i}(n_1, n_2)], \quad i = 1, 2,$$

содержащие отсчеты импульсных характеристик $h_{2,i}(n_1, n_2)$ квадратичных фильтров. Как оказалось, полученные в результате матрицы являются сильно разреженными, что позволяет существенно снизить вычислительные затраты при реализации синтезированных фильтров.

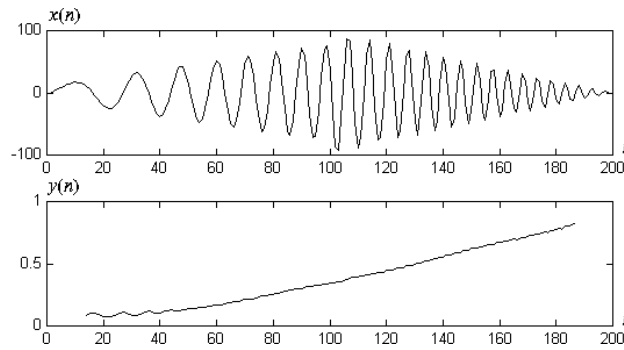
На основании (7) нелинейный фильтр для оценки частоты синусоидального сигнала может быть представлен в виде отношения двух квадратичных форм

$$y(n) = \frac{y_2(n)}{y_1(n)} = \frac{\mathbf{x}_n^T \mathbf{H}_2 \mathbf{x}_n}{\mathbf{x}_n^T \mathbf{H}_1 \mathbf{x}_n},$$

где \mathbf{x}_n – текущий вектор отсчетов входного сигнала, равный

$$\mathbf{x}_n = \left[x\left(n - \frac{N-1}{2}\right) \quad \dots \quad x(n-1) \quad x(n) \quad x(n+1) \quad \dots \quad x\left(n + \frac{N-1}{2}\right) \right].$$

Результаты фильтрации синусоидального сигнала с линейно возрастающей частотой и изменяющейся амплитудой представлены на рисунке, из которого видно, что оценка частоты не зависит от амплитуды входного сигнала.



Погрешности измерения, возникающие в основном на низких частотах, зависят от ширины переходной полосы фильтров-прототипов и связаны с просачиванием второй гармоники из I и III квадрантов частотной области в окрестности начала координат. Время измерения частоты определяется длиной импульсной характеристики N фильтра-прототипа и составляет величину, гораздо меньшую периода сигнала. Это позволяет использовать нелинейную фильтрацию для построения быстродействующих частотомеров инфранизких частот.

Литература

1. Pitas I., Venetsanopoulos A. N. Nonlinear digital filters: principles and applications. – Kluwer Academic Publishers, 1990. – 391 p.
2. Пупков К. А., Капалин В. И., Ющенко А. С. Функциональные ряды в теории нелинейных систем. – М.: Наука, 1976. – 448 с.
3. Щербakov М. А. Цифровая полиномиальная фильтрация: теория и приложение. – Пенза: Изд-во Пенз. гос. техн. ун-та, 1997. – 246 с.
4. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1978. – 848с.
5. Даджион Д., Мерсеро Р. Цифровая обработка многомерных сигналов. – М.: Мир, 1988. – 488 с.



NONLINEAR FILTER DESIGN IN THE FREQUENCY DOMAIN

Shcherbakov M. A.

State University of Penza

Krasnaya 40, Penza 440017, Russia, (841-2) 52-37-08, mike@diamond.stup.ac.ru

As opposed to designing of linear filters, which is based on approximation of a given magnitude characteristic of an ideal filter (for example, low-pass or high-pass), a synthesis of nonlinear filters does not allow so simple and evident treatment. In the nonlinear signal filtering, spectrum transformation is a more sophisticated process resulting in intermodulations and other frequency interactions. At the same time using these more rich nonlinear phenomena just allows us to solve tasks that linear filtering fails to do [1 - 3].

To describe nonlinear filtering effects in the frequency domain generalized frequency responses have been used [3]. As these functions are multidimensional, it is rather difficult to apply them for nonlinear filter design. Under some restriction on a class of input signals, for example, focusing solely on sine wave signals, efficient methods for nonlinear filter design have been proposed.

In a class of polynomial (Volterra) filters, it is possible to extract filters with kernels expressed in terms of delta-functions in the frequency or time domains [2]. These filters named delta-filters are powerful enough to resolve a lot of tasks in practice. Definition of the delta-filters responses by one-dimensional slices enables to reduce a problem to design of a linear prototype filter and make use of well-known methods of linear filter design [4]. Besides, delta-filters are considerably easier to implement than common Volterra filters.

In this papers we shall present theoretical basis of the delta-filtering and demonstrate the design technique by using sine wave parameter estimation as an example.

A frequency response of an M -th order polynomial filter may be characterized with transfer functions (kernels in the frequency domain) $H_1(\omega), H_2(\omega_1, \omega_2), \dots, H_M(\omega_1, \dots, \omega_M)$ and defined as summation

$$Y(\omega) = \sum_{m=1}^M Y_m(\omega) \quad (1)$$

of a linear component $Y_1(\omega) = H_1(\omega)X(\omega)$ and nonlinear components $Y_m(\omega)$ ($m > 1$) which are given by

$$Y_m(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{(m-1)}} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} Y_m(\omega_1, \dots, \omega_m) \delta\left(\omega - \sum_{i=1}^m \omega_i\right) d\omega_i \quad (2)$$

where $Y_m(\omega_1, \dots, \omega_m) = H_m(\omega_1, \dots, \omega_m)X(\omega_1) \dots X(\omega_m)$.

For simplification of the frequency analysis of nonlinear systems, generalized describing functions have been introduced in [5]. These functions are defined only on the input frequency range and hence can not be used to describe of nonlinear effects connected with new frequencies generation.

In order to overcome this limitation, let's introduce some new concepts. At first, we consider a spectrum of n -th power of an input signal defined by

$$X_m(\omega) = S_m[X(\omega)] = \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \delta\left(\omega - \sum_{i=1}^m \omega_i\right) \prod_{i=1}^m X_i(\omega_i) d\omega_i. \quad (3)$$

This function contains all frequency components of m -th order nonlinearity. We shall call $X_m(\omega)$ a *nonlinear input spectrum*, and $Y_m(\omega)$ given by (2) – a *nonlinear output spectrum* of the order m . To characterize the relation between these spectra at a frequency ω , let's also define a function

$$G_m(\omega, X(\omega)) = \frac{Y_m(\omega)}{X_m(\omega)} \quad (4)$$

for $X_m(\omega) \neq 0$. If $m = 1$, this function is the frequency response of a linear filter. For $m \geq 2$, this one depends on $X(\omega)$ and may be considered as a quasi-linear description of m -th order nonlinearity. As follows from (2)–(4) the function $G_m(\omega, X(\omega))$ describes a relationship between frequency components of the spectra $X_m(\omega)$ and $Y_m(\omega)$ derived by integration on hyperplanes $\omega_1 + \dots + \omega_m = \omega$. Therefore, function $G_m(\omega, X(\omega))$ may be regarded as *integral frequency response* of the m -th order.

Now using (4) we can rewrite the frequency response $Y(\omega)$ of M -th order polynomial filter as follows

$$Y(\omega) = G_1(\omega)X(\omega) + \sum_{m=2}^M G_m(\omega, X(\omega))X_m(\omega).$$

This series is an equivalent representation of the polynomial filter in the form similar to Hammerstein's model with input dependent frequency responses.

In contrast to linear case, for synthesis of nonlinear filters with given frequency properties, it is necessary beforehand to define a class of input signals. In order to analyze possible output frequency component of the filter, at first the input nonlinear spectrum can be derived. It allows one to choose the order and structure of the filter suitable for the given task. Then, requirements to the integral frequency response are formed, and filter coefficients are calculated.

In order to simplify the analysis and synthesis of filters in the frequency domain, a sine wave input may be selected. In practice, by using even a single sinusoid it is possible to get qualitative picture of filtering process, but also to gain insight into choice of a structure and parameters of a nonlinear filter being designed.

For an important subclass of quadratic filters with input signal $x(n) = A_0 + A_1 \cos \lambda n$, Eqs. (3) and (4) can be rewritten as

$$X_2(\omega) = 2\pi \left[(A_0^2 + 2A_1^2) \delta(\omega) + 2A_0 A_1 \delta(\omega - \lambda) + A_1^2 \delta(\omega - 2\lambda) \right]$$

$$G_2(\omega, A_0, A_1) = \begin{cases} \frac{A_0^2 H_2(0,0) + 2A_1^2 H_2(-\lambda, \lambda)}{A_0^2 + 2A_1^2}, & \omega = 0; \\ H_2(0, \lambda), & \omega = \lambda; \\ H_2(\lambda, \lambda), & \omega = 2\lambda; \end{cases} \quad (5)$$

It should be noted that the integral frequency response is defined at the frequencies $\omega = 0$, $\omega = \lambda$, $\omega = 2\lambda$ such that $X_2(\omega) \neq 0$ and can be represented by the three components $\{G_{2,0}(\lambda)\delta(\omega), G_{2,1}(\lambda)\delta(\omega - \lambda), G_{2,2}(\lambda)\delta(\omega - 2\lambda)\}$ expressed in terms of one-dimensional slices of the two-dimensional transfer function $H_2(\omega_1, \omega_2)$. For m -th order, the integral frequency response $G_m(\omega)$ of the m -th order nonlinear filter for the sinusoidal input is the following set $\{G_{m,0}(\lambda)\delta(\omega), G_{m,1}(\lambda)\delta(\omega - \lambda), \dots, G_{m,m}(\lambda)\delta(\omega - m\lambda)\}$ defined by the one-dimensional slices of the m -dimensional transfer function $H_m(\omega_1, \dots, \omega_m)$.

The slices specify a contribution of different harmonics to the output signal and, therefore, may be used to provide the given filter performance. For example, to suppress DC and a frequency component at $\omega = 2\lambda$ in the output signal of the quadratic filter the following condition has to be satisfied: $H_2(0, 0) = H_2(-\lambda, \lambda) = H_2(\lambda, \lambda) = 0$.

The requirements produced to the kernel slice in the frequency domain can be transformed into equivalent ones to the nonlinear impulse response which are required for implementation of the filter to be designed.

REFERENCES

1. Pitas I., Venetsanopoulos A.N., Nonlinear Digital Filters, Kluwer Academic Publishers, 1990.
2. Shcherbakov M. A. Digital Polynomial Filtering: Theory and Application, State University of Penza , 1997 (in Russian).
3. Pupkov K.A., Kapalin V.I., Jushenko A.S. Functional Series in the Nonlinear System Theory, Moscow, Nauka, 1976.
4. Rabiner L.R., Gold B. Theory and Application of Digital Signal Processing, Prentice-Hall, 1975.
5. Billings S. A, Tsang K. M.. Spectral Analysis for Non-linear Systems, Part 1: Parametric Non-linear Spectral Analysis, Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 3, no. 4, pp. 319-339, 1989.