

Ульяновский государственный технический университет
432027, Россия, Ульяновск, ул. Северный Венец, 32, каф. «Телекоммуникации»

1. Введение

В последние годы все более широкое применение находят системы извлечения информации, включающие пространственные апертуры датчиков для регистрации полезных сигналов. Важными классами таких систем являются аэрокосмические комплексы дистанционного исследования Земли, радио- и гидролокационные системы различного назначения. Для названных систем естественным является описание сигналов и помех с помощью случайных функций нескольких переменных, т. е. случайных полей (СП). При этом пространственные переменные, учитывающие взаимное расположение датчиков, часто носят дискретный характер. Несмотря на многочисленные публикации, касающиеся проблем статистического синтеза и анализа сеточных СП, удовлетворительные решения получены лишь для двумерных сеток (статических плоских изображений).

Более сложные модели изменяющихся во времени СП на многомерных сетках рассматривались в весьма ограниченном числе работ. Это объясняется большими методологическими и математическими трудностями построения теории СП, связанными с переходом к пространствам нескольких измерений. При этом формальное использование хорошо разработанных методов теории случайных процессов либо резко ограничивает класс возможных СП, либо приводит к практически непреодолимым вычислительным проблемам реализации полученных алгоритмов.

В настоящем докладе рассматривается важный класс моделей СП, а также рекуррентные квазиоптимальные алгоритмы их фильтрации, основанные на использовании данной модели.

2. Модели с кратными корнями

Рассмотрим линейные стохастические разностные уравнения следующего вида:

$$x_{\bar{i}} = \sum_{\bar{j} \in D} \alpha_{\bar{j}} x_{\bar{i}-\bar{j}} + \beta \xi_{\bar{i}}, \quad \bar{i} \in \Omega, \quad (1)$$

где $X = \{x_{\bar{i}}, \bar{i} \in \Omega\}$ – моделируемое СП; $\{\alpha_{\bar{j}}, \beta, \bar{j} \in D\}$ – параметры модели; $\Xi = \{\xi_{\bar{i}}, \bar{i} \in \Omega\}$ – порождающее белое СП, заданное на N -мерной прямоугольной сетке Ω ; D – каузальная область локальных состояний.

Анализ вероятностных свойств СП (1) упрощается, если их спектральная плотность может быть факторизована. Поскольку у таких СП КФ также факторизуется, то для решения задачи статистического анализа многомерного СП достаточно исследовать одномерные уравнения.

Для получения близких к изотропным СП предложено выбирать такие одномерные фильтры, которые имеют кратные корни характеристических уравнений: $1 - \sum_{j=1}^{n_k} \alpha_{kj} \lambda_k^j = 0$, где $n_k, k = \overline{1, N}$ – порядки одномерных авторегрессий. Рассмотрим одномерную АР-последовательность:

$$x_i = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_{i-j} + \beta \xi_i, \quad i = n+1, n+2, \dots, M, \quad (2)$$

где $\{\xi_i\}$ – последовательность независимых компонент с нулевыми средними и дисперсиями σ_{ξ}^2 . В случае с кратными корнями это уравнение можно записать в операторной форме $(1 - \rho z^{-1})^n x_i = \beta \xi_i$, где $1/\rho$ – корень кратности n характеристического уравнения; z^{-1} – оператор сдвига. Многомерное разделимое СП порождается следующими АР-уравнениями:

$$\prod_{k=1}^N (1 - \rho_k z_k^{-1})^{n_k} x_{\bar{i}} = \beta_{\bar{i}} \xi_{\bar{i}}, \quad \bar{i} \in \Omega, \quad (3)$$

где N – размерность поля; ρ_k и n_k – параметр и кратность корней модели вдоль k -й оси; Ω – многомерная сетка, на которой определено поле X .

Таким образом, модель СП полностью определяется вектором параметров $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N)$ и вектором кратностей (n_1, n_2, \dots, n_N) характеристических корней.

Установлено, что общий вид нормированной к дисперсии σ_x^2 поля КФ одномерной модели (2) записывается в следующем виде:

$$R_1(k) = \gamma^2(\rho, n) \rho^k \sum_{\ell=0}^{n-1} g(n, \ell, k) \frac{\rho^{2(n-\ell-1)}}{(1-\rho^2)^{2n-\ell-1}}, \quad k \geq 0 \quad (4)$$

$$\text{где } g(n, \ell, k) = \frac{(n+k-1)!(2n-\ell-2)!}{\ell!(n-1)!(n-\ell-1)!(n+k-\ell-1)!}, \quad \gamma^2(\rho, n) = \frac{(1-\rho^2)^{2n-1}}{\sum_{\ell=0}^{n-1} (C_{n-1}^{\ell} \rho^{\ell})^2}.$$

Полученные соотношения позволяют рассчитать КФ для одномерного СП с корнями произвольной кратности. Для определения КФ многомерной модели достаточно перемножить КФ одномерных систем

$$R_N(\bar{k}) = \prod_{i=1}^N R_1(k_i) \text{ и определить коэффициент } \beta_i \text{ одномерной } \beta_i = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_{\xi}^2} \gamma(\rho, n) \text{ и многомерной модели:}$$

$$\beta_{\bar{i}} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_{\xi}^2} \prod_{k=1}^N \gamma(\rho_k, n_k).$$

Анализ показывает, что, варьируя параметры связи и соотношения кратностей модели, можно получить широкий спектр разнотипных изображений

3. Алгоритм квазиоптимальной фильтрации изображений

Известные подходы к созданию рекуррентных процедур оценивания изображений не могут быть непосредственно использованы при обработке многомерных изображений, описывающихся АР моделями СП с кратными характеристическими корнями. В связи с этим возникает задача создания новых классов рекуррентных процедур оценивания последовательностей кадров СП на фоне помех, имеющих малое число операций умножения на один элемент изображения и, вместе с тем, приближающихся по эффективности к оптимальным алгоритмам.

Рассмотрим задачу построения оптимального алгоритма фильтрации. Для этого необходимо найти общую векторную форму представления моделей с кратными корнями. При кратности 2 по обеим осям модель можно записать в следующей форме:

$$\bar{x}_k = A\bar{x}_{k-1} + B\bar{x}_{k-2} + V\bar{\xi}_k, \quad (6)$$

где $\bar{x}_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kN})^T$, $\bar{\xi}_k = (\xi_{k1}, \xi_{k2}, \dots, \xi_{kN})^T$, A, B, V – матричные коэффициенты. Авторами предложена методика определения матриц A, B и V на основании соответствующей скалярной модели. Показано, что все коэффициенты в правой части уравнения, за исключением V , являются произведением скаляров на единичные матрицы. Чтобы привести (6) к стандартному виду

$$\bar{y}_l = S\bar{y}_{l-1} + W\zeta_l, \quad (7)$$

включим в вектор состояния \bar{y}_l k -ю и $(k-1)$ -ю строки изображения. После этого перепишем (6) в форме (7):

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{x}_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ E & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{k-1} \\ \bar{x}_{k-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\xi}_k \\ \bar{\xi}_{k-1} \end{bmatrix}.$$

Модель наблюдений запишется в виде:

$$\bar{z}_k = H\bar{y}_l + \bar{\vartheta}_k, \quad l = k - n_y, \quad (8)$$

где $\bar{\vartheta}_k$ – белый гауссовский шум с дисперсией V_{ϑ} ; $H = (E \mid 0)$.

Запись оптимальной калмановской процедуры для оценивания (7), (8) известна:

$$P_b = SP_{l-1}S^T + WW^T, \quad K_l = P_b H^T (HP_b H^T + V_{\vartheta})^{-1}, \quad P_l = (E - K_l H) P_b \quad (9)$$

$$\hat{\bar{y}}_b = S\hat{\bar{y}}_{l-1}, \quad \hat{\bar{y}}_l = \hat{\bar{y}}_b + K_l (\bar{z}_l - H\hat{\bar{y}}_b). \quad (10)$$

Аналогичным образом возможно обобщение данного подхода на случай моделей с характеристическими корнями любой кратности.

Рассмотрим возможности радикального сокращения требуемого числа операций для приведенного алгоритма. Выпишем элементы верхней половины матрицы K_l , представляющие собой ковариации ошибок оценивания $\mathcal{E}_{\ell}^k = x_{\ell}^k - \hat{x}_{\ell}^k$ элементов текущей строки. Выделим ℓ -й элемент k -й строки изображения и запишем последнее равенство в (10) в следующей скалярной форме $\hat{x}_{\ell}^k = \hat{x}_{\ell}^k + \hat{u}_{\ell}^k$, где

$\hat{u}_\ell^k = V_\theta^{-1} \sum_{j=1}^M P_{\ell j}^k (z_j^k - \hat{x}_{\ell j}^k)$, где M – длина строки изображения. Данное соотношение можно рассматривать

как оценку величины u_ℓ^k с помощью оптимального нерекурсивного линейного фильтра (фильтра Винера).

При этом для оценки u_ℓ^k используются разности $f_j^k = z_j^k - \hat{x}_{\ell j}^k = x_j^k - \hat{x}_{\ell j}^k + \theta_j^k = u_j^k + \theta_j^k$.

Для преобразования винеровской нерекуррентной оценки в калмановскую допустим, что модели состояния и наблюдения для u_ℓ^k описываются следующими уравнениями:

$$u_\ell = \gamma_\ell u_{\ell-1} + \psi_\ell, f_\ell = u_\ell + \theta_\ell, \quad (11)$$

где индекс k опущен для сокращения записи. Составим теперь уравнения калмановского оценивания u_ℓ , состоящего из двух этапов – фильтрации и последующего сглаживания элементов каждой строки. Первый этап работы скалярного алгоритма имеет следующий вид:

$$\hat{u}_{\ell} = \gamma_\ell \hat{u}_{\ell-1}, \hat{u}_{\ell} = \hat{u}_{\ell} + P_\ell^u V_\theta^{-1} (y_\ell - \hat{u}_{\ell}), P_\ell^u = P_{\ell-1}^u (1 + V_\theta^{-1} P_{\ell-1}^u)^{-1}, P_{\ell}^u = \gamma_\ell^2 P_{\ell-1}^u + V_{\xi_\ell} \quad (12)$$

Исследования показали, что при увеличении кратности модели поля, наилучшие результаты получаются при соответствующем увеличении порядка АР в модели (11). Анализ показал, что предложенный подход позволяет получить алгоритмы фильтрации изображений, объем вычислительной сложности которых существенно меньше, чем у известных. Выигрыш в числе арифметических операций по сравнению с аналогичным оптимальным алгоритмом может быть оценен примерно в M раз, где M – длина строки изображения.

Для анализа эффективности предложенных алгоритмов были проведены вычисления на ЭВМ. На рис. 1 представлены графики зависимости относительной дисперсии ошибки фильтрации $\sigma_\epsilon^2 / \sigma_x^2$ от номера j элемента в последней строке изображения размером 100x100 элементов при использовании векторного оптимального фильтра (сплошные линии) и квазиоптимального скалярного алгоритма (пунктир) при трех отношениях сигнал/шум $SNR = 1; 2; 5$; кратность модели (1,1). На рис. 2 приведены графики зависимости относительной дисперсии ошибки фильтрации для среднего элемента последней строки изображения.

Анализ проведенных экспериментов позволяет сделать вывод, что дисперсия ошибки фильтрации оптимального и квазиоптимального алгоритмов отличается не более, чем на 3-5%.

Таким образом, предложенный квазиоптимальный алгоритм оценивания двумерных СП на основе модели с кратными корнями позволяет существенно сократить вычислительные затраты при незначительной потере эффективности по отношению к строго оптимальным процедурам.

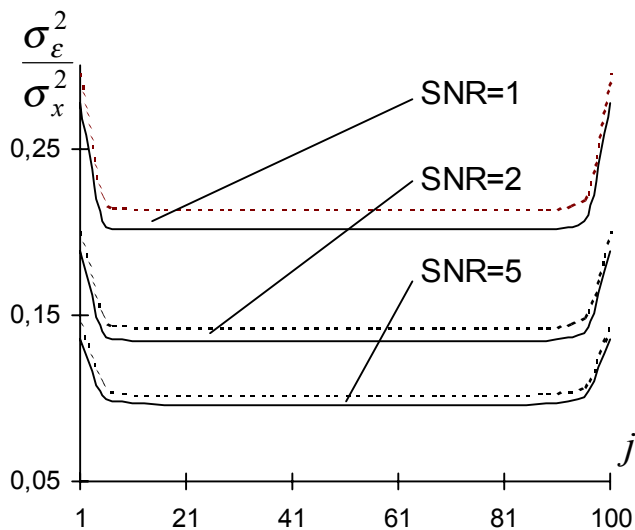


Рис. 1. Дисперсия ошибки фильтрации элементов последней строки

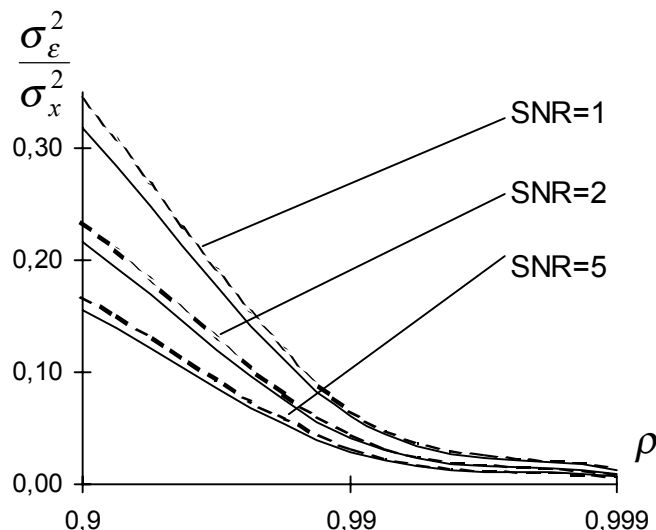


Рис. 2. Дисперсия ошибки фильтрации среднего элемента строки

Литература

1. K. K. Vasil'ev Statistical Analysis of Multidimensional Images // Pattern Recognition And Image Analysis, Vol. 9., No. 4, 1999, pp. 732-748.
2. K. K. Vasil'ev, O. V. Popov Autoregression Models of Random Fields with Multiple Roots // Pattern Recognition and Image Analysis, Vol. 9, No. 2, 1999, pp. 327-328.



RECURRENT QUASIOPTIMAL ESTIMATION OF RANDOM FIELDS

Vasilyev K.K., Popov O.V.

432027, Russia, Ulyanovsk, Severny Venets str., 32
Ulyanovsk state technical university, Department of Telecommunications

1. Introduction

Recently, the information-extraction systems including the three-dimensional apertures of sensors for detection of the desired signals have experienced increasing applications. Important classes of such systems include the aerospace complexes for remote-probing the Earth and the radiolocation and sonar systems of various purposes. For such systems, it is reasonable to describe the signals and interferences with the use of random fields (RF). In this case, spatial variables accounting for the mutual arrangement of detectors are often discrete. Despite numerous publications on the problem of statistical synthesis and analysis of mesh random fields, satisfactory solutions have been derived for two-dimensional meshes alone.

More complex models of time-dependent random fields defined on multidimensional grids, were considered in a very limited number of publications. In this report we consider the significant class of the random fields models as well as recurrent quasioptimal filtration algorithms built upon suggested model.

2. Models with Multiple Roots

The probabilistic analysis of RF is greatly reduced if the spectral density allows factorization. In order to obtain the almost isotropic RFs, it is suggested to choose one-dimensional filters with multiple roots of characteristic equations $1 - \sum_{j=1}^{n_k} \alpha_{kj} \lambda_k^j = 0$, where $n_k, k = \overline{1, N}$ are the orders of autoregressions. Let us now consider the one-dimensional autoregressive sequence:

$$x_i = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_{i-j} + \beta \xi_i, \quad i = n+1, n+2, \dots, M, \quad (2)$$

In the case of multiple roots the equation may be written in the operator form $(1 - \rho z^{-1})^n x_i = \beta \xi_i$, where $1/\rho$ is the n -multiplicity characteristic root, z^{-1} is the shift operator. The multidimensional divisible RF is achieved by the following autoregressive equations:

$$\prod_{k=1}^N (1 - \rho_k z_k^{-1})^{n_k} x_{\bar{i}} = \beta_{\bar{i}} \xi_{\bar{i}}, \quad \bar{i} \in \Omega. \quad (3)$$

Here N is the dimension of the field, ρ_k and n_k are, correspondingly, the parameter and multiplicity of the model roots along the k -th axis. Accordingly, the model of multidimensional Rf is completely defined by the parameters vector $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N)$ and the multiplicities vector (n_1, n_2, \dots, n_N) . Detailed examination of properties of the model could be found in [1, 2]. The analysis shows, that the variation of the link parameters and the according multiplicities allows to obtain the wide range of different-type images.

3. Algorithms of Adaptive Filtration of Images

Consider the task of obtaining of the almost optimal recurrent filtration algorithm for the aforementioned class of models. The strictly optimal recurrent algorithm is based upon the well-known vector Kalman procedure. In the simplest case of multiplicity 1 along both axes, the state and observation models can be represented as

$$\bar{y}_l = S \bar{y}_{l-1} + W \zeta_l, \quad \bar{z}_k = H \bar{y}_l + \bar{\vartheta}_k, \quad l = k - n_y, \quad (4)$$

where the state vector \bar{y}_l includes k -th and $(k-1)$ -th lines of th image.

The writing down of the corresponding vector Kalman filtration procedure is straightforward:

$$P_b = S P_{l-1} S^T + W W^T, \quad K_l = P_b H^T (H P_b H^T + V_\theta)^{-1}, \quad P_l = (E - K_l H) P_b \quad (5)$$

$$\widehat{y}_{l_3} = S\widehat{y}_{l-1}, \quad \widehat{y}_l = \widehat{y}_{l_3} + K_l(\bar{z}_l - H\widehat{y}_{l_3}). \quad (6)$$

The amount of computations for the above algorithm can be radically reduced. Let us select the ℓ -th element of k -th line of the image and then rewrite the last equation in (6) in the following scalar form: $\widehat{x}_\ell^k = \widehat{x}_{3\ell}^k + \widehat{u}_\ell^k$, where $\widehat{u}_\ell^k = V_\theta^{-1} \sum_{j=1}^M P_{\ell j}^k (z_j^k - \widehat{x}_{3j}^k)$ and M is a line length. This correspondence may be treated as an estimate of u_ℓ^k with an optimal Wiener filter. The transformation of the non-recurrent Wiener estimation to recurrent Kalman form can be achieved under the following assumptions: the state and observation models for u_ℓ^k have the form of $u_\ell = \gamma_\ell u_{\ell-1} + \psi_\ell$, $f_\ell = u_\ell + \theta_\ell$, where the index k is omitted. The equations of Kalman estimation of u_ℓ , consisting of two stages –filtration and interpolation along the current line. The advantage of suggested procedure over optimal vector algorithm is about M multiplications less per line.

The dependencies between the normalized minimal variance $\sigma_\varepsilon^2 / \sigma_x^2$ of the estimation error and the number of element j of the last line of the 100x100 image (solid line – vector optimal filter; dashed line – quasioptimal scalar filter) is shown on Figure 1. The Figure 2. illustrates the correspondence of between the $\sigma_\varepsilon^2 / \sigma_x^2$ and the model parameter, for the middle element of the last line. The graphics are adduced for three signal-to-noise ratios.

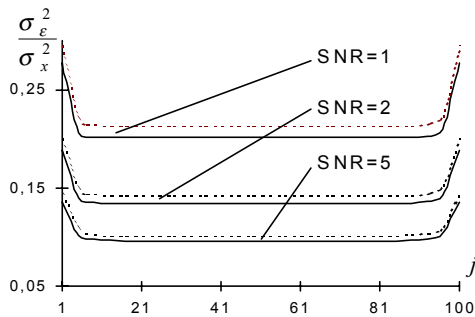


Figure 1.

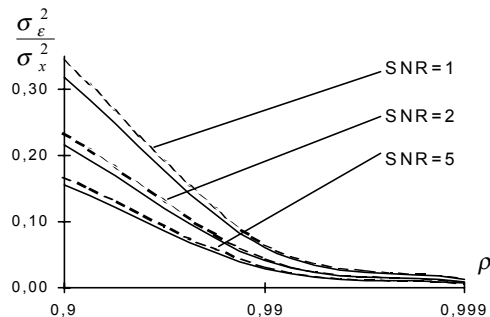


Figure 2.

References

1. K. K. Vasil'ev Statistical Analysis of Multidimensional Images // Pattern Recognition And Image Analysis, Vol. 9., No. 4, 1999, pp. 732-748.
2. K. K. Vasil'ev, O. V. Popov Autoregression Models of Random Fields with Multiple Roots // Pattern Recognition and Image Analysis, Vol. 9, No. 2, 1999, pp. 327-328.