

Ульяновский государственный технический университет  
432700, Ульяновск, ул. Северный венец, 32, кафедра САПР

Рассмотрим задачу обработки сигналов, принимаемых плоской ФАР, состоящей из  $N + 1$  изотропного приемного элемента (рис.1) с номерами  $v = 0, 1, \dots, N$ . При этом узкополосный зондирующий сигнал представим в виде последовательности импульсов:

$$S_i(t - t_i) = \sqrt{2} \operatorname{Re}(\tilde{S}_i(t - t_i) e^{i(\omega_c(t - t_i) + \varphi_{Hi})}), \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (1)$$

где  $\tilde{S}_i(t)$  – комплексная огибающая сигнала [1];  $\omega_c$  – несущая частота;  $\varphi_i$  – начальная фаза  $i$ -го импульса последовательности;  $t_1, t_2, \dots, t_k$  – моменты зондирования;  $t_i = t_1 + (i - 1)T_n$  при зондировании с периодом  $T_n$ ;  $i = \sqrt{-1}$ .

Заметим, что модель (1) описывает весьма широкий класс реальных узкополосных зондирующих сигналов, например, сигналы с внутриимпульсной фазовой или частотной модуляцией (манипуляцией). При этом модуль  $|\tilde{S}_i(t)|$  определяется законом амплитудной модуляции сигнала, а  $\operatorname{Arg}\tilde{S}_i(t)$  зависит от изменения фазы или частоты зондирующего импульса.

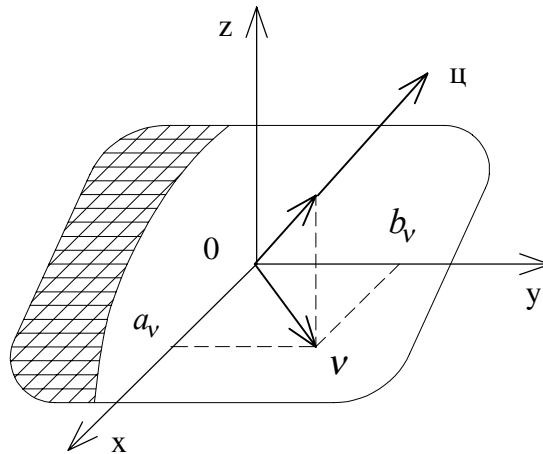


Рис.1 Геометрические соотношения для нулевого и  $V$ -го элементов плоской антенной решетки.

При наличии приближенно плоской волны от маневрирующей точечной цели с угловыми координатами  $\bar{u}_i = (u_{xi}, u_{yi})^T$  (направляющими косинусами) сигнал на выходе  $v$ -го элемента (рис.1) может быть представлен следующей моделью комплексных наблюдений:

$$\tilde{z}_{iv}(t) = (\tilde{\Psi}_{iv}(t) + \tilde{\mu}_{iv}(t)) \cdot e^{i(\varphi_{Hi} + \varphi_{iv}(\bar{u}_i))} \tilde{S}_i(t - t_i - \tau_i - \tau_{giv}) + \tilde{\theta}_{iv}(t), \quad i = 1, 2, \dots, k; \quad v = 0, 1, \dots, N, \quad (2)$$

где  $\tilde{\Psi}_{iv}(t) = \Psi_{eiv}(t) + i\Psi_{siv}(t)$  – комплексная случайная функция с нулевым средним, описывающая процесс отражения от цели;  $\tilde{\mu}_{iv}$  – математическое ожидание случайного процесса отражения;  $\tau_i$  – задержка сигнала, определяемая дальностью от цели до нулевого элемента ФАР в момент излучения  $i$ -го зондирующего импульса;  $\tau_{giv}$  – дополнительная задержка, вызванная различным пространственным расположением нулевого и  $V$ -го элементов;  $\tilde{\theta}_{iv}$  – комплексный белый шум.

Особую роль в модели (2) играет закон изменения фазы по апертуре антенны, определяемый проекцией вектора  $OV$  на направление к цели (рис.1):

$$\varphi_{iv}(\bar{u}_i) = 2\pi(a_v \vartheta_{xi} + b_v \vartheta_{yi}), \quad (3)$$

где  $\vartheta_{xi} = u_{xi} / \lambda$ ;  $\vartheta_{yi} = u_{yi} / \lambda$ ;  $\lambda$  – длина волны РЛС;  $a_v$  и  $b_v$ ,  $v = 0, 1, \dots, N$  – декартовы координаты  $v$ -го элемента ФАР в плоскости  $OXY$  (рис.1). Следует отметить, что комплексный процесс отражения  $\tilde{\Psi}_{iv} + \tilde{\mu}_{iv}$  позволяет учесть как амплитудные флюктуации импульсов, так и возможное доплеровское смещение частоты  $\omega_D(t)$  и фазы  $\varphi_{\Psi_{iv}}$  отраженного сигнала, поскольку

$$\tilde{\Psi}_{iv}(t) + \tilde{\mu}_{iv}(t) = |\tilde{\Psi}_{iv}(t) + \tilde{\mu}_{iv}(t)| \cdot \exp \left( i \left( \int_{t_0}^t \omega_D(t) dt + \Phi_{\Psi_{iv}}(t) \right) \right).$$

Комплексные наблюдения (2), получаемые со всех элементов ФАР, удобно представить в векторной форме:

$$\tilde{z}_i = (\tilde{\Psi}_i + \tilde{\mu}_i) \cdot \tilde{\Phi}_i(\bar{u}_i) \cdot \tilde{S}_i + \tilde{\Theta}_i, \quad (4)$$

где  $\tilde{\Psi}_i(t) = \text{diag}$   $\tilde{\Psi}_i(t), \tilde{\mu}_i = \text{diag} \tilde{\mu}_i(t)$  – диагональные матрицы, элементами главных диагоналей которых служат компоненты векторов  $\tilde{\Psi}_i(t) = (\tilde{\Psi}_{i0}(t), \dots, \tilde{\Psi}_{iN}(t))^T, \tilde{\mu}_i(t) = (\tilde{\mu}_{i0}(t), \dots, \tilde{\mu}_{iN}(t))^T$ ; T – знак транспонирования; диагональная матрица  $\tilde{\Phi}_i(\bar{u}_i) = e^{i\Phi_{Ni}} \text{diag}(e^{i\Phi_{i0}}, e^{i\Phi_{i1}}, \dots, e^{i\Phi_{iN}})$  и векторы  $\tilde{S}_i(t)$  и  $\tilde{\Theta}_i(t)$  составлены аналогичным образом из компонент модели наблюдений (2).

Заметим, что оптимальной для широкого класса сигналов и помех является процедура обработки, основанная на вычислении оценочно-корреляционного интеграла [1,2]:

$$\int_{t_0}^t \hat{h}(\tau) N_{\Theta}^{-1}(\tau) \tilde{z}(\tau) d\tau, \quad (5)$$

где  $\hat{h}(\tau)$  – оценка ожидаемого сигнала, сделанная на основе наблюдений  $\tilde{z}(\tau), \tau \in (t_0, t)$ ;  $\tilde{h}^+(\tau) = (\tilde{h}^*(\tau))^T$ ; \* – знак комплексно-сопряженной величины.

Обычно рассматривают два способа вычисления статистики (5), связанные с порядком следования пространственной и временной обработки [1]. Первый способ предполагает вначале вычисление произведения  $\tilde{\Phi}_i^+ \tilde{z}_i$ , т.е. пространственную (апертурную) обработку. После такой обработки дальнейшие операции осуществляются над скалярным временным сигналом. Технически умножение  $\tilde{\Phi}_i^+ \tilde{z}_i$  обычно реализуется с помощью фазовращателей, управляемых ЭВМ в зависимости от углового положения цели. В многоканальных по угловым координатам РЛС необходимо одновременно осуществлять умножение на различные множители  $\tilde{\Phi}_{ij_1 j_2}, j_1 \in \overline{1, M_\alpha}; j_2 \in \overline{1, M_\beta}$ , количество которых определяется произведением чисел  $M_\alpha$  и  $M_\beta$  каналов по каждой из угловых координат. На практике такие вычисления могут быть реализованы, например, с помощью акустооптических методов. При этом в каждом (j–м) временном сечении после i–го зондирования наблюдается поле  $\{z_{ij_1 j_2 j}\}$  модулей чисел

$$\tilde{z}_{ij_1 j_2 j} = \int_{t_i + t_{ij} - \tau_c}^{t_i + t_{ij} + \tau_c} \tilde{S}_i^*(\tau - t_i - t_{ij}) \tilde{\Phi}_{ij_1 j_2}^+ \tilde{z}_i(\tau) d\tau. \quad (6)$$

Модель наблюдений можно представить следующим образом. При наличии полезного сигнала в элементе разрешения

$$\tilde{z}_{ij_1 j_2 j} = (\tilde{\Psi}_i + \tilde{\mu}_i) \tilde{h}(\bar{x}_i, i) + \tilde{\Theta}_{ij_1 j_2 j}; \quad (7)$$

при отсутствии полезного сигнала

$$\tilde{z}_{ij_1 j_2 j} = \tilde{\Theta}_{ij_1 j_2 j}, \quad (8)$$

где  $\tilde{h}(\bar{x}_i, i) = \tilde{\Phi}_{ij_1 j_2}^+ \tilde{\Phi}_i(\bar{u}_i) \int_{-\tau_c}^{\tau_c} \tilde{S}_i^*(\tau) \tilde{S}_i(\tau - \tau_i + t_{ij}) d\tau$ ;  $\bar{x}_i = (\bar{u}_i^T \tau_i)^T$  – вектор координат цели,

соответствующий i–му зондирующему импульсу.

Помехи  $\tilde{\Theta}_{ij_1 j_2 j}$  в большинстве случаев могут быть представлены в виде случайного поля независимых гауссовских случайных величин с изменяющейся дисперсией, заданного на трехмерной сетке индексов  $j_1, j_2, j$ . Вместе с тем случайные величины  $\tilde{\Theta}_{ij_1 j_2 j}$  и  $\tilde{\Theta}_{e j_1 j_2 j}$ , отличающиеся лишь индексом  $i \neq e$  часто коррелированы, например, при наличии отражений от морской или земной поверхности для малого интервала времени  $t_i - t_e$  между зондирующими импульсами.

Для описания нелинейных динамических систем с дискретным временем будем использовать следующее стохастическое разностное уравнение[3]:

$$\bar{x}_i = \Phi(\bar{x}_{i-1}, i) + \vartheta(\bar{x}_{i-1}, i-1) \bar{\xi}_i, \quad i = 1, 2, \dots, k; \quad (9)$$

где  $\bar{x}_i$  – вектор состояния системы в момент времени  $t_i$ ;  $\varphi(\bar{x}_{i-1}, i)$  –  $m$ -мерная векторная функция;  $\vartheta(\bar{x}_{i-1}, i-1)$  –  $m \times m_1$  матричная функция;  $\{\xi_i\}$  –  $m_1$ -мерная последовательность гауссовских случайных величин с нулевыми средними и ковариационными матрицами  $M\{\xi_i \cdot \xi_e^T\} = V_{\xi_i} \delta_k(i-e)$ ;  $\delta_k(\bullet)$  – символ Кронекера.

Во многих случаях помехи в РЛС могут быть заданы с помощью авторегрессионного уравнения порядка  $m$  [5]:

$$x_i = \sum_{e=1}^m \rho_e x_{i-e} + \xi_i,$$

где  $\{\rho_e\}$  – постоянные коэффициенты. Такое уравнение определяет  $m$ -связную марковскую последовательность. Наконец, следует заметить, что в настоящее время разработаны регулярные методы построения нелинейных уравнений (9) для имитации коррелированных негауссовских помех [6].

Приведенные результаты показывают, что предложенные математические модели позволяют представить весьма широкий класс сигналов и помех в РЛС с ФАР. Изменением параметров уравнений состояния можно осуществить моделирование гладких траекторий с большой связностью, а также учесть действительные сведения о характере движения целей, подлежащих обнаружению (распознаванию) и сопровождению. При этом выбор параметров моделей может выполняться на основе физических представлений о характере движения целей с помощью анализа экспериментального материала, например, на основе оценок Юла–Уокера [5], или с помощью методов адаптации и оценивания непосредственно в процессе обнаружения – измерения координат цели.

#### Литература

1. Фалькович С.Е., Хомяков Э.Н. Статистическая теория измерительных радиосистем. М.: Радио и связь, 1981.–288 с.
2. Сосулин Ю.Г. Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов.–М.: Сов. радио, 1978.–320 с.
3. Васильев К.К. Байесовское различение и оценивание случайных последовательностей.– Радиотехника и электроника, 1985, т.30, N 3, с. 476–485.
4. Васильев К.К., Крашенинников В.Р. Методы фильтрации многомерных случайных полей.–Саратов: Изд-во СГУ, 1990.– 128 с.
5. Бокс Д., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление.– М.: Мир, 1974, т.1.– 406с.
6. Васильев К.К., Яровиков О.С. Методы имитации многомерных случайных сигналов.– Тез. докл. НТК с междунар. участием "Проблемы промышленных электромеханических систем и перспективы их развития:– Ульяновск: УЛГТУ, 1996, с. 87–89.



## MODELS OF SIGNALS AND NOISE IN PAR

Vasiliev K.K., Yarovikov O.S.

Uljanovsk State Technical University  
432700, Uljanovsk, Severnyi Venetz street, 32, CAD/CAM Department

Let us consider the problem of processing of the signals received by means of flat PAA consisting of  $N + 1$  isotropic receiving elements with numbers  $v = 0, 1, \dots, N$ . In this case a narrow-band probing signal can be presented as a sequence of pulses:

$$S_i(t - t_i) = \sqrt{2} \operatorname{Re}(\tilde{S}_i(t - t_i) e^{i(\omega_c(t - t_i) + \varphi_{Hi})}), \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (1)$$

where  $\tilde{S}_i(t)$  – complex envelope [1];  $\omega_c$  – carrier frequency;  $\varphi_i$  – initial phase of  $i$ -th pulse of the sequence;  $t_1, t_2, \dots, t_k$  – instants of probing;  $t_i = t_1 + (i - 1)T_n$  at probing with period  $T_n$ ;  $i = \sqrt{-1}$ .

It should be noted that the model (1) describes a quite broad class of real narrow-band probing signals, for instance, signals with phase or chirp modulation(keying). In this case the absolute value  $|\tilde{S}_i(t)|$  is defined by the law of signal amplitude modulation, but  $\operatorname{Arg}\tilde{S}_i(t)$  depends on variation of probing pulse phase or frequency.

If given an approximately flat wave from a manoeuvring point target with angular coordinates  $\bar{u}_i = (u_{xi}, u_{yi})^T$  (directional cosines) the signal at the output of  $V$ -th element can be presented in the form of the next model of complex observations:

$$\begin{aligned} \tilde{z}_{i\nu}(t) = & (\tilde{\Psi}_{i\nu}(t) + \tilde{\mu}_{i\nu}(t)) \cdot e^{i(\varphi_{Hi} + \varphi_{i\nu}(\bar{u}_i))} \tilde{S}_i(t - t_i - \\ & - \tau_i - \tau_{g_{i\nu}}) + \tilde{\theta}_{i\nu}(t), \quad i = 1, 2, \dots, k; \quad \nu = 0, 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (2)$$

where  $\tilde{\Psi}_{i\nu}(t) = \Psi_{e_{i\nu}}(t) + i\Psi_{s_{i\nu}}(t)$  – complex random function with zero mean value describing the process of reflection from target;  $\tilde{\mu}_{i\nu}$  – mathematical expectation of the random process of reflection;  $\tau_i$  – signal delay time defined by the distance from target to zero element of PAA at the instant of emission of  $i$ -th probing pulse;  $\tau_{g_{i\nu}}$  – extra delay time caused by various spatial positions of zero and  $\nu$ -th elements;  $\tilde{\theta}_{i\nu}$  – complex white noise.

It should be noted that the complex process of reflection  $\tilde{\Psi}_{i\nu} + \tilde{\mu}_{i\nu}$  allows to take account of both pulse amplitude fluctuations and possible Doppler shift of frequency  $\omega_D(t)$  and phase  $\varphi_{\Psi_{i\nu}}$  of reflected signal, since

$$\tilde{\Psi}_{i\nu}(t) + \tilde{\mu}_{i\nu}(t) = |\tilde{\Psi}_{i\nu}(t) + \tilde{\mu}_{i\nu}(t)| \cdot \exp\left(i\left(\int_{t_0}^t \omega_D(t) dt + \varphi_{\Psi_{i\nu}}(t)\right)\right).$$

It should be noted that for a broad class of signals and noise the procedure of processing based on estimation-correlative integral calculation is the optimal one [1,2]:

$$\int_{t_0}^t \hat{h}(\tau) N_{\theta}^{-1}(\tau) \tilde{z}(\tau) d\tau, \quad (3)$$

where  $\hat{h}(\tau)$  – the expected signal estimation made basing on the observations  $\tilde{z}(\tau)$ ,  $\tau \in (t_0, t)$ ;  $\tilde{h}^+(\tau) = (\tilde{h}^*(\tau))^T$ ; \* – the sign of complex conjugated value

For completion of the observed signals and noise mathematical models design process, it is necessary to give a probabilistic description of the components (3), (4) varying dynamics. For description of non-linear dynamic systems with sampled time, we shall use the following stochastic difference equation [3]:

$$\bar{x}_i = \varphi(\bar{x}_{i-1}, i) + \vartheta(\bar{x}_{i-1}, i-1) \bar{\xi}_i, \quad i = 1, 2, \dots, k; \quad (4)$$

where  $\bar{x}_i$  – the vector of system state at instant  $t_i$ ;  $\varphi(\bar{x}_{i-1}, i)$  –  $m$ -dimensional vector function;  $\vartheta(\bar{x}_{i-1}, i-1)$  –  $m \otimes m_1$  matrix function;  $\{\bar{\xi}_i\}$  –  $m_1$ -dimensional sequence of Gaussian random values with zero mean values and covariance matrices  $M\{\bar{\xi}_i \cdot \bar{\xi}_e^T\} = V_{\xi_i} \delta_k(i-e)$ ;  $\delta_k(\bullet)$  – Kronecker delta. At last, it should be noted that regular methods of non-linear equation design for simulation of correlated non-Gaussian noise have been derived at the present time [4–6].

The present results show that the proposed mathematical models allow to define a quite broad class of signals and noise in PAR. It is possible to accomplish smooth tracks with great linkage and also take account of real information about target motion character which are subject to detection (recognition) and tracking by varying of state equation parameters. In this case the choice of model parameters can be realized on the base of physical insight about target motion character by means of experimental material analysis, for instance, on the base of Yula-Walker estimations [5], or by means of the methods of adaptation and estimation directly during the process of detection-measuring of target coordinates.

#### References

1. Falkovic S.E., Khomyakov E.N. Statistic Theory of Measuring Radiosystems.– Moscow: Radio and Communication, 1981.
2. Sosulin Y.G. Stochastic Signal Detection and Estimation Theory. – Moscow: Soviet Radio, 1978.
3. Vasiliev K.K. Bayesian Recognition and Estimation of Random Sequences. – Radioengineering and Electronics, 1985, v.30, N 3, pp.476–485.
4. Vasiliev K.K., Krasheninikov V.R. Multidimensional Random Field Filtering Methods. – Saratov: SGU Edition, 1990.
5. Box J., Jenkins G. Analysis of Time Series. Prediction and Control. – Moscow: Mir, 1974, v.1.
6. Vasiliev K.K., Yarovikov O.S. Multidimensional Random Signal Simulation Methods. – Thesis of STC “Problems of Industrial Electromechanic Systems and Prospects of Their Evolution”. – Uljanovsk: UIGTU, 1996, pp.87–89.