ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ СИНТЕЗА ДВУМЕРНОЙ ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ В ПЕЛЕНГАТОРЕ С КОЛЬЦЕВОЙ АНТЕННОЙ РЕШЕТКОЙ

Вертоградов Г.Г., Иванов Н.М., Шевченко В.Н.

ГКБ “Связь”
пр. Соколова 96, 344010, Ростов на Дону, Россия
Email: gkbsviaz@don.sitek.net; vgg@phys.rnd.runnet.ru

Введение

Современные пеленгаторы представляют собой антенно-вычислительные комплексы для измерения пеленгов по азимуту и углу места, синтезирующие с использованием преобразования Фурье радиоизображение распределения энергии по пространству, которое в случае однолучевого распространения волн от одного источника радиоизлучения имеет смысл синтезированной диаграммы направленности (ДН) антенной решетки пеленгатора.

Эффективность таких пеленгаторов определяется как вычислительной мощностью аппаратных средств, так и вычислительной эффективностью математических методов и реализующих их алгоритмов и программ.

В настоящем докладе на основе анализа известных предложен ряд новых методов снижения вычислительной сложности алгоритмов двумерного синтеза в пеленгаторах с кольцевой решеткой и проведен их сравнительный анализ.

Метод прямого синтеза

При определении направления на источник ДН рассчитывается, как правило, в узлах равномерной сетки по азимутальному углу α при фиксированных значениях угла места β. Пусть M - число таких узлов, $\delta=2\pi/M$ - шаг по углу α, антенны расположены в плоскости $\beta=0$ и начало координат совмещено с центром решетки из N элементов. Тогда рассматриваемая задача сводится к расчету $M\cdot L$ значений двумерной комплексной ДН решетки [1]:

$$D(\alpha_m,\beta_l)=\sum_{n=0}^{N-1}U_n f_n(m\cdot\delta,\beta_l)\exp\left(2\pi ir\lambda^{-1}\cos(\beta_l)\cos(m\cdot\delta-\alpha_n)\right), \tag{1}$$

где m=0,..., M-1-текущий номер узла по углу α, $\alpha_m=m\delta$, β_l - заданные узлы сетки по углу места, L - число узлов по углу β, l=0,..., L-1- текущий номер узла по углу, U_n - комплексная амплитуда напряжения в n-ой антенне, $f_n(\alpha,\beta)$ - комплексная ДН n-го элемента, r – радиус решетки, λ - длина волны, . $\alpha_n= n\,\Delta\alpha$, $\Delta\alpha=2\pi/N$.
После вычисления $M\cdot N$ значений комплексной ДН по формуле (1) и поиска максимума в двумерном массиве квадрата модуля $|D(\alpha_m,\beta_l)|^2$ получают оценки азимута и угла места источника радиоизлучения.

Синтез комплексной ДН по формуле (1) требует выполнения $2\cdot(4\cdot N\text{-}1)\cdot M\cdot L$ операций с плавающей точкой. Вычислительную сложность алгоритма будем оценивать числом операций в расчете на одно угловое положение

$$d_0=2\cdot(4\cdot N-1) \tag{2}$$

Метод длинных сверток

С учетом симметрии кольцевой антенной решетки выражение (1) может быть преобразовано в циклическую свертку [1]. Пусть $f_n(\alpha,\beta)=f(\alpha\text{-}n\Delta\alpha,\beta)$, и $f(\alpha,\beta)$ периодична по α с периодом 2π, а число узлов сетки по углу α кратно числу элементов решетки, т.е. $M=\mu N$, где μ - целое число. Тогда, вводя последовательность $V(m)$ длины M соотношением $V(m)=U_n$ при $m=\mu n$ и $V(m)=0$ при $m\neq\mu n$, выражение (1) можно представить в виде циклической свертки

$$D(\alpha_m,\beta_l)=\sum_{m'=0}^{M-1}V(m')K_l(m-m'), \tag{3}$$

с ядром $K_l(m)=f_n(m\cdot\delta,\beta_l)\exp\left(2\pi ir\lambda^{-1}\cos(\beta_l)\cos(m\cdot\delta)\right)$.

Если $\tilde{V}(m)$ и $\tilde{K}_l(m)$ – дискретные преобразования Фурье (ДПФ) длины M последовательностей $V(m)$ и $K_l(m)$ соответственно, то выражение (3) может быть преобразовано к обратному ДПФ длины M вида:

$$D(\alpha_m,\beta_l)=\frac{1}{M}\sum_{m'=0}^{M-1}\tilde{V}(m')\tilde{K}_l(m')\exp(2\pi imm'/M). \tag{4}$$

Выражения (3) и (4) полностью эквивалентны, но второе может оказаться более выгодным в вычислительном отношении при использовании алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ) длины M.

При использовании БПФ по основанию 2 общее число операций в алгоритме (4) составит $(L+1)\cdot 5\cdot M\cdot\log_2 M+6\cdot L\cdot M$. Разделив это выражение на число угловых положений $L\cdot M$, получим вычислительную сложность алгоритма по методу длинных сверток:

$$d_1 = 5(1+1/L)\log_2 M + 6 \tag{5}$$

Число элементов решетки N_o, при котором вычислительные сложности сравниваемых алгоритмов одинаковы, равно $5(1+1/L)\log_2 (M)/8+1$. При $N<N_o$ более эффективен алгоритм прямого вычисления ДН, а при $N>N_o$, наоборот, алгоритм расчета ДН с использованием БПФ. Полагая для примера $M=2^9=512$, получим, что $N_o=13$ при $L=1$ и $N_o \approx 7$ при $L>>1$. Таким образом, алгоритм (4) дает существенный выигрыш в объеме вычислений по сравнению с алгоритмом прямого вычисления ДН (1) только в пеленгаторах с многоэлементными антенными решетками.

Модифицированный метод длинных сверток

Дополнительный вычислительный выигрыш можно получить учитывая, что M кратно N. Тогда, очевидно, последовательность $V(m)$ есть μ-кратное повторение ДПФ последовательность U_n длины N. В этом случае одно "длинное" ДПФ последовательности $V(m)$ можно заменить "коротким" ДПФ последовательности U_n. Это приводит к следующей оценке вычислительной сложности:

$$d_1' = 5\cdot\left(\log_2 M + \log_2 (N)/\mu L\right) + 6 \tag{6}$$

Сравнение соотношений (5) и (6) позволяет заключить, что наибольший - почти двукратный - выигрыш достигается при $L=1$, т.е. при синтезе одномерной ДН. При синтезе двумерной ДН, когда $L>>1$, эта разница незначительна.

Метод коротких сверток

Существенное снижение вычислительной сложности алгоритма синтеза двумерной ДН достигается переходом в соотношении (4) от длинных сверток к коротким. Положим, что $\alpha_m = q\cdot\delta + n\cdot\Delta\alpha,\quad q=0,...,\mu-1,\quad n=0,...,N-1,$ причем $q=m(\mathrm{mod}\mu)$, $n=[m/\mu]$, $\mu=M/N$, а квадратные скобки означают взятие целой части. Тогда, заменяя индекс m парой индексов q и n, представим выражение (1) в виде:

$$D(\alpha_{qn},\beta_l) = \sum_{n'=0}^{N-1} U_{n'} K_l(q,n-n'), \tag{7}$$

где ядро $K_l(q,n) = f_n(q\delta + n\Delta\Delta\alpha,_l)\exp\left(2\pi i r\lambda^{-1}\cos(\beta_l)\cos(q\delta + n\Delta\Delta)\right)$.

Выражение (7) подобно (3), но ядро $K_l(q,n)$ зависит от пары индексов q и n, причем оно периодично по n с периодом N, а сумма содержит не M, а N слагаемых. Следовательно, при фиксированных значениях l и q выражение (7) представляет собой циклическую свертку длины N, которая может быть вычислена с помощью ДПФ длины N по формуле:

$$D(\alpha_{qn},\beta_l) = \frac{1}{N}\sum_{n'=0}^{N-1} \tilde{U}_{n'}\,\tilde{K}_l(q,n')\exp(2\pi\, i nn'/N), \tag{8}$$

где $\tilde{U}_n$ – ДПФ последовательности U_n, а $\tilde{K}_l(q,n)$- ДПФ последовательности $K_l(q,n)$ по индексу n. Вычислительная сложность алгоритма (8) в расчете на одно угловое положение равна

$$d_2 = (1+1/\mu L)\chi(N) + 6\,, \tag{9}$$

где $\chi(N)$ – число операций алгоритма БПФ длины N на одну точку.

Сравнительная эффективность методов

Введем величины, характеризующие уменьшение числа операций в алгоритмах (4) и (8) по сравнению с алгоритмом (1): $\eta_1(N) = d_0/d_1$, $\eta_2(N) = d_0/d_2$. Значения $\eta_1(N)$, при $M=2^9=512$, и $\eta_2(N)$, полученных для БПФ Винограда длины N [2], с учетом (2), (5) и (9) приведены в таблице.

N	7	9	12	16	24
$\eta_1(N)$	1,06	1,73	1,84	2,47	3,76
$\eta_2(N)$	2,91	3,89	6,13	7,64	10,56

Из таблицы видно, что $\eta_1(N)$ и $\eta_2(N)$ растут с ростом N почти линейно, однако $\eta_2(N)$ в среднем почти в три раза больше, чем $\eta_1(N)$. Таким образом, предложенный алгоритм синтеза ДН с короткими свертками (8) значительно превосходит по вычислительной эффективности как алгоритм прямого синтеза (1), так и традиционно используемый алгоритм с длинными свертками (4). Кроме того, метод коротких сверток (8) дает возможность распараллеливания вычислений, которое приводит к дополнительному повышению эффективности в M/N раз [3].

Метод аппроксимации диаграммы направленности

Метод аппроксимации ДН использует принцип сокращения избыточности вычислений в зависимости от требуемой точности пеленгования и может быть использован для дополнительного повышения вычислительной эффективности любого из методов синтеза.

Хорошим приближением к амплитудной ДН вблизи ее максимума является квадратичная функция, и во многих случаях число узлов сетки по азимуту может быть уменьшено без ущерба для точности пеленгования. Если m_0 - значение индекса m, при котором достигается абсолютный максимум амплитудной ДН в соответствующей плоскости, то значение азимута можно оценить по аппроксимационной формуле второго порядка:

$$\alpha = \left\{ m_0 - \frac{1}{2}\left(\left| D\left(\alpha_{m_0+1}\right)\right|^2 - \left| D\left(\alpha_{m_0-1}\right)\right|^2 \right) \cdot \left(\left| D\left(\alpha_{m_0+1}\right)\right|^2 + \left| D\left(\alpha_{m_0-1}\right)\right|^2 - 2\left| D\left(\alpha_{m_0}\right)\right|^2 \right)^{-1} \right\} \delta , \qquad (10)$$

где зависимость от β для простоты не показана. Оценка погрешности для аппроксимационной формулы (10) имеет следующий вид:

$$\zeta \cong \delta^3 \left[1 + 9 (2\pi r/\lambda)^2 / 4 \right] / 4 \qquad (11)$$

Правая часть этого выражения зависит только от радиуса решетки, то есть фактически от ширины главного лепестка ДН, но не зависит от числа ее элементов.

Полагая в (11) $\zeta = \zeta_0$, где ζ_0 – заданная точность пеленгования, найдем значение шага и числа узлов по азимуту:

$$\delta = \left[4\zeta_0 / \left(1 + 9(2\pi r/\lambda)^2/4 \right) \right]^{1/3}, \quad M = 2\pi/\delta = 2\pi \left[\left(1 + 9(2\pi r/\lambda)^2/4 \right) / 4\zeta_0 \right]^{1/3}.$$

Относительная эффективность $\eta(r)$ метода аппроксимации определяется выражением $\eta(r) = 2\pi/\zeta_0 M = \left[2\zeta_0^2 \left(1 + 9(2\pi r/\lambda)^2/4 \right) \right]^{-1/3}$. Использование формулы (10) при $r/\lambda = (1...8)$ позволяет сократить число узлов по азимуту и, следовательно, вычислительную сложность алгоритма пеленгования в $\eta(r) = (3...12)$ раз.

Выводы

1. В дополнение к традиционно используемым в пеленгаторах при синтезе одномерных и двумерных ДН прямому методу и методу длинных сверток на основе БПФ предложены модифицированный метод длинных сверток и метод коротких сверток.

2. Показано, что наиболее эффективный алгоритм синтеза ДН с короткими свертками значительно превосходит по вычислительной эффективности как алгоритм прямого синтеза ДН, так и традиционно используемый алгоритм с длинными свертками. Для 24-х элементной антенной решетки метод коротких сверток дает по сравнению с методом прямого синтеза выигрыш в 10,56 раз, а по сравнению с методом длинных сверток – в 3,76 раз. Свойство распараллеливания вычислений дополнительно повышает в *M/N* раз эффективность алгоритма коротких сверток, который может стать основой архитектуры интегральной схемы параллельной обработки сигналов.

3. Метод аппроксимации ДН использует принцип сокращения избыточности вычислений в зависимости от требуемой точности пеленгования и может быть использован для дополнительного повышения вычислительной эффективности любого из методов синтеза. Так, если требуемая точность пеленгования равна 0,1°, то аппроксимация ДН позволяет сократить число узлов по азимуту, и, следовательно, уменьшить вычислительную сложность алгоритма пеленгования в 3-12 раз.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахрах Л.Д., Курочкин А.П. Голография в микроволновой технике. М.: Сов. радио, 1979.

2. Блейхут Р.. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1989.

3. Шевченко В.Н., Вертоградов Г.Г., Иванов Н.М. Способ определения двумерного пеленга и частоты источников радиоизлучения. RU Патент, 2150122, 06.04.1999.

COMPUTATIONAL EFFICIENCY OF TWO-DIMENSIONAL PATTERN SYNTHESIS FOR A DIRECTION FINDER WITH RING ANTENNA ARRAY

Chevtchenko V.N., Ivanov N.M., Vertogradov G.G.

GKB "Svyaz", Sokolov Street 96, 344010, Rostov-on-Don, Russia
Email: gkbsviaz@don.sitek.net; vgg@phys.rsu.ru

Efficiency of contemporary direction finders (DF) is defined by hardware facilities and by computational efficiency of mathematical methods with concerned algorithms and programs for realization. On base of analysis of the known methods the authors suggest some new methods for reducing the complexity of algorithms for two–dimensional (2-D) synthesis of DF with ring-type arrays and further accomplish the comparative evaluation of suggested methods.

During determination of source direction antenna pattern is computed at nodes of uniform grid on azimuth angle α for the fixed values of elevation angle β. Assume that M is a number of nodes and $\delta=2\pi/M$ is a step of α angle and that antennas are located at the plane $\beta=0$ and an origin of coordinates combines with N-element array center. Then the problem is reduced to computation of $M\cdot L$ values of 2-D complex pattern:

$$\mathrm{D}(\alpha_m, \beta_l) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{U}_n f_n(m\cdot\delta, \beta_l)\exp\left(2\pi\, ir\lambda^{-1}\cos(\beta_l)\cos(m\cdot\delta-\alpha_n)\right), \tag{1}$$

where $m=0...M-1$ is current number of nodal points on α angle, $\alpha_m=m\delta$, β_l are assigned nodal points on β angle; U_n is a complex voltage amplitude at antenna "n"; r is a radius of array; λ is a wavelength, $\alpha_n=n\Delta\alpha$, $\Delta\alpha=2\pi/N$. After accomplishment of $M\cdot N$ values computation for complex pattern in accordance with (1) and after searching a maximum of squared module $|D(\alpha_m, \beta_l)|^2$ the estimates of azimuth and elevation angles of emitting source are obtained. The synthesis of complex pattern according with formula (1) demands the accomplishment of 2 $(4N-1)\, M\cdot L$ operations with floating point. The computational complexity can be evaluated by number of operations per one angle position:

$$d_0=2\,(4N-1). \tag{2}$$

Taking into account the antenna array symmetry, the expression (1) can be transformed to cyclical convolution. Let that $f_n(\alpha,\beta)=f(\alpha-n\Delta\alpha,\beta)$, and $f(\alpha,\beta)$ is periodical function of α with period of 2π and that number of grid nodes on α angle is a multiple of number of array elements. Hence, introducing a sequence $V(m)$ of length M with aid of relation $V(m)=U_n$, where $m=\mu n$ and $V(m)=0$ if $m\neq\mu n$, expression (1) can be presented in the form of cyclical convolution

$$D(\alpha_m,\beta_l) = \sum_{m'=0}^{M-1} V(m')K_l(m-m'), \tag{3}$$

where a kernel $K_l(m) = f_n(m\cdot\delta,\beta_l)\exp\left(2\pi\, ir\lambda^{-1}\cos(\beta_l)\cos(m\cdot\delta)\right)$. If $\tilde{V}(m)$ and $\tilde{K}_l(m)$ are discrete Fourier transforms (DFT) of length M of sequences $V(m)$ and $K_l(m)$ respectively, then (3) can be reformed into inverted DFT of length M, which is given by the expression:

$$D(\alpha_m,\beta_l) = \frac{1}{M}\sum_{m'=0}^{M-1}\tilde{V}(m')\tilde{K}_l(m')\exp(2\pi\, imm'/M). \tag{4}$$

The expressions (3) and (4) are completely equivalent although the second one may turn out more preferable from standpoint of computations when algorithm of fast Fourier transform (FFT) with length M is used. In case when FFT with base of 2 is used the total number of operations in algorithm (4) will be equal to $(L+1)\cdot 5\cdot M\cdot \log_2 M + 6\cdot L\cdot M$. Dividing this expression by the number of angle positions $L\cdot M$, we obtain the computational complexity of algorithm resulted due to application of long convolutions method:

$$d_1 = 5(1+1/L)\log_2 M + 6. \tag{5}$$

The number N_0 of array elements, at which the computational complexities of compared algorithms are the same, is equal to $5(1+1/L)\log_2(M)/8+1$. If $N<N_0$ the better efficiency is provided by algorithm of direct pattern computation and vice versa if $N>N_0$ the better results are achieved with application of algorithm of computation with use of FFT. Assuming for example $M=2^9=512$ we obtain that $N_0=13$ when $L=1$ and $N_0=7$ when $L>>1$.

The additional reduction of computations can be obtained if we take into account that M is a multiple of N. Then obviously the sequence $V(m)$ is the μ-multiple recurrence of DFT of sequence U_n with length N. In this case one "long" DFT of sequence $V(m)$ can be replaced by "short" DFT of sequence U_n. This leads to following estimate of computational complexity:

$$d_1' = 5\cdot\left(\log_2 M + \log_2(N)/\mu L\right) + 6. \tag{6}$$

The comparison of relations (5) and (6) allows to conclude that highest gain (nearly double) is realized when $L=1$. In the case of 2-D pattern synthesis when $L>>1$ this difference is insignificant.

The essential reduction of computational complexity of 2-D pattern synthesis algorithm is achieved by transition in relation (4) from long convolutions to short ones. Suppose that

$\alpha_m = q \cdot \delta + n \cdot \Delta\alpha, \quad q = 0,...,\mu - 1, \quad n = 0,...,N-1,$, a and besides $q=m(\mathrm{mod}\mu)$, $n=[m/\mu]$, $\mu=M/N$ and square brackets mean the taking of an integer part. Then replacing index m by pair of indexes q and n we represent relation (1) in the form

$$D(\alpha_{qn},\beta_l) = \sum_{n'=0}^{N-1} U_{n'} K_l(q,n-n'), \tag{7}$$

where a kernel $\mathrm{K}_l(q,n) = f_n(q\delta + n\Delta\alpha, \beta_l)\exp\left(2\pi\, ir\lambda^{-1}\cos(\beta_l)\cos(q\delta + n\Delta\alpha)\right)$.

The expression (7) is similar to (3), however the kernel $K_l(q,n)$ depends on a pair of indexes q, n and it is a periodical function of n with a period of N and the sum includes N addends. Therefore, when values of l and q are fixed, expression (7) represents the cyclical convolution of length N that can be computed with aid of DFT of length N according to:

$$D(\alpha_{qn},\beta_l) = \frac{1}{N}\sum_{n'=0}^{N-1} \tilde{U}_{n'}\, \tilde{K}_l(q,n')\exp(2\pi\, inn'/N), \tag{8}$$

where $\tilde{U}_n$ is DFT of sequence U_n and $\tilde{K}_l(q,n)$ is DFT of sequence $K_l(q,n)$ of index n. The computational complexity of algorithm (8) per angle position is

$$d_2 = (1 + 1/\mu L)\chi(N) + 6, \tag{9}$$

where $\chi(N)$ is a number of operations of FFT algorithm of length N per one point.

Let's introduce the factors to characterize the rates of reduction of quantities of operations in (4) and (8) in comparison with algorithm (1): $\eta_1(N) = d_0/d_1$ and $\eta_2(N) = d_0/d_2$. The values of $\eta_1(N)$ at $M=2^9=512$ and $\eta_2(N)$ obtained for Winograd FFT of length N [1] with keeping in view relations (2), (5) and (9) are given in the following table.

N	7	9	12	16	24
η_1(N)	1,06	1,73	1,84	2,47	3,76
η_2(N)	2,91	3,89	6,13	7,64	10,56

It is seen that the value of $\eta_2(N)$ on average is almost 3 times larger than $\eta_1(N)$. Thus the suggested algorithm of pattern synthesis with short convolution (8) considerably exceeds the computational efficiencies of both direct synthesis algorithm (1) and traditionally used algorithm with long convolution (4). Moreover the method of short convolutions possesses the possibility for splitting of computation with providing an additional increasing of efficiency by *M/N* times [2].

Conclusions

1. In the article the modified method of long convolutions and method of short convolution on base FFT are suggested in addition to methods of direct synthesis and long convolutions traditionally used in DF for synthesis of one - and two - dimensional antenna patterns.

2. It is demonstrated that most effective algorithm with short convolutions for pattern synthesis considerably exceeds computational efficiencies of both the direct synthesis method and algorithm with long convolutions. The property of computation splitting additionally increases the computational efficiency of algorithm with short convolutions by *M/N* times; so this algorithm may become an architecture base of integral circuit for parallel signal processing.

REFERENCES

1. Blahut R.E. Fast Algorithms for Digital Signal Processing, Addison-Wesley Pub.Co, 1985.

3. Chevtchenko V.N., Ivanov N.M., Vertogradov G.G. The method of 2–D bearing and frequency determination of radio emission sources. RU Patent, 2150122, 06.04.1999.