ЦИФРОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФРАКТАЛЬНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Арутюнов П.А.

Московский государственный институт электроники и математики
109028,Россия, Москва, Б.Трехсвятительский пер. 3/12
Тел.: (095) 235 97 27, Факс: (095) 916 28 07
E-mail: root@onti.miem.msk.su

Принципы обработки цифровых сигналов распространены на существующие методы фрактаьных измерений, представленных размерностями Хаусдорфа-Безиковича (рХБ) и Мандельброта. Фрактальная размерность, в виде рационального числа G_1/G_2 или же в виде отношения остатков G_{R1}/G_{R2} двух уравнений измерения, представлена эквивалентной цифровой моделью отношения двух частот дискретизации F_1/F_2 в некоторой линейной цифровой системе. Показано, что такая система описывается обобщенной сверткой, которая, в свою очередь, представлена каскадным соединением интерполяторов и дециматоров с целочисленными коэффициентами преобразования. Для безошибочной обработки фрактальной размерности необходимо перевести рациональное число в целое число и использовать дроби Фарея в одномодульной и многомодульной арифметике, которые, в свою очередь, могут быть использованы в качестве реперных точек метрологических шкал .

1. Введение

В настоящее время предложено много методов фрактального анализа в различных областях науки и техники. До фактического начала активной деятельности в этой области в математике существовало понятие размерности Хаусдорфа-Безиковича (рХБ). Эта размерность по самому характеру связана не с топологией, а с *метрикой, т.е. со способом построения рассматриваемого множества*. Она может принимать любые значения, что давало некоторый повод говорить о пространствах дробной размерности.

Действительно, существуют объекты с размерностью промежуточной между точкой и линией, линией и поверхностью или даже поверхностью и объемом. Такие объекты не являются топологическими многообразиями и по предложению французского математика Бенуя Мандельброта стали называть фракталами. Наиболее известными примерами служили: Кантровское множество, броуновская кривая на плоскости, ковер Серпинского, кривая Коха и др., которые являются промежуточными множествами, т.е. не являются счетными множествами. Эти множества принято называть фракталами; у этих множеств фрактальная размерность превышает их топологическую размерность.

В самом определении фрактальных размерностей всегда лежит логарифмическое отношение, выражаемое рациональным числом. Рассмотрим, например, множество точек на плоскости которое мы хотим покрыть квадратами с ребром равным ε. Размерность рХБ определяется как предел отношения

$$D_F = \lim_{l\to o}\{\ln N_l/\ln(1/\varepsilon)\} = G_1/G_2 \tag{1}$$

Эта размерность не является метрической и выражается безразмерным дробным рациональным числом. Например, в материаловедении, суждение о качестве поверхности делаетя на основании того, насколько близко значение D_F к числу 2; чем ближе оно к 2, тем лучше поверхность. Таким образом, величина D_F отражает и корреляционные свойства поверхности (сходство ординат), т.е. ее гладкость, и не зависит от масштаба высот шероховатостей. Современные методы цифровой обработки сигналов позволяют дополнить фрактальные методы спектральным анализом, алгоритмами безошибочных вычислений, метрологическими шкалами и т.п.

2. Цифровая модель фрактальной размерности

Сопоставим рациональному числу G_1/G_2 две частоты дискретизации сигналов: на входе x(n) и выходе y(m) цифровой системы, т.е. положим, что

$$G_1/G_2 = F`/F = T/T \tag{2}$$

где F` и F частоты дискретизации цифровой, линеной системы, а T и T` -интервалы дискретизации, соответственно, на входе и выходе. Равенство (2) означает, что *фрактальная размерность интепретируется как преобразование частоты дискретизации в некоторой цифровой системе*. В такой системе выходная функция $g_m(m)$ представляет собой отклик системы в момент времени m на входной отсчет, соответствующий моменту времени $\lfloor mG_1/G_2\rfloor$ - n, где $\lfloor u\rfloor$ -целое число, меньшее или равное u. Каждый выходной отсчет y(m) можно записать в виде обобщенной свертки как линейная композиция двух отсчетов:

$$y(m) = \Sigma\, g_m(n)\, x\,(\lfloor \underset{n=-\infty}{\overset{\infty}{m}} G_1/G_2\rfloor - n) \tag{3}$$

Здесь предполагается, что отклик системы $g_m(n)$ является периодической по m функцией с периодом G_2: $g_m(n) = g_{m+rG}(n)$, r=0, $\pm$ 1, $\pm$,

Представим (2) в виде

$$F` = (G_1/G_2)\, F \tag{4}$$

Такое преобразование будет осуществляться посредством поочередного выполнения двух целочисленных преобразований частоты дискретизации, т.е. сначала частота дискретизации будет повышаться в G_1 раз, а затем понижаться в G_2 раз. Здесь важно отметить тот факт, что интерполяция (повышение F) с коэффициентом G_1 должна предшествовать децимация (понижение F) с коэффициентом G_2, поэтому ширина основной полосы промежуточного сигнала s(k) будет больше или равна ширине полос сигналов x(n) и y(n).

В этом случае имеем два фильтра с импульсными характеристиками $h_1(k)$ и $h_2(k)$, которые работают последовательно при одной и той же частоте дискретизации G_1F. Для повышения эффективности реализации полного процесса оба фильтра можно объединить в один фильтр нижних частот. Поскольку теперь цифровой фильтр h(k) должен служить целям, операций децимаций и интерполяции, он должен иметь частотную характеристику, близкую к частотной характеристике цифрового фильтра нижних частот, т.е. частота среза такого фильтра должна быть равной минимальной из двух частот среза, требуемых для дециматора и интерполятора, и частота отсчетов этого фильтра равна $F'' = G_1F$.

Связь между входом и выходом рассматриваемой системы во временной области имеет вид

$$y(m) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(nG_1 + mG_2 \oplus G_1)\ x(\lfloor mG_2/G_1 \rfloor - n) \tag{5}$$

Где $\lfloor u \rfloor$ означает целое число, меньшее или равное u. Нетрудно видеть, что уравнение (5) соответствует общей форме системы независящего от времени цифрового преобразования (3), и что независящий от времени отклик на единичный отсчет $g_m(n)$ можно записать в следующем виде

$$g_m(n) = h(nG_1 + mG_2 \oplus G_1) \text{ при всех m и всех n,} \tag{6}$$

где h(k) - независящая от времени импульсная характеристика цифрового фильтра нижних частот при частоте отсчетов, равной G_1F.

Можно показать, что спектр выходного сигнала $Y(e^{j\omega`})$, записанный через спектр входного сигнала $X(e^{j\omega`})$ и частотную характеристику фильтра $H(e^{j\omega`})$ вычисляется на единичной окружности $z= e^{j\omega`}$ согласно выражения

$$Y(e^{j\omega`}) = (1/G_2) \sum_{l=0}^{G2-1} H\{\exp j(\omega`-2\pi l)/G_2\} X\{\exp j(\omega`-2\pi l)/G_2\} \tag{7}$$

Как видно процесс преобразования частоты дискретизации можно моделировать как линейную периодическую независящую от времени систему,а импульсная характеристика (отклик на единичный отсчет) этой системы $g_m(n)$ можно записать через импульсную характеристику h(k) независящего от времени цифрового фильтра, предназначенного для системы с наибольшей частотой дискретизации G_1F.

3. Одномодульная и многомодульная арифметика вычетов в фрактальных измерениях для рациональных чисел

Основная идея при безошибочной обработке фрактального измерения на языке математики формулируется так: отобразить рациональые операнды в множество целых чисел Q, произвести арифметические операции в кольце (Q, +, -) и затем отобразить целочисленные результаты в соответствующие рациональные числа. В этом случае удобно выбрать меру в виде $[G] = p^p$ где: [G]- модуль преобразования, p-простое, r-положительное целое число. Рациональные числа G_1/G_2 для которых $(G_2,p)=1$, отображаются на Q. При этом предполагаем, что обратный элемент $(G_2)^{-1}[G]$ существует тогда и только тогда, когда $(G_2, p) = 1$. Это случай т.н. p-адических чисел. Если r=1,то [G] совпадает с простым p.

Отношение $G_1/\ G_2$ можно записать двумя уравнениями измерения, в двух математически эквивалентных формах [2,4]:

$$G_1=\ln[(N/n)^3/V_n]=\{G_1\}[G] + G_{R1},$$

$$G_2=\ln(N/n)=\{G_2\}[G] + G_{R2} \tag{8}$$

$$\text{или} \quad G_1= G_{R1}(\mathrm{mod}[G]) \quad G_2= G_{R2}(\mathrm{mod}[G]) \tag{9}$$

где $0 \le G_{R1} < [G]$, $0 \le G_{R2} \le [G]$, которые можно безошибочно обработать по алгоритмам обработки целых чисел. В итоге получим числовую дробь G_1/G_2. Поэтому можно записать

$G_1/G_2= G_{R1}(\mathrm{mod}[G])/G_{R2}(\mathrm{mod}[G])$ или $G_1\ /G_2 = G_{R1}/G_{R2}= F`/F$, т.е. фрактальная размерность пропорциональна отношению остатков из (8) и частотам дискретизации.

Для перевода рациональной дроби в целое число необходимо выполнить условия гомоморфизма по отношению к операциям сложения и умножения. В теории чисел доказывается [7]: во-первых, связь колец (Ra, +, -) и ($\underline{Ra}$, +, -), где Ra - множество рациональных чисел $\underline{Ra} \in$ Re, Ra - множество тех рациональных чисел, которые допускают отображение в Ra. Действительно, по определению $\underline{Ra} = \{G_1/G_2: (G_2,p)=1\}$ каждое целое число $k \in R_a$ является образом бесконечного множества элементов из Ra, которое обозначим Ra_k, где k=0,1,...,p - 1 , т.е. $Ra_k=\{ G_1/ G_2 \in Ra : |G_1/ G_2|_p= k\}$ откуда вытекает

$$\underline{Ra} = \bigcup_{k=0}^{p-1} Ra_k \tag{10}$$

где Ra_k - непересекающиеся подмножества или обобщенные классы вычетов по mod[G], поскольку они включают обычные классы вычетов как собственные подмножества $G_{rk} \in R_{ak}$, k=0,1,...,p-1; во вторых, отображение $\underline{Ra}$ ----> Ra задает гомоморфизм по отношению к операциям сложения и умножения и не является взаимно-однозначным, поскольку каждое целое $k \in Ra$ является образом бесконечного подмножества R_{ak} рациональных чисел. Следовательно, это отображение не имеет обратного; в-третьих, если использовать множество дробей Фарея порядка N (order-N Farey fractios)

$$F_N = \{G_1/G_2 \quad Ra: (G_1,G_2)=1\} \tag{11}$$

и условия $0 \leq |G_1| \leq N$, $0 \leq |G_2| \leq N$, где N-целое число. Пусть N - максимальное целое число, для которого выполняется неравенство

$$2N^2 + 1 \leq [G] \tag{12}$$

и пусть по результатам фрактальных измерений обобщенный класс вычетов Ra_k содержит некоторую дробь Фарея G_1/G_2 порядка N. Тогда G_1/G_2- единственная дробь Фарея порядка N в множестве Ra_k. Необходимо заметить, что если величина N выбрана в соответствии с условием (12), то число элементов в множестве F_N меньше m. Это значит, что не каждый из обобщенных классов вычетов $Ra_o, Ra_1, ..., Ra_{p-1}$ может содержать элемент из F_N. Но если некоторый класс Ra_k все же содержит дробь Фарея порядка N, то в этом классе такая дробь только одна.

Теперь можно сформулировать условия взаимно однозначного отображения выбранных элементов из $\underline{Ra}$ на множество их образов из Ra. Обозначим через $Q_{[G]} = \{|G_1/G_2|_{[G]}: G_1/G_2 \in F_N\}$ образ множества дробей Фарея порядка N при гомоморфизме $|\bullet|_{[G]}: \underline{Ra} \rightarrow Ra$. В теории чисел доказывается, что отображение $|\bullet|_{[G]}: F_N \rightarrow Q_{[G]}$ является взаимно однозначным и переводит F_N во все множество $Q_{[G]}$, т.е. имеет обратное отображение. При этом, каждый обобщенный класс вычетов может содержать только одну дробь Фарея, которые “выступают” как эталоны.

Поэтому это отображение принимается за эталонное и мы можем взять их за реперные точки фрактальной шкалы. Можно показать, что любое отношение эквивалентности может быть определено с помощью отношения “быть эталоном”, и наоборот, любое отношение “быть эталоном” определяет некоторую эквивалентность.

Для применения многомодульной арифметикаи вычетов в фрактальных измерениях для рациональных чисел необходимо ввести векторную шкалу эталонов [2,4,7] с компонентами составленными из n-образцовых мер $[G_1], [G_2], ..., [G_n]$. Тогда $2N^2 + 1 \leq [G_M]$, где $[G_M] = [G_1][G_2]...[G_n]$. Дальнейшее изложение полностью параллельно тому, что используют для многомодульной арифметике целых чисел, с небольшими отличиями.

Литература

1. Крошьер Г.Е., Рабинер Л.Р. Интерполяция и децимация цифровых сигналов. Методический обзор//ТИИЭР, Т.69, В.3, 1981.

2. Арутюнов П.А. Цифровая обработка фрактальных измерений в конечных полях//Микроэлектроника,1999, Т.28, В.4.С.301-307.

3. Арутюнов П.А. Алгоритмические структуры СБИС для безошибочной обработки измерительного сигнала//Всес.наун.-технич.конф.”Метрологические проблемы микроэлектроники” (тез.докл.) 1988, М. Радио и связь.

3. Иванова В.С. От дислокаций к фракталам // Сб.тезис. Междисциплинарного семинара “Фракталы и прикладная синергетика”,18-21 октябр.1999,М.РАН,РФФИ.

4. Арутюнов П.А. Основное уравнение измерения в задачах цифровой обработки сигналов с использованием систем остаточных классов//Микроэлектроника.1995.Т.24.В.5.С.355-359.

5. Арутюнов П.А.Теория и применение алгоритмических измерений.М.Энергоатомиздат.1991.256 с.

6. Арутюнов П.А. Косвенные измерения в конечных полях//Измерительная техника, 1999, В.4,С.11-16.

7. Грегори Р., Кришнамурти Е. Безошибочные вычисления.Методы и приложения.М.:Мир,1988, 295 с.

8. Gregory R.T. A method for and an application of error-free computations. Proceedings of the AFCET Symposium “Mathematics for Computer Science”.Paris, 152-158, 1982.

9. Gregory R.T. Exact computation with order-N Fatey fractions. Computer Science and Statistics: Proceedings of the 15th Symposium on the Interface. J.E. Gentle Editor, North Holland, Amsterdam, 1983.

THE DIGITAL SIMULATION FRACTAL MEASUREMENTS

Arutyunov P.

Moscow State University of Electronics and Mathematic;
Metrology Department
109028, Russia, Moscow,B.Triohsviatitelsky 3/12
(095) 2359727, Fax: (095) 9162807
E-mail: root@onti.miem.msk.su

The abstract: the Principles of processing of digital signals are widespread on existing methods of measurement fraction, submitted by dimensions Hausdorf-Bezicovich and Mandelbrot. Fractions of measurement. Fraction dimensions, in kind of rational number G1 / G2 or in kind of attitude(relation) of remainders

GR1 / GR2 of two equations of measurement, is submitted by equivalent digital model of attitude(relation) of two frequencies дискретизации F1 / F2 in some linear digital system. Is shown, that such system is described by integrated convolution, which, in turn, is submitted by cascade connection интерполяторов and дециматоров with integer factors of transformation. For correct processing фрактальной of dimension is necessary to be transferred the rational number in integer and to use Farey fraction in one-modular and multimodular arithmetics, which, in turn, can be used in quality reper of points metrology of scales.

1. Introduction.

The general idea behind fractal metods relies on concept of the Hausdorf - Besikovich (HB) dimension. Consider a set of points in an n-dimensional space. Our goal is to cover this set by cubes with an edge equal to l. The HB dimension D_F of a point is defined as the limit, if any, of the ratio

$$D_F = \lim_{l\to o}\{\ln N_l/\ln(1/\varepsilon)\} = G_1/G_2 \tag{1}$$

The integer values of the parametr D_F are seen to correspond to the Euclidean metric and, from the fractal geometry stand-point, can be thought of as reference points. The fractal dimension has two distinct features: it is scale-invariant,i.e.,does not depend on the space dimensionality, and does not have the dimension of a physical quantity. Therefore, the problem of finding homomorphic one-to-one maping of this dimension into an isomorphic integer-valued scale arose. The digital equivalent of the HB dimension are seen as a rational fraction G_1/G_2.

One main advantage of algorithms in a residue-class system is that these (measuring and computational) algorithms use modified definitions of addition and multiplication, which satisfy the closure and strict-equality conditions. This excludes overflow and makes the measuring and computational process error-free, i.e. absolutely accurate.

2. Digital model fractal of dimension

I compare to rational number G1 / G2 from (1) two frequencies discretization signals: on entrance x (n) and exit (output) y (m) linear digital

$$G1 / G2 = F` / F = T / T` \tag{2}$$

where F and F of frequency discretization digital, liner of system, and T and T `- the intervals discretization accordingly, on entrance and exit(output).

The equality (2) means, that fractal the dimension interpret as the transformation of frequency discretization in some digital sistem. Is to such system the target function gm (m) represents the response of system at the time of time m on source readout, appropriate to moment of time $\lfloor mG1/G2\rfloor$ - n, where $\lfloor u\rfloor$ - the integer. Each target readout y (m) is possible to be recorded in kind of integrated convolution as linear compozition of two readout:

$$y(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_m(n)\, x(\lfloor mG_1/G_2\rfloor - n) \tag{3}$$

We present (2) in kind F ` = (G_1/G_2) F.So the transformation will be executed by means of serial completion of two integer transformations of frequency discretization, i,.e. at first the frequency discretizatin will be increased in G1 time(interpolation) , and then to be lowered in G_2 time (dezimation) .In this case we have two filters with pulsing characteristics $h_1(k)$ and $h_2(k)$, which work consistently at the same frequency discretization G1 F. For increase of efficiency of realization of total process of both filters was possible to be united in one filter of bottom frequencies.

It is possible to show, that the spectrum of target signal Y ($e^{j\omega}$) source signal recorded through spectrum X ($e^{j\omega}$) and frequent characteristic of filter H ($e^{j\omega}$) is calculated on individual

circle z= $e^{j\omega}$ according to expression

$$Y(e^{j\omega`}) = (1/G_2)\sum_{l=0}^{G2-1} H\{\exp j(\omega`-2\pi l)/G_2\}X\{\exp j(\omega`-2\pi l)/G_2\} \tag{4}$$

3. One-modular and multimodular residue arithmetics for rational numbers in fractal measurements

The main idea by which we shall be guided is the following: to map rational operands (1) into a sat of itegers Q, perform arithmetic operations in a ring (Q, +, -) and then map the integer-valued results into associated rational numbers. To do this, a modulus of transformation can conveniently be taken in the form $[G]=p^r$ is a prime and r is a positive integer. Rational numbers G_1/ G_2 for which (G,p)=1 are mapped onto the set Q. It is assumed that the inverse $(G_2)^{-1}[G]$ exists if and 0nly if $(G_2,p)=1$. This is the case of so-called p-adic numbers . If r=1, [G] coincides with the prime p.

In terms of the theory 0f numbers, one can prove three statements. First, rings (Ra, +,-) and (Ra`, +,-) (where Ra is the set of rational numbers, Ra $\in$ Re; and Ra` is the set of those rational numbers that can be mapped into Ra) are interrelated. Second, mapping Ra`$\rightarrow$Ra specifies homomorphiism relative to addition and multiplication operations and is not bijective, because every integer k$\in$Ra is the image of an infnnite subset Ra_k of rational numbers.

Third, if order-N Farey fractions $F^N=\{ G_1/ G_2 \in Ra; (G_1,G_2)=1\}$ and the conditios $0\_\leq|G_1|\leq N$, $0\leq|G_2|\leq N$, where N is an integer , are used, then N can be selected such that every generalized residue class Ra_k has no more than one Farey fraction.