ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЙ КАК ЗАДАЧА РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Жиляков Е.Г., Фокин Ю.А.

Белгородский университет потребительской кооперации

При обработке сигналов достаточно часто возникает задача интерполяции, то есть задача нахождения оценок значений функции u(t) в любой точке интервала $0 \le t \le T$, если известны значения $u(t_1)$, $u(t_2)$,… $u(t_n)$ в ряде точек t_1, t_2,…t_n этого интервала, которые называют узлами интерполяции. Способ вычисления этих оценок обычно задается в виде формулы или некоторого алгоритма.

Сформулированная таким образом задача может быть однозначно решена только при ограничениях на класс интерполирующих функций.

В приложениях при осуществлении интерполяции нет строгих критериев, которые позволяли бы обосновать выбор интерполирующей функции из того или иного класса. Вместе с тем поиск подобного рода критериев представляется целесообразным как с точки зрения развития теории, так и для практической реализации.

Будем искать решение задачи интерполяции в классе функций, представимых в виде

$$\hat{u}(t) = \int_0^t f(x)dx + u(0), \tag{1}$$

где $\hat{u} \in L_2$, а f(x) – непрерывная функция.

Для простоты в дальнейшем полагаем

$$u(0)=0 \tag{2}$$

Очевидно, что должно выполняться соотношение

$$f(x) = \frac{du(x)}{dx}. \tag{3}$$

При этом должны также выполняться условия

$$\hat{u}(t_i) = u_i, i = 1,2,...N. \tag{4}$$

Крышка сверху означает, что интерполирующая функция отличается от неизвестной “истинной” функции.

Очевидно, что если f(x) известна при всех $x \in [0;T]$, то соотношение (1) позволяет вычислить u(t) во всей области определения.

Таким образом, задача интерполяции может быть сведена к поиску в некотором смысле наиболее подходящей производной интерполирующей функции.

Для этого естественно использовать значения функции в узлах интерполяции, так что (1) с учетом (3) и (4) дает

$$u_i = (\varphi_i, f), \tag{5}$$

где символ (x,y) означает скалярное произведение

$$(x, y) = \int_a^b x(t)y(t)dt;$$

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} 1, \ при \ t \in [0; t_i], \\ 0, \ при \ t \notin [0; t_i]. \end{cases} \tag{6}$$

Очевидно, что конечный набор равенств вида (5) не позволяет однозначно определить функцию f. Однако, имеется возможность ввести дополнительные ограничения на класс интерполирующих функций, которые позволяют однозначно решить задачу интерполяции и при этом являются достаточно общими.

В рамках данной работы рассматривается подход на основе решения вариационной задачи вида

$$F(f)= extr, \tag{7}$$

где F(f) – некоторый неотрицательный функционал от производной, который имеет глобальный экстремум.

Пусть $\hat{u}$ (t) принадлежит классу функций, у которых существуют и имеют ограниченную норму

$$\|z\| = \left(\int_0^T z^2(t)dt \right)^{1/2} \tag{8}$$

производные до L-того порядка включительно, то есть

$$\left\| f^{(k)} \right\|^2 = \int_0^T \left[f^{(k)}(t) \right]^2 dt < \infty, k = 0,1,2,...L \qquad (9)$$

Тогда в качестве принципа отбора интерполирующей функции можно использовать

$$\sum_{k=0}^{L} p_k \left\| f^{(k)} \right\|^2 = min \qquad (10)$$

$$(\varphi_i, f) = u_i, \mathrm{i} = 1,2,...\mathrm{N} \qquad (11)$$

где $p_к$ – вещественные числа.

Таким образом, получили вариационную изопериметрическую задачу, решение которой дает дифференциальное уравнение

$$\sum_{k=0}^{L} (-1)^k p_k f^{(2k)}(t) = \sum_{i=1}^{N} \beta_i \varphi_i(t), \qquad (12)$$

решение которого зависит от 2L граничных условий вида

$$f^{(k)}(0) = a_k, f^{(k)}(T) = b_k, k = 1,2,...L.$$

Выбор подходящих значений a_k и b_k представляет собой самостоятельную задачу и здесь подробно не рассматривается. Положим для определенности

$a_k = b_k = 0$, k=1,2,…L.

Тогда искомая функция f(t) может быть представлена в виде

$$f(t) = \sum_{i=1}^{N} \beta_i z_i(t), \qquad (14)$$

где функции z_i являются решениями дифференциальных уравнений

$$\sum_{k=0}^{L} (-1)^k p_k z_i^{(2k)}(t) = \varphi_i(t),$$
$$z_i^{(k)}(0) = z_i^{(k)}(T) = 0, k = 1,2,...L. \qquad (15)$$

Ясно, что уравнения вида (15) разрешимы, и тогда подстановка представления (14) в (11) дает систему линейных уравнений относительно β_i

$$A\vec{\beta} = \vec{u} \qquad (16)$$

где элементы матрицы A $a_{ik}=(\varphi_i; z_k)$, $\vec{\beta} = (\beta_1; \beta_2; ...\beta_N)^T$, $\vec{u} = (u_1; u_2; ...u_N)^T$

Нетрудно показать, что ввиду линейной независимости набора функций φ_i решения уравнений (15) также являются линейно независимыми. Поэтому матрица A в системе (16) является неособенной и следовательно справедливо представление

$$\vec{\beta} = A^{-1}\vec{u} \, . \qquad (17)$$

Таким образом, получены все основные соотношения, которые позволяют вычислить значения интерполирующей функции, удовлетворяющей условиям (10) и (11).

Рассмотрим теперь частные случаи.

Пусть в (15) $p_0 = 1$, $p_к = 0$, k = 1,2,...L. Тогда

$z_i = \varphi_i$,

а поэтому

$$f(t) = \sum_{i=1}^{N} \beta_i \varphi_i(t),$$

элементы матрицы в (16)

$a_{ik} = \{\varphi_i ; \varphi_k\} = \min \{t_i, t_k\}$.

Положим $p_0 = 0$, $p_1 = 1$, $p_к = 0$, k = 2,3,...L, так что задача (10) дает

$$\left\| f' \right\|^2 = min \qquad (18)$$

Тогда уравнение (15) преобразуется к виду

$z_i'' = \varphi_i$,

а ее решением являются функции

$$z_i(t)=\begin{cases} 0, t\in[-\infty;0] \\ \dfrac{t^2}{2}, t\in[0;t_i] \\ \dfrac{t^2}{2}+t, t\in[t_i;+\infty] \end{cases}$$

Очевидно, что условие (18) соответствует минимизации нормы второй производной интерполирующей функции. Известно [2], что таким свойством обладают сплайны третьего порядка.

Таким образом, используя вариационный принцип (10) с учетом условий (11), можно получить различные классы интерполирующих функций, в том числе реализовать известные подходы, которые разработаны, исходя из других соображений.

Литература.

1.Хургин Я.И., Яковлев В.П., Финитные функции в физике и технике, М.:Наука, 1971, 408 с.
2.К.Де Бор, Практическое руководство по сплайнам, М.:Радио и связь, 1985, 304 с.
3.Тихонов А.Н., Арсенин В.Я., Методы решения некорректных задач, М.:Наука, 1979, 285 с.