

Институт аналитического приборостроения РАН,
Рижский пр. 26, Санкт-Петербург 198103.
тел. (812) 251-7405, факс (812) 251-7038), E-mail: nov@iai.rssi.ru

Рассматривается октавнополосный спектральный анализ сигналов на основе дискретного преобразования вейвлет (DWT). Показано, что с повышением порядка функций вейвлет увеличивается крутизна фронтов частотных характеристик полосовых фильтров и уменьшается взаимное влияние частотных полос (перекрестные искажения). Приведены быстрые вычислительные алгоритмы и вычислительные схемы.

1. Введение

Анализ спектров всевозможных сигналов широко используется в различных приложениях для диагностики состояния технических систем (турбогенераторов, двигателей), в геологоразведке, астрофизике, в задачах обнаружения сигналов, скрытых шумами, для идентификации речи, синтеза сигнала с заданными спектром и т.п.

В связи с интенсивным развитием в последние десятилетия элементной базы вычислительной техники все операции, связанные с обработкой сигналов, включая анализ спектра, выполняются методами прямых вычислений. Это обстоятельство потребовало в свою очередь разработки быстрых вычислительных процедур, обеспечивающих анализ в реальном масштабе времени. Одним из таких процедур является алгоритм быстрого преобразования Фурье, который реализует анализ спектра с постоянным частотным разрешением и полосой (анализ с переменной добротностью).

Однако, в ряде практических приложений требуется производить спектральный анализ с множественным разрешением, как правило, более высоким на низких частотах и понижающемся - к верхним. Появление в начале 80-х годов теории вейвлетов, развитой в работах [1-4], позволяет решить проблему спектрального анализа с множественным разрешением на основе быстрых алгоритмов. В настоящей работе рассматриваются некоторые аспекты анализа спектров в базисе вейвлетов пока слабо освещенные в литературе.

2. Теория

Будем рассматривать спектральный анализ множества **S** сигналов $s(t)$, принадлежащих пространству квадратично интегрируемых функций. В результате такого анализа мы разбиваем (разделяем) сигнал на отдельные компоненты, такие, что

$$s(t) = s_{j_0}(t) + \sum_{j=1}^{\infty} s_j(t), \tag{1}$$

где $s_{j_0}(t)$ - низкочастотная компонента

$$s_{j_0}(t) = \sum_k c_{j_0}(k) \varphi_{j_0,k}(t) \tag{2a}$$

$s_j(t)$ - высокочастотные компоненты сигнала

$$s_j(t) = \sum_k d_j(k) \psi_{j,k}(t), \tag{2б}$$

где коэффициенты определяются из условия ортогональности базисных функций:

$$c_{j_0}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \varphi_{j_0,k}(t) dt \tag{3a}$$

$$d_j(k) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \psi_{j,k}(t) dt \tag{3б}$$

Преобразование сигнала по формулам (3) называют анализом, а восстановление по формулам (2) – синтезом, который приводит к вычислению спектральных компонент в выражении (1).

Подставляя выражения (3) в (2) получим:

$$s_{j_0}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \Phi_{j_0}(t - \tau) dt \tag{4a}$$

и

$$s_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \Psi_j(t-\tau) d\tau, \quad (46)$$

где функции

$$\Phi_{j_0}(t) = \sum_m \varphi_{j_0}(m) \varphi_{j_0}(m-t) \quad (5a)$$

$$\Psi_j(t) = \sum_m \psi_j(m) \psi_j(m-t) \quad (5b)$$

называются ядрами Дирихле интегральных преобразований (4). Они представляют собой импульсные отклики соответствующих фильтров: низкой частоты "вырезающего" из сигнала $s(t)$ компоненту $s_{j_0}(t)$ и полосовых фильтров, "вырезающих" из сигнала высокочастотные компоненты.

Выполняя преобразование Фурье этих ядер, получим:

$$\hat{\Phi}_{j_0}(\omega) \approx |\varphi_0(\omega)|^2$$

и

$$\hat{\Psi}_j(\omega) \approx |\psi_j(\omega)|^2.$$

Последние соотношения показывают, что форма частотной характеристики фильтров полностью определяется спектральными свойствами базисных функций. Как известно, в спектральном анализе для оценки интенсивности спектральных компонент важно, чтобы соседние частотные полосы не перекрывались.

В наибольшей степени для этой цели подходят базисные функции, заданные на ограниченном множестве точек (базисы с компактным носителем) и многократно дифференцируемые. При этом

компактность базисов минимизирует число вычислительных операций, а P – кратное, например, дифференцирование гарантирует затухание частотной характеристики как

$$1/\omega^P.$$

Так как синтез вейвлетов, отвечающих этим условиям, является предметом отдельных исследований, здесь мы проиллюстрируем частотно-избирательные свойства известных базисов. На рис. 1 и 2 показаны преобразования Фурье базиса Добеши, db20 и базиса, синтезированного из гауссовой функции [5]. Из этих рисунков видно, что для спектрального анализа желательно применять базисы более высоких порядков, так как с

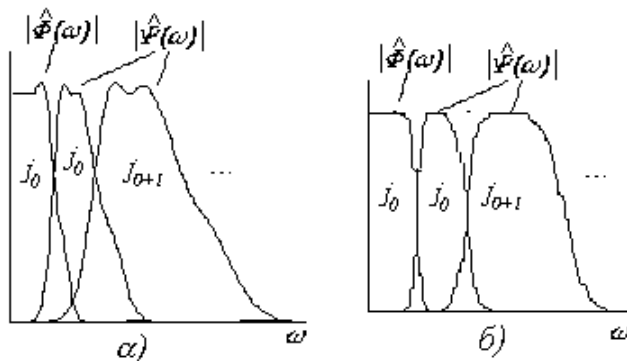


Рис.1 Фурье - образы базисных функций Добеши db20 -а) и синтезированных из функции Гаусса.

увеличением порядка уменьшаются боковые колебания частотных характеристик фильтров и увеличивается крутизна фронтов.

3. Алгоритмы

Теория кратномасштабного анализа приводит к следующим рекуррентным формулам для вычисления коэффициентов $c_j(k)$ и $d_j(k)$, которые получили название анализ от "тонкого" к "грубому" масштабу:

$$c_j(k) = \sum_m h(m-2k) c_{j+1}(m) \quad (6a)$$

$$d_j(k) = \sum_m g(m-2k) c_{j+1}(m) \quad (6b)$$

В качестве коэффициентов $c_j(k)$ на самом "тонком" значении масштаба $j = j_m$ принимаются временные отсчеты сигнала, т.е.

$$c_{j_m}(k) = s(k).$$

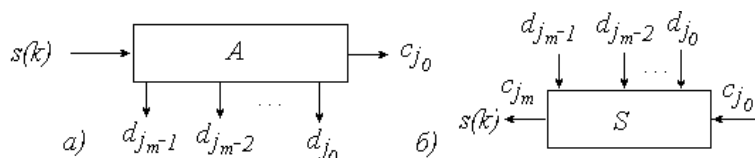


Рис 4. Многошаговая схема вейвлет-анализа - а) и синтеза - б).

Итерационная процедура (6) обычно завершается при некотором значении $j = j_0$, которое выбирается исходя из априорной информации о сигнале, а именно, о его продолжительности.

Для вычисления спектральных компонент по формулам (2) может быть получена формула восстановления (синтеза) отсчетов сигнала для каждого масштаба, которая имеет вид [5]:

$$c_{j+1}(k) = \sum_m c_j(m)h(k - 2m) + \sum_m g_j(m)g(k - 2m).$$

Процесс восстановления идет от "грубого" масштаба к "тонкому".

Схема многошаговой итерационной процедуры анализа и синтеза приведена на рис.4, причем, для удобства "стыковки" со схемой анализа, процесс восстановления на рис 4б показан справа налево.

С целью вычисления спектральных компонент сигнала для каждого значения масштаба используются только коэффициенты разложения в вейвлетном базисе, соответствующие этому масштабу. Пример получения спектральной компоненты в масштабе j_{m-2} показан на рис.5.

Число операций умножения, необходимое для вычисления всех DWT-коэффициентов для массива данных N и длине векторов h и g , равном L , будет $2LN$ [6]. Столько же операций нужно выполнить, чтобы восстановить сигнал или вычислить все его спектральные компоненты. Следовательно, для анализа-синтеза сигнала $s(t)$ в вейвлетном базисе необходимо выполнить $4LN$ операций. Напомним, что число операций комплексного умножения для БПФ равно $N \log_2 N$, что сравнимо или даже больше, чем в случае DWT.

4. Моделирование

Главное отличие между спектральным анализом в базисе Фурье и в вейвлетном базисе заключается в том, что спектральные компоненты в вейвлетном базисе являются функциями двух переменных – масштаба и смещения (положения). Это означает, что вейвлеты позволяют анализировать не только частотные особенности любого сигнала, но и определять время его появления. Кроме того, вследствие масштабирования, длительность базисной функции всегда может быть согласована с продолжительностью сигнала, что при условии синтеза базиса с учетом формы сигнала или его других свойств порождает целый класс вейвлетов, названных адаптивными (приспособленными) к решению той или иной практической задачи

Рис.6 иллюстрирует эффект выделения сигнала из шума (отношение сигнал/шум = 0,5) при разложении по спектральным компонентам при восьми значениях масштаба (показаны последние четыре).

Выводы

Вейвлеты могут успешно использоваться для построения октавнополосных анализаторов спектра, в том числе и для целей обнаружения сигналов в шумах. Число вычислительных операций при этом не больше, чем в случае применения БПФ, что делает спектральный анализ в вейвлетном базисе, с учетом его частотно-локальных свойств, эффективным средством в ряде приложений.

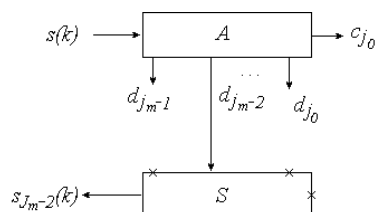


Рис. 5. Схема вычисления спектральной компоненты $s_{j_{m-2}}(t)$

Литература

1. *Grossman A., Morlet J.* Decomposition of Hardy into square integrable wavelets of constant shape // Siam Journ.of Math.Analm. 1984. V.15. P. 723 – 736.
2. *Daubechies I.* Orthonormal bases of compactly supportid wavelets. // Communications on pure and Applied Mathematics. November. 1988. V41. P. 909-926.
3. *Mallat S.G.* Multiresolution approximations and Wavelet of orthonormal bases of $L_2(\mathbb{R})$ // Transactions of the American Mathematical Society. September. 1989. V315. P.69-87.
4. *Петухов А.П.* Введение в теорию базисов всплесков. С.-Петербург: Изд.СПбГТУ, 1999. 131 с.
5. *Новиков Л.В.* Адаптивный вейвлет - анализ сигналов. // Научное приборостроение. 1999. т.9 с.30-37.
6. *Burrus C.S., Gopinath R.A. and Haital Guo.* Introduction to Wavelets and Wavelet Transform. Prentice Hall. New Jersey. 1998. 268 p.



OCTAVE BAND WAVELET - BASED SPECTRAL ANALYSIS OF SIGNALS

Novikov L.V.

Institute for Analytical Instrumentation, RAS
Rizhsky Pr.26, Sankt-Petersburg 198103. Russia
Phone: (812)251-7405, Fax: (812)251-7038, E-mail: nov@iai.rssi.ru

Octave-band spectral analysis of signals based on the discrete wavelet transform (DWT) is considered. The slope of the bandpass filter response characteristic fronts increases and the inter-band interference (crosstalk) decreases with increasing wavelet function order. Fast computational algorithms and circuits are presented.

1. Introduction

Some applications require multiresolution spectral analysis, with resolution decreasing from lower to higher frequencies. The wavelet theory, which has emerged in the early 80s and developed in [1,2,3], helps to solve the multiresolution spectral analysis problem based on the fast algorithms. The present paper is devoted to some aspects of wavelet - based spectral analysis not yet adequately addressed in the literature.

2. Theory

We consider spectral analysis of a set of signals $s(t)$ belonging to the space of quadratically integrable functions. Such analysis results in signal separation into components such that

$$s(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{j_0}(k) \varphi_{j_0,k}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=j_0}^{\infty} d_j(k) \psi_{j,k}(t) = s_{j_0}(t) + \sum_{j=1}^{\infty} s_j(t), \quad (1)$$

where the functions $\varphi_{j,k}(t)$ and $\psi_{j,k}(t)$ are called scaling functions and wavelets, respectively,

$$s_{j_0}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \Phi_{j_0}(t - \tau) d\tau \quad (2a)$$

and

$$s_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \Psi_j(t - \tau) d\tau \quad (2b).$$

The functions $\Phi_{j_0}(t)$ and $\Psi_j(t)$ are called the Dirichlet kernels of the integral transforms (2). They are impulse responses of the corresponding filters: low-pass filter cutting the $s_{j_0}(t)$ component out of the signal $s(t)$ and bandpass filters cutting out the high - frequency components. The shape of the spectral analysis filter frequency characteristic completely depends on the spectral properties of basis functions. It is known that to estimate spectral component intensities in spectral analysis it is important that adjacent frequency band do not overlap. This is ensured by choosing higher order wavelets [4].

3. Algorithms and modelling

The theory of multiscale analysis gives the following recurrent formulas for calculating the coefficients $c_j(k)$ and $d_j(k)$ called fine to coarse scale analysis:

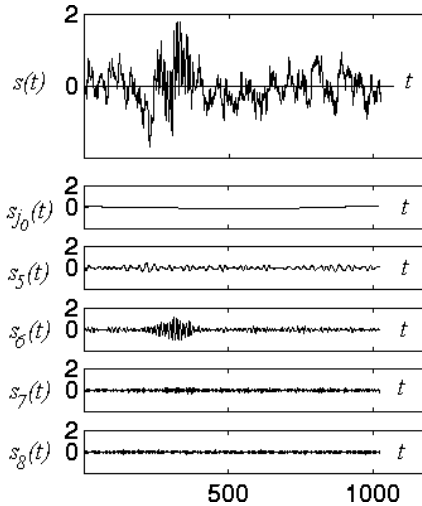
$$c_j(k) = \sum_m h(m - 2k) c_{j+1}(m) \quad (3a)$$

$$d_j(k) = \sum_m g(m - 2k) c_{j+1}(m) \quad (3b)$$

The coefficients $c_j(k)$ at the "finest" scale value $j = j_m$ are assumed to be the time signal samples, i.e., $c_{j_m}(k) = s(k)$.

To calculate spectral components from Eqs.(2) we can use the following expression for restoration (synthesis) of signal samples for each scale [3]:

$$c_{j+1}(k) = \sum_m c_j(m)h(k-2m) + \sum_m g_j(m)g(k-2m)$$



A mixture of a harmonic signal spike and correlated noise (top) and expansion in spectral components with the wavelet basis db8.

The signal restoration proceeds in order of increasing (from "coarse" to "fine") scale. The spectral components at each scale value are calculated using only those coefficients of signal expansion in the wavelet basis that correspond to a given scale.

The number of operations need for calculation of all DWT coefficients and spectral component synthesis is comparable or even less than that for FFT.

The main difference between Fourier - and wavelet spectral analysis is that spectral components in the wavelet basis are functions of two variables, scale and shift (position). This means that wavelets allow not only analysis of frequency features of a signal, but also determining the time of its arrival. Besides, due to scaling, the basis function duration can be always matched to that of the signal. Therefore if the basis constructed is adapted to the signal shape or some other signal properties, we can have a class of wavelets called adaptive which are tailored for specific practical applications. The figure given illustrates the effect of signal detection in the presence of noise (signal-to-noise ratio 0.5) resulting from signal expansion in spectral components at eight scale values (only the last four are shown).

Conclusion

Wavelets can be successfully used in construction of octave band spectrum analysers, particularly, to detect signals buried in noise. The number of computational operations needed does not exceed that for the FFT technique. Therefore the wavelet – based spectral analysis can be an effective tool in a number of applications in view of its unique local – frequency properties.

References

1. Daubechies, I. *Orthonormal bases of compactly supported wavelets*. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1988, v. 41, November, p. 909 – 926.
2. Mallat S.G. *Multiresolution approximations and wavelet of orthonormal bases of $L_2(R)$* . Transactions of the American Mathematical Society, 1989, v.315, September, p. 69 – 87.
3. Burrus, C.S. Gopinath, R.A. and Haitao Guo. *Introduction to Wavelets and Wavelet Transform*. Prentice Hall, New Jersey, 1998, 268 pp.
4. Novikov L.V. *Adaptive Wavelet Analysis*. Nauchnoe Priborostroenie, 1999, v.9, p 30 – 37. (<http://www.wavelet.org>. *The Wavelet Digest*, v.8 April 15,1999).