ЦИФРОВОЙ СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЧЁТНЫХ ФУНКЦИЙ

Перлов Ю.М.

Белгородский университет потребительской кооперации

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Введём обозначения

$F(R,x)=(2\pi R)^{-1}\left(\frac{\sin(Rx/2)}{\sin(x/2)}\right)^2$ - ядро Фейера;

$\sigma_R(x,f)=\int_{-\pi}^{\pi} F(R,t)f(x+t)dt$ - R-я сумма Фейера функции f() в точке x.

Теорема 1

Пусть функция f(x), $x\in(-\infty,\infty)$ обладает свойствами:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} f(j\Delta x)<\infty,\ \forall\Delta x>0;\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx<\infty;$$

тогда для $\forall t>0$

$$\lim_{R\to\infty} t\int_{-\infty}^{\infty} F(R,xt)f(x)dt=\sum_{j=-\infty}^{\infty} f(jx_t),\ x_t=\frac{2\pi}{t}. \qquad (1)$$

В [1] было доказано соотношение вида 0 для функции f(x), являющейся спектральной плотностью стационарного случайного процесса. Эта теорема имеет общий характер.

Рассмотрим функцию $f(x)=f(x_1,x_2,...,x_n)$, $x\in E_n$, обладающую свойствами

$$f\in L^1(E_n), \qquad (2)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2,...,k\Delta x_i,...,x_n)<\infty;\ \forall i,\ \forall\Delta x_i>0, \qquad (3)$$

$$f(x_1,x_2,...,-x_i,...,x_n)=f(x_1,x_2,...,x_i,...,x_n);\ i=1,2,...,n. \qquad (4)$$

Из 0 следует существование преобразований Фурье

$$c(t)=\int_{E_n} e^{i(t,x)}(2\pi)^{-n}f(x)dx,\ f(x)=\int_{E_n} e^{-i(t,x)}c(t)dt.$$

Из Теоремы 1 следует

Теорема 2

Пусть f(x), $x\in E_n$ обладает свойствами 0-0, тогда

$$\lim_{R_1,...,R_n\to\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} t_k\right)\sum_{j_1=-(R_1-1)}^{R_1-1}...\sum_{j_n=-(R_n-1)}^{R_n-1}\left(\prod_{k=1}^{n}(1-|j_k|/R_k)\right)c(j_1t_1,...,j_nt_n)=$$
$$=\sum_{j_1=-\infty}^{\infty}...\sum_{j_n=-\infty}^{\infty} f(j_1x_1,...,j_nx_n),\ x_k=\frac{2\pi}{t_k},\ k=1,2,...,n. \qquad (5)$$

$$\lim_{R_1,...,R_n\to\infty}\sum_{j_1=-(R_1-1)}^{R_1-1}...\sum_{j_n=-(R_n-1)}^{R_n-1}\left(\prod_{k=1}^{n}(1-|j_k|/R_k)\right)f(j_1x_1,...,j_nx_n)=$$
$$=\left(\prod_{k=1}^{n} t_k\right)\sum_{j_1=-\infty}^{\infty}...\sum_{j_n=-\infty}^{\infty} c(j_1t_1,...,j_nt_n),\ x_k=\frac{2\pi}{t_k},\ k=1,2,...,n. \qquad (6)$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ЧЁТНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим функцию f(x), $x\in(-\infty,\infty)$, обладающую свойствами 0-0. Одномерные варианты соотношений 0, 0 таковы:

$$\lim_{R\to\infty} t\left(c(0)+2\sum_{j=1}^{R-1}(1-j/R)c(jt)\right)=f(0)+2\sum_{j=1}^{\infty} f(jx_t), \tag{7}$$

$$\lim_{R\to\infty} t^{-1}\left(f(0)+2\sum_{j=1}^{R-1}(1-j/R)f(jx_t)\right)=c(0)+2\sum_{j=1}^{\infty} c(jt),\ x_t=\frac{2\pi}{t}. \tag{8}$$

Поскольку ряды в 0, 0 сходятся, можно подобрать такие значения X_0, T_0, что с необходимой точностью выполняются соотношения

$$t\left(c(0)+2\sum_{j=1}^{R_\bullet}(1-j/R_c)c(jt)\right)\approx f(0)+2\sum_{j=1}^{R_f}f(jx_t), \tag{9}$$

$$t^{-1}\left(f(0)+2\sum_{j=1}^{R_f}(1-j/R_f)f(jx_t)\right)\approx c(0)+2\sum_{j=1}^{R_\bullet}c(jt); \tag{10}$$

где $R_c=[T_0/t]$, $R_f=[X_0/x_t]$, [a] - целая часть a.

Зададим некоторое натуральное N_c. Положим $t=T_0(N_c+1)/N_c$, тогда $R_c=[N_c/(N_c+1)]$, и из 0

$$\hat{c}(0)=t^{-1}\left(f(0)+2\sum_{j=1}^{R_f}(1-j/R_f)f(jx_t)\right), \tag{11}$$

где символ ^ далее обозначает оценку соответствующей функции.

Пусть теперь $t=k_1(T_0/N_c)$, $k_1\in K_1=\{k:[N_c/k]=1\}$, тогда из 0

$$\hat{c}(t)=t^{-1}\left(f(0)/2+\sum_{j=1}^{R_f}(1-j/R_f)f(jx_t)\right)-\hat{c}(0)/2. \tag{12}$$

Общий вид алгоритма вычисления значений преобразования Фурье вместе с 0 таков:

$$t_k=k(T_0/N_c),\ x_k=2\pi/t_k,\ R_f=[X_0/x_k],\ R_k=[N_c/k];\ k=N_c,...,1$$

$$\hat{c}(t_k)=t_k^{-1}\left(f(0)/2+\sum_{j=1}^{R_f}(1-j/R_f)f(jx_t)\right)-\sum_{j=2}^{R_k}\hat{c}(jt_k)-\hat{c}(0)/2. \tag{13}$$

Алгоритм 0, 0 заключается в следующем:

- задаются параметры X_0, T_0 , для которых соответственно функции f(x), c(t) малы;

- задаётся натуральное N_c - параметр, определяющий количество вычисляемых оценок значений преобразования Фурье $\hat{c}(0)$, $\hat{c}(T_0/N_c)$, $\hat{c}(2T_0/N_c)$,..., $\hat{c}(T_0)$;

- вычисляется оценка $\hat{c}(0)$;

- в порядке убывания $k=N_c,N_c-1,...,1$ вычисляются оценки $\hat{c}(kT_0/N_c)$.

Аналогично, на основе 0 формулируется алгоритм оценки обратного преобразования Фурье.

Алгоритмы вида 0, 0 обладают двумя основными свойствами: отсутствием тригонометрических функций и рекуррентностью. По-видимому, было бы удобно, учитывая второе свойство, назвать такие алгоритмы рекуррентным преобразованием Фурье (РПФ).

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ РПФ

Алгоритм РПФ был реализован для двух пар функций:

$$f_1(x)=(1+x^2)^{-1},\ c_1(t)=0.5e^{-|t|}; \tag{14}$$

$$f_2(x)=\frac{0.4}{0.16+(x-1)^2}+\frac{0.4}{0.16+(x+1)^2},\ c_2(t)=0.5e^{-0.4|t|}\cos t. \tag{15}$$

Вычислялись прямое и обратное РПФ. На значения функции $f_i(x)$ накладывались некоррелированные аддитивные помехи с дисперсией σ^2 и нулевым средним. Работа алгоритма повторялась 100 раз для каждой пары и для каждого значения σ^2. Усреднённые интегральные показатели точности представлены в таблицах 1, 2.

Таблица 1 Точность РПФ и обратного РПФ для функций 0

Параметры алгоритма	T_0=20.0, N_c=20; X_0=20.0, N_f=20			
σ^2	0.0	0.0001	0.0005	0.001
δc, %	9.43	18.49	33.12	41.26
δf, %	7.73	8.90	13.60	16.19

Таблица 2 Точность РПФ и обратного РПФ для функций 0

Параметры алгоритма	T_0=15.0, N_c=30; X_0=20.0, N_f=30			
σ^2	0.0	0.0001	0.0005	0.0025
δc, %	6.77	8.32	12.41	22.95
δf, %	8.23	9.76	13.34	21.66

Алгоритм РПФ вычисления коэффициентов Фурье 2π-периодической функции f(x) получается из 0, 0 при $X_0=\pi$, $T_0=N_c$.

Этот алгоритм был реализован для функции

$$f(x)=\pi^2-x^2,\ |x|\le\pi;\ f(x)=f(x+2\pi),\ |x|>\pi. \qquad (16)$$

В таблице 2 при различных значениях N_c представлены оценки первых 4-х коэффициентов, в последней строке записаны суммы $\hat{S}_p=\hat{c}_0^2+2\sum_{i=1}^{N_\bullet}\hat{c}_i^2$. В последнем столбце приведены точные значения коэффициентов Фурье и суммы Парсеваля.

Таблица 2. Точность РПФ-алгоритма вычисления коэффициентов Фурье функции 0

N_c	20	40	60	80	100	Точное
$\hat{c}_0$	6.5632	6.5756	6.5779	6.5787	6.5790	6.5797
$\hat{c}_1$	1.9932	2.0044	2.0009	1.9995	2.0010	2.0
$\hat{c}_2$	-0.5150	-0.5040	-0.5019	-0.5010	-0.5006	-0.5
$\hat{c}_3$	0.2281	0.2202	0.2214	0.2224	0.2221	0.2222
$\hat{S}_p$	51.734	51.944	51.940	51.938	51.953	51.951

Исследовались РПФ-оценки спектральной плотности на цифровых моделях стационарных случайных процессов.

Доказана состоятельность РПФ-оценок.

Литература

1. Перлов Ю.М. Прямое оценивание спектра стационарных случайных процессов//Проблемы передачи информации, 1989.- Т. XXV. - Вып. 2. С. 3-12.

DIGITAL SPECTRAL ANALYSIS OF EVEN FUNCTIONS

Perlov Y.M.

Belgorod University of Consumer Cooperation, Belgorod

The main relations

Let the function $f(x)=f(x_1,x_2,...,x_n)$, $x\in E_n$ has the following properties

$$f\in L^1(E_n), \tag{1}$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2,...,k\Delta x_i,...,x_n)<\infty;\ \forall i,\ \forall \Delta x_i>0, \tag{2}$$

$$f(x_1,x_2,...,-x_i,...,x_n)=f(x_1,x_2,...,x_i,...,x_n);\ i=1,2,...,n. \tag{3}$$

From 0 follows the existence of Fourier transforms

$$c(t)=\int_{E_n} e^{i(t,x)}(2\pi)^{-n}f(x)dx,\quad f(x)=\int_{E_n} e^{-i(t,x)}c(t)dt.$$

Theorem

Let $f(x)$, $x\in E_n$ has the properties 0-0, then the convergences are valid

$$\begin{aligned}&\lim_{R_1,...,R_n\to\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} t_k\right)\sum_{j_1=-(R_1-1)}^{R_1-1}...\sum_{j_n=-(R_n-1)}^{R_n-1}\left(\prod_{k=1}^{n}(1-|j_k|/R_k)\right)c(j_1t_1,...,j_nt_n)=\\&=\sum_{j_1=-\infty}^{\infty}...\sum_{j_n=-\infty}^{\infty} f(j_1x_1,...,j_nx_n),\ x_k=\frac{2\pi}{t_k},\ k=1,2,...,n.\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{R_1,...,R_n\to\infty}\sum_{j_1=-(R_1-1)}^{R_1-1}...\sum_{j_n=-(R_n-1)}^{R_n-1}\left(\prod_{k=1}^{n}(1-|j_k|/R_k)\right)f(j_1x_1,...,j_nx_n)=\\&=\left(\prod_{k=1}^{n} t_k\right)\sum_{j_1=-\infty}^{\infty}...\sum_{j_n=-\infty}^{\infty} c(j_1t_1,...,j_nt_n),\ x_k=\frac{2\pi}{t_k},\ k=1,2,...,n.\end{aligned} \tag{5}$$

CALCULATION OF THE FOURIER TRANSFORM OF EVEN FUNCTIONS

Consider the function $f(x)$, $x\in(-\infty,\infty)$, possesses of the properties 0-0. Since the series in 0, 0 converges it's possible to choose such values X_0, T_0, that with the prescribed accuracy the following relations are valid

$$t\left(c(0)+2\sum_{j=1}^{R_\bullet}(1-j/R_c)c(jt)\right)\approx f(0)+2\sum_{j=1}^{R_f}f(jx_t),$$

$$t^{-1}\left(f(0)+2\sum_{j=1}^{R_f}(1-j/R_f)f(jx_t)\right)\approx c(0)+2\sum_{j=1}^{R_\bullet}c(jt);$$

where $R_c=[T_0/t]$, $R_f=[X_0/x_t]$, [a] - denotes the integer part of a.

From the 0 the algorithm of calculation of the Fourier transform c() follows:

$$\hat{c}(0)=t^{-1}\left(f(0)+2\sum_{j=1}^{R_f}(1-j/R_f)f(jx_t)\right),$$

$t_k=k(T_0/N_c)$, $x_k=2\pi/t_k$, $R_f=[X_0/x_k]$, $R_k=[N_c/k]$; $k=N_c,...,1$

$$\hat{c}(t_k)=t_k^{-1}\left(f(0)/2+\sum_{j=1}^{R_f}(1-j/R_f)f(jx_t)\right)-\sum_{j=2}^{R_k}\hat{c}(jt_k)-\hat{c}(0)/2,$$

where the symbol ^ denotes an estimate of a value under.

The inverse algorithm is based on the 0.

The algorithm 0, 0 possesses of two basic features: recursiveness and the absence in it of the trigonometric functions. Let's name such algorithms as Recurrent Fourier Transform (RFT).

PROGRAMMING OF THE RFT

RFT was performed for two pairs of the direct and inverse Fourier transform:

$f_1(x)=(1+x^2)^{-1}$, $c_1(t)=0.5e^{-|t|}$;))

$f_2(x)=\dfrac{0.4}{0.16+(x-1)^2}+\dfrac{0.4}{0.16+(x+1)^2}$, $c_2(t)=0.5e^{-0.4|t|}\cos t$.)

To the function $f_i(x)$ were added independent errors of the zero mean and the variance σ^2. The RFT was simulated 100 times for the each pare and σ^2. Simulation results are adduced in the tables 1, 2.

Table 1 The accuracy of the direct and inverse RFT for the pare 0

The parameters of the algorithm	$T_0=20.0$, $N_c=20$; $X_0=20.0$, $N_f=20$			
σ^2	0.0	0.0001	0.0005	0.001
δc, %	9.43	18.49	33.12	41.26
δf, %	7.73	8.90	13.60	16.19

Table 2 The accuracy of the direct and inverse RFT for the pare 0

The parameters of the algorithm	$T_0=15.0$, $N_c=30$; $X_0=20.0$, $N_f=30$			
σ^2	0.0	0.0001	0.0005	0.0025
δc, %	6.77	8.32	12.41	22.95
δf, %	8.23	9.76	13.34	21.66

RFT-estimates of spectral density of stationary stochastic processes were investigated.

The convergence of the RFT-estimates had been proven.