К ВОПРОСУ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЦИФРО-АНАЛОГОВЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ

Хакимов Р.А.,Максутов А.Д., Коловертнов Г.Ю., Сапельников В.М.

Башкирский государственный университет, кафедра физической электроники
450074, г. Уфа, ул. Фрунзе, 32,
E-mail VSapelnikov@bsu.bashedu.ru

Реферат. В работе рассмотрены методы уменьшения погрешностей и аппаратных затрат при создании функциональных цифро-аналоговых преобразователей. В основе этих методов лежит применение таких способов аппроксимации, как разложение по многочленам Чебышева и интерполяция. Показано, что при этом происходит значительное снижение погрешностей по сравнению с использованием разложения в ряд Тейлора.

Элементарные функции играют большую роль при конструировании устройств для преобразования сигналов в информационно-измерительной технике, радиотехнике, приборостроении и аналоговой вычислительной технике. Однако воспроизведение нелинейных функциональных зависимостей сопряжено с определенными трудностями, поскольку цифро-аналоговые преобразователи (ЦАП) обладают линейной характеристикой преобразования. В связи с этим элементарную функцию *f(x)* аппроксимируют многочленом, значения которого близки к значениям элементарной функции на некотором отрезке [*a, b*]. И хотя многочлен также является элементарной функцией, его реализация представляет более простую задачу.

Для того, чтобы погрешность, вызванная аппроксимацией, была минимальна, необходимо соответствующим образом подобрать коэффициенты при степенях многочлена. В докладе рассмотрены три метода.

Наиболее распространенный метод аппроксимации функции *f(x)* – ее разложение в ряд Тейлора. В общем виде это разложение функции *f(x)* в окрестности точки x_0 осуществляется по формуле:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots .$$

Разложение функции в ряд Тейлора не является единственным. Существует возможность разложить функцию в ряд по обобщенным многочленам, например, по многочленам Лежандра, Чебышева, Якоби, Эрмита или Лагерра. Здесь мы остановимся на многочленах Чебышева, поскольку они дают наилучшее приближение [1].

Для нахождения коэффициентов C_k разложения по многочленам Чебышева $f(x)=\sum_{k=0}^{n} C_k T_k(x)$ используем следующие формулы:

$$C_0=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} f(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad C_k=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)T_k(x)dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad k>0.$$

Подставляя вместо степеней *x* их выражения через многочлены Чебышева, а затем приводя подобные члены при многочленах одной степени, получим искомый многочлен $P_n(x)= a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$.

Оценить погрешность, даваемую разложением функции *f(x)* в ряд по многочленам Чебышева, в общем виде очень трудно. Но согласно общим теоремам теории аппроксимации это разложение дает наилучшее приближение из всех возможных. Необходимо также отметить, что разложение функции *f(x)* по многочленам Чебышева возможно только для функций, имеющих непрерывную первую производную на отрезке [-1, 1]. Это условие обеспечивает сходимость ряда к функции *f(x)*. Для большинства элементарных функций это условие выполняется.

Следующий метод основан на теории интерполяции. В этом случае строят многочлен, который в $n+1$ заданных точках $x_0, x_1, \ldots x_n$, принимает значения $f(x_0), f(x_1), \ldots f(x_n)$, а в остальных точках отрезка [*a, b*], принадлежащего области определения *f(x)*, приближенно представляет функцию *f(x)* с той или иной степенью точности. Для нахождения коэффициентов многочлена a_k составляется система уравнений

$$a_0+a_1x_i+a_2x_i^2+\cdots+a_nx_i^n=f(x_i),\ (i=0,1,2,\ \ldots,n),$$

которая легко решается методом Крамера.

Воспроизведение многочлена $P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ осуществим каскадно соединенными ЦАП (рис. 1) [3]. Коэффициенты многочлена, реализуемого по этой схеме, имеют следующие знаки: $a_0>0$, $a_1>0$, $a_2>0$, $a_3<0$, $a_4>0$, $a_5>0$. Если коэффициенты имеют другие знаки, то схема претерпевает лишь незначительные изменения.

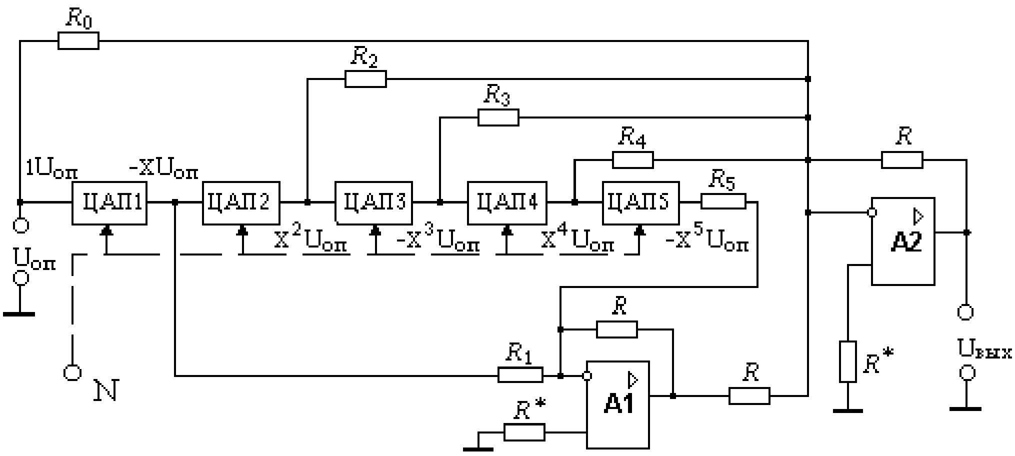


Рис. 1. Схема нелинейного цифро-аналогового преобразователя

В качестве ЦАП, изображенных на схеме, применяют умножающие ЦАП с двуполярным опорным напряжением. Выходное напряжение таких ЦАП определяется по формуле:

$$U = -U_{on} \cdot \frac{R_N}{R} \frac{N}{N_{max}},$$

где N - текущий цифровой код, который изменяется в пределах от 0 до $N_{max}-1$; $N_{max}= 2^b$, b - разрядность ЦАП; R - сопротивление резистивной матрицы; R_N - сопротивление резистора в цепи обратной связи ОУ ЦАП; U_{on} - опорное напряжение. Отношение $A = \frac{R_N}{R}$ называют масштабным коэффициентом или масштабным множителем. Его можно изменять в широких пределах, изменяя R_N.

В схеме, приведенной на рис. 1, при подаче на цифровые входы ЦАП кода N, на выходе 1-го ЦАП формируется напряжение, равное:

$$U_1 = -U_{on} A \frac{N}{N_{max}}.$$

Это напряжение является входным для 2-го ЦАП, а напряжение на его выходе будет определяться соотношением:

$$U_2 = -U_1 A \frac{N}{N_{max}} = U_{on}\left(-A \frac{N}{N_{max}}\right)^2.$$

Продолжая этот ряд, для k-го ЦАП можно записать:

$$U_k = U_{on}\left(-A \frac{N}{N_{max}}\right)^k.$$

Напряжения с выходов ЦАП через резисторы R_1, R_2, ..., R_5 подаются на вход сумматора $A2$. Для обеспечения необходимого знака, напряжения с выходов первого и пятого ЦАП проходят через инвертор $A1$. Дополнительно на сумматор через резистор R_0 подается опорное напряжение. На выходе сумматора формируется напряжение $U_{вых}$:

$$U_{вых} = -\left(\frac{R}{R_0} U_{on} - \frac{R}{R_1} U_1 + \frac{R}{R_2} U_2 + \frac{R}{R_3} U_3 + \frac{R}{R_4} U_4 - \frac{R}{R_5} U_5\right);$$

или, с учетом предыдущего уравнения:

$$U_{вых} = -U_{on}\left(\frac{R}{R_0} - \frac{R}{R_1}\left(-A\frac{N}{N_{max}}\right) + \frac{R}{R_2}\left(-A\frac{N}{N_{max}}\right)^2 + \ldots - \frac{R}{R_5}\left(-A\frac{N}{N_{max}}\right)^5\right).$$

Если обозначить $x = A\frac{N}{N_{max}}$, $\left| a_i \right| = \frac{R}{R_i}$, то последнее уравнение примет вид:

$$U_{вых} = -U_{on}(a_0 - a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 - a_5 x^5) \approx -U_{on} f(x).$$

Таким образом, получаем, что выходное напряжение пропорционально аппроксимируемой функции $f(x)$.

Необходимо указать на ограничение, которое накладывается каскадным включением ЦАП на диапазон изменения масштабного коэффициента A. При подаче на цепочку ЦАП кода, близкого к N_{max}, выходное напряжение *k*-го ЦАП пропорционально $U_{on}(-A)^k$. Для $A>1$ эта величина возрастает по геометрической прогрессии и может достигать недопустимо больших значений. Поэтому выгодно устанавливать A равным 1 и аппроксимировать функцию исходя из того, что x изменяется от 0 до 1.

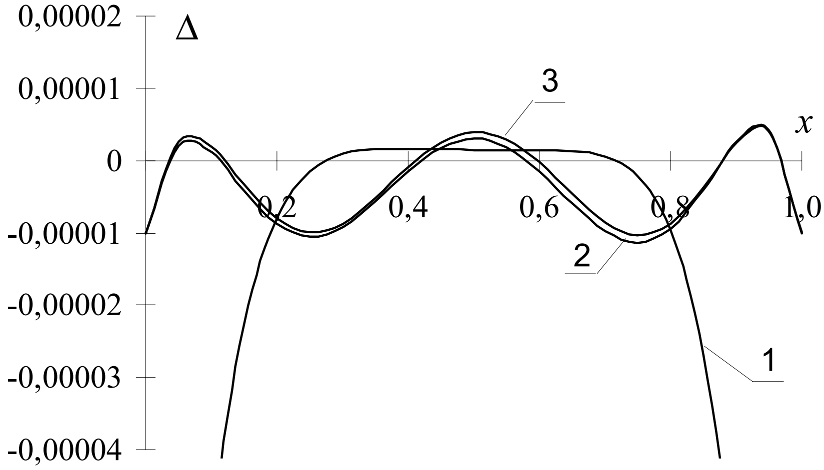


Рис.2. Абсолютная погрешность аппроксимации функции $sin(x\pi/2)$ многочленом 5-ой степени: 1) разложение Тейлора; 2) интерполяция; 3) разложение Чебышева

Из вышесказанного следует, что для воспроизведения многочлена $P_n(x)$ степени n необходимо n каскадно включенных ЦАП. Коэффициенты многочлена реализуются подбором резисторов R, R_0 ,R_1, ... R_k, а знаки слагаемых устанавливается при помощи инвертора.

Рассмотрим применение описанных выше методов для аппроксимации широко распространенных в радиотехнике и информационно-измерительной технике функций $sin(x)$ и $cos(x)$. Погрешность будем определять, отыскивая максимальное значение величины $\left|f(x)-P_n(x)\right|$ через малые интервалы (в нашем случае интервал равен 0,001). В связи с особенностью воспроизведения многочлена $P_n(x)$ каскадно включенными ЦАП, нами производилась аппроксимация функций $sin(x\pi/2)$ и $cos(x\pi/2)$ на отрезке [0,1].

На рис. 2 показаны типичные зависимости абсолютных погрешностей, получающиеся при различных способах приближения. Как видно погрешность интерполяции и разложения по многочленам Чебышева имеет вид кривой, колеблющейся возле нуля. Погрешность разложения Тейлора мала возле точки разложения и увеличивается по мере удаления от нее. На графике (рис.3) в логарифмическом масштабе приведена зависимость максимальной абсолютной погрешности от степени многочлена. Поскольку степень многочлена равна количеству используемых ЦАП, то этот график наглядно иллюстрирует, что применение интерполяции и разложения по многочленам Чебышева позволяет уменьшить их количество при сохранении точности воспроизведения.

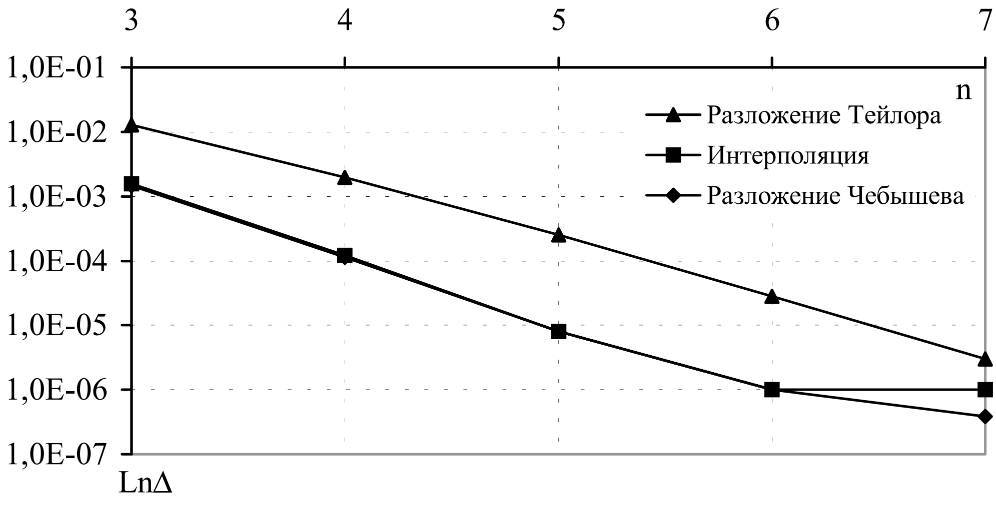


Рис.3. Графики зависимости логарифма абсолютной погрешности от степени многочлена

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике: Для инженеров и учащихся втузов. 13-е изд., испр. - М.: Наука, 1986. - 544 с.
2. Федорков Б.Г., Телец В.А. Микросхемы ЦАП и АЦП. - М.: Энергоатомиздат, 1990. - 320 с.
3. Сапельников В.М. Цифро-аналоговые преобразователи в калибраторах фазы / Изд-е Башкирск. ун-та. - Уфа, 1997. - 152 с.
4. Сапельников В.М., Хакимов Р.А., Панафидин А.Н. Нелинейные цифро-аналоговые преобразователи для воспроизведения элементарных функций //Материалы 12-й науч.-тех. конф. «Датчики и преобразователи информации систем измерения, контроля и управления», май, 2000 г. - М.: МГИЭМ, 2000. - С.275-276.
5. Сапельников В.М., Хакимов Р.А., Панафидин А.Н. Цифро-аналоговые преобразователи для воспроизведения элементарных функций// Труды LV-ой научной сессии, посвященной Дню Радио. М.: РНТОРЭС им. А.С. Попова, 2000. – С.122 – 123.
6. Электроника: Справочная книга / Под ред. Ю.А. Быстрова. - СПб.: Энергоатомиздат, 1996. - 544 с.
7. Сапельников В.М., Кравченко С.А., Чмых М.К. Проблемы воспроизведения смещаемых во времени электрических сигналов и их метрологическое обеспечение / Изд-е Башкирск. гос. ун-та - Уфа, 2000. - 196с.

TO THE QUESTION OF CONSTRUCTION OF FUNCTIONAL DIGITAL-TO-ANALOG CONVERTERS

Hakimov R.A.,Maksutov A.D., Kolovertnov G.J., Sapelnikov V.M.

Department of Physical Electronics, Bashkir State University, 32 Frunze street, Ufa 450074, Russia,
E-mail VSapelnikov@bsu.bashedu.ru

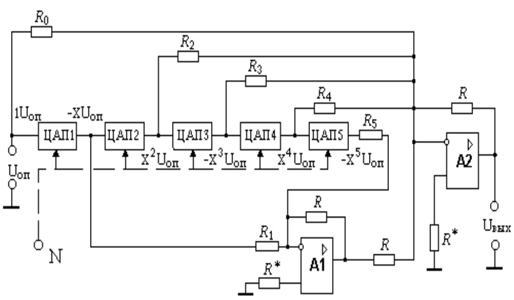
Abstract. In work methods of reduction of errors and hardware expenses are considered at creation of functional digital-to-analog converters. In a basis of these methods application of such ways of approximation, as decomposition on members of Chebyshev and interpolation lays. It is shown, that thus there is a significant decrease of errors in comparison with use of decomposition in line of Tejlor.

Elementary functions play the big role at designing devices for transformation of signals to informatsionno-measuring engineering, a radio engineering, instrument making and analog computer facilities. However reproduction of nonlinear functional dependences is connected to the certain difficulties as digital-to-analog converters (DAC) have a straight-line characteristic of transformation. In this connection elementary function f (x) approximate a polynomial which values are close to values of elementary function on some piece [a, b]. And though the polynomial also is elementary function its realization represents more simple problem [1].

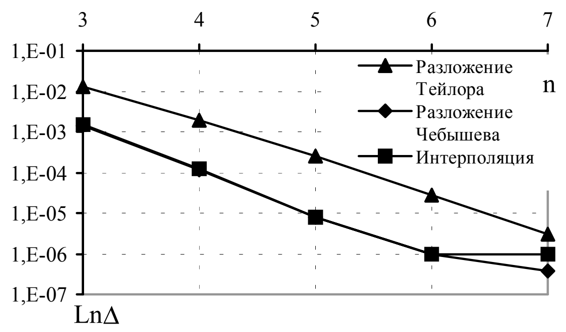
That the error from approximation was minimal, in appropriate way it is necessary to pick up factors at degrees of a polynomial.

In the report three methods are considered. The most widespread method of approximation of function f (x) - its decomposition in line of Tejlor. Decomposition of elementary functions in line of Tejlor are given in many mathematical directories for engineers. Decomposition of function in line of Tejlor is not the only thing.

There is an opportunity to spread out function in a line on the generalized polynomials, for example, on polynomials of Chebyshev which according to the theory give the best approximation. Also it is necessary to note, that decomposition of function f (x) on polynomials of Chebyshev is possible only for functions having a continuous first derivative on a piece [-1, 1]. This condition provides convergence of lines to function f (x). For the majority of elementary functions this condition is carried out.



Pic. 1. The circuit of the functional digital-to-analog converter



Pic. 2. Diagrams of dependence of the logarithm of an absolute error from a degree of a polynomial

The following method is based on the theory of interpolation. In this case build a polynomial, which in n+1 the given points x_0, x_1 ... x_n, accepts values $f(x_0)$, $f(x_1)$... $f(x_n)$, and in other points of a piece [a, b], belonging to a range of definition f(x), approximately represents function f(x) to some accuracy.

Reproduction of polynomial $Pn(x)= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ it is feasible in cascade connected DAC (Pic. 1). Factors of the polynomial sold under this circuit, have the following marks: *a0>0, a1>0, a2>0, a3<0, a4>0, a5>0*. If factors have other marks the circuit undergoes only minor alterations. In quality DAC, represented on the circuit, apply multiplings DAC with a two-polar basic voltage. The target voltage such DAC is determined under the formula:

$$U = -U^{”} \bullet \frac{R_N}{R} \frac{N}{N_{max}}.$$

Where N - the current digital code which changes in limits from 0 up to Nmax1; Nmax = 2b, b - word length DAC; R - resistance of a resistive matrix; RN - resistance of the resistor in a circuit of feedback OPA DAC; - a basic voltage. The attitude $A = \frac{R_N}{R}$ name scale factor or a scale multiplier.

In the circuit given on fig. 1, at submission on digital inputs DAC of code N on an output of the converter the voltage equal is formed:

$$U_{вых} = -U_{on}\left(\frac{R}{R_0} - \frac{R}{R_1}\left(-A\frac{N}{N_{max}}\right) + \frac{R}{R_2}\left(-A\frac{N}{N_{max}}\right)^2 + \ldots - \frac{R}{R_5}\left(-A\frac{N}{N_{max}}\right)^5\right).$$

If to designate $x = A\frac{N}{N_{max}}$, $\left| a_i \right| = \frac{R}{R_i}$, last equation will become:

$U_{вых} = -U_{on}(a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + a_4 x^4 - a_5 x^5) \approx -U_{on} f(x).$

So receive, that a target voltage of proportionally approximated function f(x). From the aforesaid follows, that for reproduction of polynomial Pn(x) degree n it is necessary n in cascade included DAC. Factors of a polynomial are realized by selection of resistors R, R_0, R_1... R_K, and marks composed it is established by means of the inverter.

Let's apply the methods described above for approximation widely widespread in a radio engineering and informational-measuring engineering of functions *sin(x)* и *cos(x)*. An error we shall determine finding the maximal value of size of $\left| f(x) - P_n(x) \right|$ through small intervals (the interval is equal our case 0,001). In connection with feature of reproduction of polynomial Pn(x) in cascade included DAC made approximation of functions *sin(x/2)* and *cos(x/2)* on a piece [0,1].

On the diagram (pic. 2) in logarithmic scale dependence of the maximal absolute error on a degree of a polynomial is given. As the degree of a polynomial is equal to amount used DAC this diagram evidently illustrates, that application of interpolation and decomposition on polynomials of Chebyshev allows to reduce their amount at preservation of accuracy of reproduction of function.

REFERENCES

1. V.M. Sapelnikov, Digital-to-Analog Converters in Phase Calibrators, Bashkir University Press, Ufa (1997).