

СВОЙСТВА ДВУМЕРНОГО ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА ВТОРОГО ПОРЯДКА С СИММЕТРИЕЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ И С ХАРАКТЕРИСТИКОЙ СУММАТОРА ТИПА НАСЫЩЕНИЯ*

Балусов И.Л., Елагин А.А., Приоров А.Л.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
150000, Россия, Ярославль, ул. Советская 14. Тел.: (0852) 32-11-94. E-mail: billy@jugra.yar.ru

Реферат: Объектом исследования является двумерный рекурсивный цифровой фильтр второго порядка с симметрией коэффициентов и характеристикой сумматора типа насыщения. Проведен анализ пространства параметров системы при начальных условиях вида $x_{-1,-1}=1$ и $x_{-2,-2}=1$. Исследована возможность зарождения в системе диагональных и разделимых предельных циклов размера (1x1) и (2x2). Приведены примеры реакций цифрового фильтра.

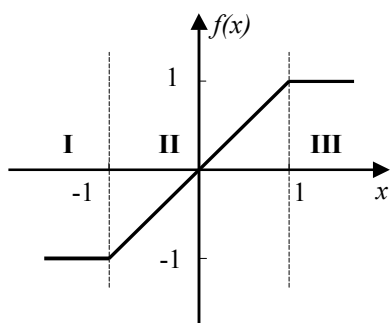
Введение

В реальных цифровых фильтрах сумматор имеет нелинейную характеристику. Учет этой нелинейности при анализе позволяет более эффективно использовать возможности цифровых фильтров и избежать нежелательных эффектов при реализации цифровых систем.

В работе рассматривается двумерный рекурсивный цифровой фильтр второго порядка с симметричными коэффициентами, описываемый нелинейным разностным уравнением вида

$$x_{m,n} = f(a(x_{m-1,n} + x_{m,n-1}) + b(x_{m-2,n} + x_{m,n-2}) + c(x_{m-1,n-1} + x_{m-2,n-2})), \quad (1)$$

где $f(x)$ - функция нелинейности сумматора (рис.1).



$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \geq 1, \\ x, & \text{при } |x| < 1, \\ -1, & \text{при } x \leq -1. \end{cases}$$

Рис.1 Вид функции нелинейности сумматора

В общем случае начальными условиями для фильтра (1) является совокупность бесконечных последовательностей $\{x_{m,-1}\}$, $\{x_{m,-2}\}$, $\{x_{-1,n}\}$ и $\{x_{-2,n}\}$, при $n \geq -2$, $m \geq -2$. В реальных задачах цифровой обработки двумерных сигналов естественно рассматривать начальные условия вида:

$$\begin{cases} x_{m,-1} = 0, & \text{при } m > M, \\ x_{m,-2} = 0, & \text{при } m > M, \\ x_{-1,n} = 0, & \text{при } n > N, \\ x_{-2,n} = 0, & \text{при } n > N. \end{cases} \quad (2)$$

1. Основные результаты

Исследования проводились с использованием метода символической динамики, ранее успешно применявшегося для анализа двумерных цифровых фильтров первого порядка [1, 2]. Суть метода состоит в том, что вся область значений нелинейности разбивается на линейные участки (I, II и III), а затем отслеживаются движения системы между ними при изменении индексов m и n при различных параметрах цифрового фильтра.

Рассмотрим поведение системы с начальными условиями: $x_{-1,-1}=1$, $\{x_{m,-1}\}=0$, $\{x_{m,-2}\}=0$, $\{x_{-1,n}\}=0$ и $\{x_{-2,n}\}$, при $n \geq -2$, $m \geq -2$, которое эквивалентно действию импульса амплитуды c на входе фильтра в точке $x_{0,0}$ при нулевых начальных условиях.

Пусть коэффициенты фильтра удовлетворяют следующим условиям: $0 < c < 1$, $a > 0$, $b > 0$. Рассмотрим движения системы вдоль осей m и n :

При выполнении условия $0 < c < 1$ очевидно, что отсчет $x_{0,0}=f(c)=c$ всегда будет принадлежать зоне II. Следовательно, все движения в системе будут начинаться из этой зоны.

При движении вдоль оси m начиная с некоторого P значения $x_{P,0}$, $x_{P+1,0}$, $x_{P+2,0}$ и т.д. будут принадлежать зоне III. Например, в случае выполнения неравенства

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-02-17939).

$$\sqrt{\frac{1-bc}{c}} \leq a < \frac{1}{c}$$

значения $x_{m,0}$ будут принадлежать зоне III начиная с $m=2$. Все дальнейшие значения $x_{m+1,0}, x_{m+2,0}, x_{m+3,0}$ и т. д. будут также принадлежать зоне III.

Аналогичная ситуация будет наблюдаться при движении вдоль оси n .

При движении вдоль диагонали ($a=b$) также начиная с некоторого K все значения $x_{k,k}, x_{k+1,k+1}, x_{k+2,k+2}$ и т.д. будут принадлежать зоне III. То есть, в системе зарождается разделимый предельный цикл (РПЦ) [3, 4] размера (1x1) с амплитудой, равной 1 (рис. 2а). На рисунке черному цвету соответствуют значения $x_{m,n}=-1$ (зона I), белому — $x_{m,n}=1$ (зона III), серому — $x_{m,n}=0$ (зона II).

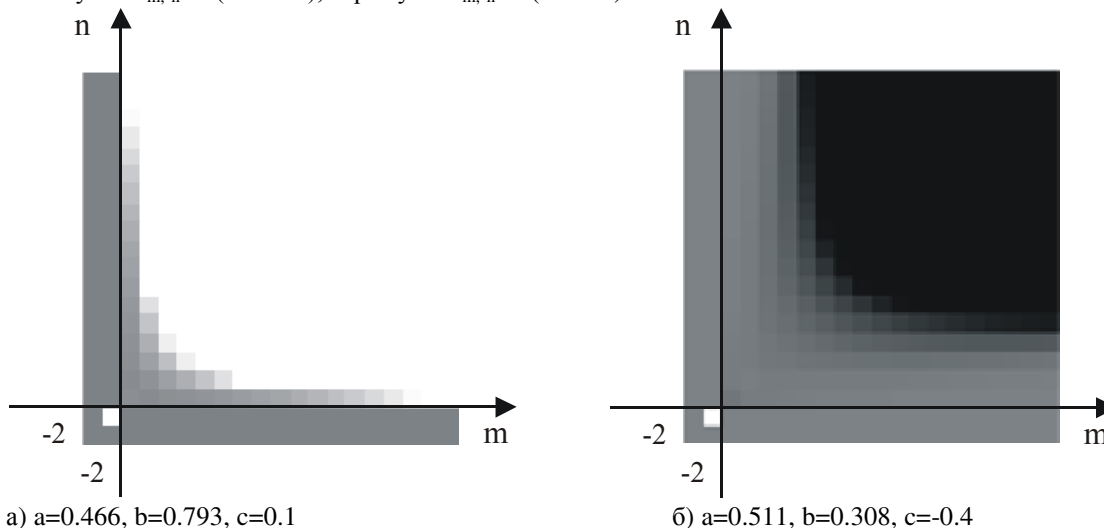


Рис. 2 Разделимый предельный цикл (1x1)

Если значения параметра c ограничить следующим образом — $-1 < c < 0$, а ограничения на параметры a и b оставить неизменными — $a > 0, b > 0$, то проведя аналогичные исследования, получим, что в системе также будет наблюдаться РПЦ размера (1x1) (рис. 2б). В отличие от предыдущего случая, значения выходного сигнала будут находиться в зоне I.

В случае наложения следующих ограничений на параметры цифрового фильтра — $0 < c < 1, a < 0, b > 0$ в системе возникает разделимый предельный цикл размера (2x2) (рис. 3).

Далее наложим следующие ограничения на параметры фильтра: $b < 0, a > 0$ (параметр c может принимать как положительные, так и отрицательные значения). В этом случае характер движений гораздо более сложен. В системе могут быть РПЦ размера (1x1) и более сложные движения — диагональные предельные циклы (ДПЦ) (рис. 4а, 4б). Причем характер движений сильно меняется при небольшом изменении параметров цифрового фильтра. Если изменить ограничение на параметр a ($a < 0$), то станет возможным появление РПЦ размера (2x2), но РПЦ размера (1x1) уже будет отсутствовать. В обоих случаях возможны РПЦ размера (2x2) (рис. 4в).

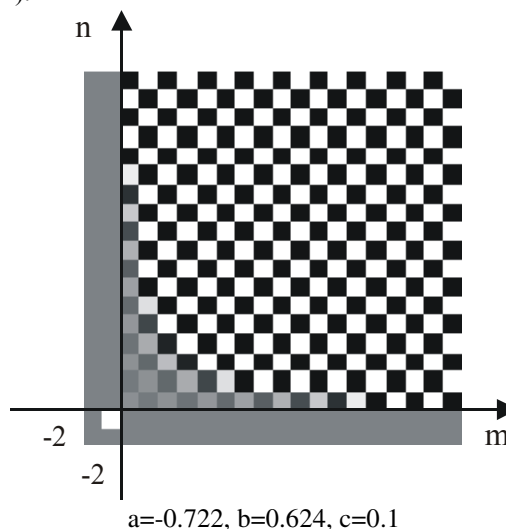


Рис. 3. Разделимый предельный цикл (2x2)

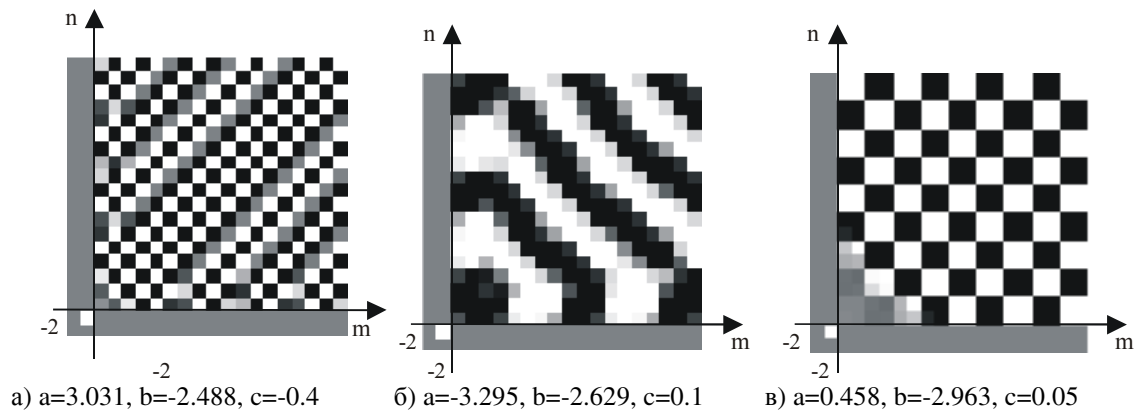


Рис. 4

Рассмотрим поведение системы со следующими начальными условиями — $x_{-1,-1}=1, x_{-2,-2}=1, \{x_{m,-1}\}=0, \{x_{m,-2}\}=0, \{x_{-1,n}\}=0$ и $\{x_{-2,n}\}$, при $n \geq -2, m \geq -2$. Исследовав поведение системы по тому алгоритму, что и в случае с одним начальным условием, получили качественно похожие результаты. Несомненно, меняются количественные характеристики движения (длительность переходные процессы, амплитуда сигнала при нахождении в зоне II), но остаются неизменными качественные характеристики (расположение областей предельных циклов в пространстве параметров цифрового фильтра, типы предельных циклов в них).

2. Заключение

Исследовался двумерный цифровой фильтр второго порядка с симметричными коэффициентами и с характеристикой сумматора типа насыщения. Данный тип нелинейности является наиболее просто анализируемым, но как показывает опыт исследования двумерных цифровых фильтров первого порядка, получаемые при этом результаты могут быть частично перенесены на случаи нелинейностей сумматора типа обнуления и переполнения.

Результаты исследований показывают, что в данной системе отсутствуют строчные и столбцовые предельные циклы, что объяснимо с помощью математической модели системы.

Исследована возможность зарождения в системе разделимых и диагональных предельных циклов размера (1x1) и (2x2). В пространстве параметров системы получены области существования предельных циклов различной размерности.

Библиография

1. Приоров А.Л., Судаков А.А., Елагин А.А. Исследование эффектов переполнения в двумерных рекурсивных цифровых фильтрах первого порядка // докл. 2-ой междунар. конф. и выставки "Цифровая обработка сигналов и ее применения" (DSPA'99), Москва, 1999. Т.2. С.608-612.
2. Приоров А.Л., Елагин А.А., Судаков А.А. Двумерный цифровой БИХ-фильтр с нелинейным сумматором // Науч. труды 5-й междунар. конф. "Теория и техника передачи, приема и обработки информации", Харьков, 1999. С.128-129.
3. G.A. Maria, M.M. Fahmy. Limit cycle oscillation in first-order two-dimensional digital filters // IEEE Trans. Circuits and Systems, vol. CAS-22, Mar. 1975, pp. 246-251.
4. El-Agizi N.L., Fahmy M.M. Two-dimensional digital filters with no overflow oscillations // IEEE Transactions on acoustics, and signal processing, Vol. Assp-27, №5, oct. 1979, P. 465 - 469.

PROPERTIES OF 2-D SECOND ORDER DIGITAL FILTER WITH SATURATION NONLINEARITY AND SYMMETRY OF COEFFICIENTS

Balusov I.L., Elagin A.A., Priorov A.L.

Yaroslavl State University

150000, Russia, Yaroslavl, Sovetskaja, 14. Phone: (0852) 32-11-94. E-mail: billy@jugra.yar.ru

Abstract: Overflow effects in 2-D second order digital filters with saturation nonlinearity are researched by some initial conditions ($x_{-1,-1}=1$ и $x_{-2,-2}=1$). Possibilities of occurrence of diagonal and separable limit cycles of periods (1x1) and (2x2) are researched. Examples of filter responses are given.

2-D second order digital recursive filter with saturation nonlinearity and symmetry of coefficients is considered. The examined system is described by the following nonlinear difference equation

$$x_{m,n} = f(a(x_{m-1,n} + x_{m,n-1}) + b(x_{m-2,n} + x_{m,n-2}) + c(x_{m-1,n-1} + x_{m-2,n-2})), \quad (1)$$

where $f(x)$ is the function of saturation nonlinearity.

The initial conditions for the filter (1) are constellation of infinite sequences $\{x_{m,-1}\}$, $\{x_{m,-2}\}$, $\{x_{-1,n}\}$ и $\{x_{-2,n}\}$. In problems of digital image processing it is natural to consider initial conditions of the kind: $x_{m,-1}=0$, $x_{m,-2}=0$ for $m>M$ and $x_{-1,n}=0$, $x_{-2,n}=0$ for $n>N$.

Methods of symbolic dynamics are used to determine areas for existence of certain types of diagonal limit cycles. The approach consists in dividing the range of nonlinearity function values into three linear regions (I, II and III). In the region I the nonlinearity function is equal to -1, in the region III - to 1, and in the region II the nonlinearity function is described by the linear equation $f(x)=x$. Further, transitions of the system between these regions are observed by varying indices m and n .

Let us begin with analyzing the system with initial conditions $x_{-1,-1}=1$ и $x_{-2,-2}=0$. It is equivalent to an input signal with amplitude c at $x_{0,0}$ with zero initial conditions.

Let us restrict the filter coefficients by following inequalities $0<c<1$, $a>0$, $b>0$, and consider the system's behavior along the axis m and n .

If the condition $0<c<1$ is satisfied, than the value $x_{0,0}=f(c)=c$ will always belong to the zone II. Therefore, all movements in system will begin from this zone.

By moving along the axes m by some P and further the values $x_{p,0}$, $x_{p+1,0}$, $x_{p+2,0}$ etc. will belong to the zone III. For example, in case of realization of the inequality $\sqrt{(1-bc)/c} \leq a < 1/c$ the values $x_{m,0}$ will belong to the zone III beginning from $m=2$. All the next values $x_{m+1,0}$, $x_{m+2,0}$, $x_{m+3,0}$ etc. will also belong to the zone III.

A similar situation will be observed by moving along the axes n .

By moving along the diagonal ($a=b$) by some K all the values of $x_{k,k}$, $x_{k+1,k+1}$, $x_{k+2,k+2}$ etc. will also belong to the zone III. That means that the system has a separable limit cycle of the period (1x1) and amplitude equal to 1 (Fig. 1a). On figure the black corresponds to $x_{m,n}=-1$ (zone I), the white — to $x_{m,n}=1$ (zone III), the gray — to $x_{m,n}=0$ (zone II).

Let us limit the coefficient c as follows — $-1<c<0$ and the coefficients a and b leave the same. By conducting similar researches we receive that the system has separable limit cycles of the period (1x1) (fig. 1b). In difference from the previous case, the value of the output signal will belong to the zone I. In case of $0<c<1$, $a<0$, $b>0$ the system will have separable limit cycles of the period (2x2) (fig. 1c).

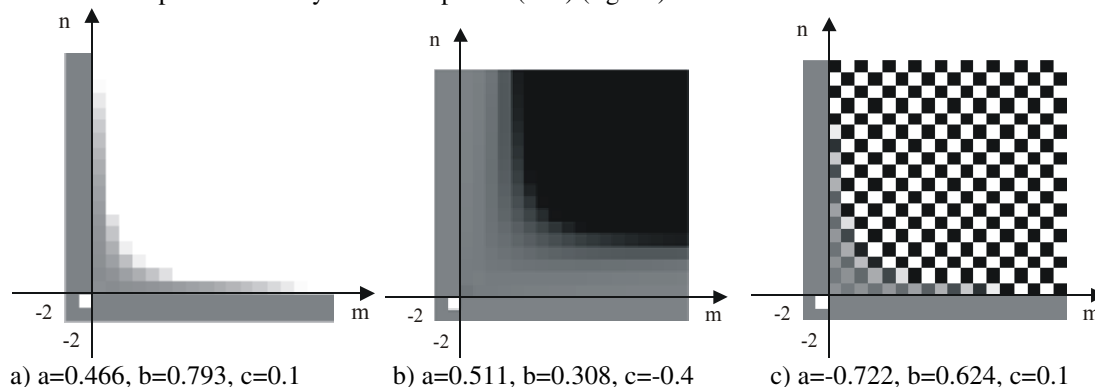


Figure 1

Further we shall impose the following restrictions on the filter coefficients: $b<0$, $a>0$ (coefficient c can have both positive and negative values). In this case the character of motions is much more complex. The system may have separable limit cycles of the period (1x1) and diagonal limit cycles of the period (1x1). And the character of motions greatly varies at a small modification of the coefficients of the digital filter. If we change the restriction on the coefficient a ($a<0$) there will exist a separable limit cycle of the period (2x2). But the separable cycles of the period (1x1) will be absent. In both cases separable limit cycles of the period (2x2) are possible.

Let's consider the behavior of the system with two initial conditions $x_{-1,-1}=1$ и $x_{-2,-2}=1$. By investigating the behavior of the system according to the algorithm, as in the case with one nonzero initial conditions, we receive qualitatively similar results. The quantitative characteristic of motions (duration of transitional processes, amplitude of the signal at a determination in the zone II) vary. But their qualitative characteristics (disposition of areas with corresponding limit cycles, their types) are the same.

Conclusion

The 2-D second order recursive digital filter with saturation nonlinearity and symmetry of coefficients was investigated. The saturation nonlinearity is most simply to analyze. But the received results can be partially transferred on the case of zeroing and overflow nonlinearities of the adder. It was shown by the results of the researches of first order digital filter with saturation nonlinearity.

Row and column limit cycles are absent in this system. It is explained on the base of a mathematical model of the system.

The possibilities of appearance of diagonal and separable limit cycles of the periods (1x1) and (2x2) are investigated. Areas of existence of limit cycles of various periods are obtained in space of the system's coefficients.